

Matic

matice $A_{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

jednotková matice $E_{n \times n}$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matice A^T $a_{ij}^T = a_{ji}$

Součet matic $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobek matice A číslem k $B_{m \times n} = k A_{m \times n} \Leftrightarrow b_{ij} = k a_{ij}$

Součin matic A, B $C_{m \times p} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} \Leftrightarrow$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \forall i, j$$

obecně $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

$$A \cdot E = E \cdot A = A \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Determinanty

pro $n = 1$ $|A| = a_{11}$

pro $n = 2$ křížové pravidlo $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

pro $n = 3$ Sarrusovo pravidlo

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$$

Laplaceův rozvoj podle i -tého řádku $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} |A_{ij}|$

A_{ij} vznikne z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce

Vlastnosti determinantu $|A^T| = |A| \quad |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Inverzní matice

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

výpočet pomocí determinantu

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \check{A}^T \quad \check{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

výpočet eliminační metodou

$$(A|E) \sim \cdots \sim (E|A^{-1})$$

Maticové rovnice

řešení rovnice typu $A \cdot X = B$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

řešení rovnice typu $X \cdot A = B$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

Soustavy lineárních rovnic

Soustava m lineárních rovnic pro n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n $A \cdot x = b$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Gaussova eliminační metoda

1. Vytvoříme rozšířenou matici $A|b$ soustavy $A \cdot x = b$.
2. Pomocí ekvivalentních úprav převedeme matici $A|b$ na stupňovitý tvar.
3. Zjistíme počet řešení soustavy.
4. Sestavíme soustavu rovnic odpovídající matici ve stupňovitém tvaru.
5. Při řešení této soustavy postupujeme od poslední rovnice k první.

soustava lineárních rovnic s regulární maticí $|A| \neq 0$ má jediné řešení

Cramerovo pravidlo

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}$$

A_k vznikne z A nahrazením k -tého sloupce vektorem b

řešení pomocí inverzní matice

$$x = A^{-1} \cdot b$$



Součiny vektorů

Skalární součin vektorů u, v

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Vektorový součin vektorů u, v

$$w = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$$

$$w = u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Kolmost $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$

$$w = u \times v \Rightarrow w \perp u \wedge w \perp v$$

Velikost vektoru $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Obsahy a objemy

Obsah rovnoběžníku o stranách u, v

$$S = |u \times v|$$

Obsah trojúhelníku o stranách u, v

$$S = \frac{1}{2} |u \times v|$$

Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory u, v, w

$$V = |u \cdot (v \times w)|$$

Objem čtyřstěnu určeného vektory u, v, w

$$V = \frac{1}{6} |u \cdot (v \times w)|$$

Přímka

Přímka určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a vektorem $u = (u_1, u_2, u_3)$

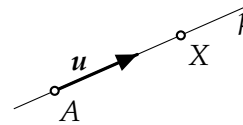
$$p : X = A + tu, \quad t \in \mathbb{R}$$

parametrické rovnice přímky

$$x = a_1 + tu_1$$

$$p : y = a_2 + tu_2, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z = a_3 + tu_3$$



Rovina

Rovina určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a vektory $u = (u_1, u_2, u_3)$ a $v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\alpha : X = A + tu + sv, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

parametrické rovnice roviny

$$x = a_1 + tu_1 + sv_1$$

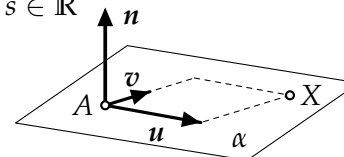
$$\alpha : y = a_2 + tu_2 + sv_2, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$z = a_3 + tu_3 + sv_3$$

obecná rovnice roviny

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

$n = (a, b, c)$ je normálový vektor kolmý k rovině α



Střed úsečky a těžiště trojúhelníka

Střed úsečky AB $S = \frac{A+B}{2}$

Těžiště trojúhelníka ABC $T = \frac{A+B+C}{3}$

Vzdálenosti

Vzdálenost dvou bodů $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Vzdálenost bodu M od přímky určené bodem A a vektorem u

$$d = \frac{|u \times AM|}{|u|}$$

Vzdálenost bodu M od roviny $ax + by + cz + d = 0$

$$d = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Odchylky

Odchylka dvou vektorů u, v

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$$

Odchylka dvou přímek určených vektory u, v

$$\cos \varphi = \frac{|u \cdot v|}{|u| \cdot |v|}$$

Odchylka přímky určené vektorem u od roviny určené normálovým vektorem n

$$\sin \varphi = \frac{|u \cdot n|}{|u| \cdot |n|}$$

Odchylka dvou rovin určených normálovými vektory n_α, n_β

$$\cos \varphi = \frac{|n_\alpha \cdot n_\beta|}{|n_\alpha| \cdot |n_\beta|}$$