Derivace funkce (jedné proměnné) a její aplikace

KMDG, FS, VŠB-TUO

Derivace elementárních funkcí

$(c)' = 0 \qquad c \in \mathbb{R}$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \qquad n \in \mathbb{R}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a} \qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$

$(\coth x)' = 1 - \coth^2 x$

Vlastnosti derivace

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

derivace součinu

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

derivace podílu

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

derivace složené funkce

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Aplikace derivace

Diferenciál funkce $f \quad \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

Tečna ke grafu funkce f v bodě $x_0 \quad t: \ y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Normála ke grafu funkce f v bodě $x_0 \quad n: \ y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

Taylorův polynom funkce f stupně n v bodě x_0

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Průběh funkce

Monotonnost (rostoucí, klesající), lokální extrémy

$f' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ je rostoucí

$f' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ je klesající

$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ má v x_0 lokální minimum

$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ má v x_0 lokální maximum

Křivost (konvexní, konkávní), inflexní bod

$f'' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ je konvexní

$f'' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ je konkávní

$f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f$ má v x_0 inflexní bod

Asymptoty ke grafu funkce f

Asymptota se směrnicí v ∞ je přímka $y = kx + q$, pro $k,\ q \in \mathbb{R}$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

Svislá asymptota je přímka $x = a$, pokud

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

l'Hospitalovo pravidlo

pro limity typu $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Parametricky zadaná funkce

$$f: \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \qquad t \in I$$

$$y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

$$y'' = \frac{\ddot{y}(t) \cdot \dot{x}(t) - \dot{y}(t) \cdot \ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3}$$

Implicitně zadaná funkce

$$F(x, y) = 0$$

$$y' = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$$

Diferenciální počet funkce více proměnných

KMDG, FS, VŠB-TUO

Parciální derivace

Parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$

derivace podle x $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}$

derivace podle y $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Hodnota parciálních derivací v bodě $[x_0, y_0]$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

druhá derivace podle x $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

smíšená derivace podle $x,\ y$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

druhá derivace podle y $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

smíšená derivace podle $y,\ x$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

Aplikace derivace

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

Tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Normála ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$

$$n : \begin{array}{l} x = x_0 + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot t \\ y = y_0 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot t, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = f(x_0, y_0) - t \end{array}$$

Extrémy funkce dvou proměnných

Lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{array} \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0, \ f \text{ má v bodě } [x_0, y_0] \text{ lokální maximum} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0, \ f \text{ má v bodě } [x_0, y_0] \text{ lokální minimum} \end{cases}$$

Vázané extrémy funkce $z = f(x, y)$ vázané podmínkou $g(x, y) = 0$

Lagrangián $\qquad L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$

funkce L má v bodě $[x_0, y_0, \lambda_0]$ lokální extrém $\Rightarrow$ funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ extrém vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$

Diferenciální operátory

operátor nabla $\quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Operátory funkce $f(x, y)$

gradient $\quad \mathbf{grad}\, f = \nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

Laplaceův operátor $\quad \triangle f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Operátory vektorové funkce $\boldsymbol{F}(x, y) = (F_x, F_y)$

divergence $\quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y}$

Laplaceův operátor $\quad \triangle \boldsymbol{F} = (\triangle F_x, \triangle F_y)$

Operátory funkce $f(x, y, z)$

gradient $\quad \mathbf{grad}\, f = \nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

Laplaceův operátor $\quad \triangle f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Operátory vektorové funkce $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)$

divergence $\quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$

rotace

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial y}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Laplaceův operátor $\quad \triangle \boldsymbol{F} = (\triangle F_x, \triangle F_y, \triangle F_z)$

$\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f = \mathbf{o} \quad \mathrm{div}\,\mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} = 0 \quad \mathrm{div}\,\mathbf{grad}\, f = \triangle f$