Pravděpodobnost

KMDG, FS, VŠB-TUO

Kombinatorika

faktoriál $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

$n! = n(n-1)!$

$0! = 1$

kombinační číslo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

$\binom{0}{0} = 1 \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \qquad n \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad n, k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad n, k \in \mathbb{N}_0,\ k < 0$

kombinace – neuspořádaný výběr k prvků z n

bez opakování $C_k(n) = \binom{n}{k}$

s opakováním $C'_k(n) = C_k(n+k-1) = \binom{n+k-1}{k}$

variace – uspořádaný výběr k prvků z n

bez opakování $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

s opakováním $V'_k(n) = n^k$

permutace – uspořádání n prvků

bez opakování $P(n) = V_n(n) = n!$

s opakováním $P'(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + \cdots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$

Pravděpodobnost jevů

klasická $P(A) = \frac{m}{n},\ m \leq n$

statistická $p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$

geometrická $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Pravidla pro počítání s pravděpodobnostmi, podmíněná pravděpodobnost

sčítání

$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	sjednocení jevů, $C = A \cup B$
$P(C) = P(A) + P(B)$	sjednocení neslučitelných jevů, $C = A \cup B,\ P(A \cap B) = 0$
$P(C) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$	sjednocení vzájemně neslučitelných jevů, $C = \cup_{i=1}^{n} A_i$

násobení

$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$	průnik jevů, $C = A \cap B$
$P(C) = P(A) \cdot P(B\|A)$	průnik závislých jevů, $C = A \cap B,\ P(B\|A) \neq P(B)$
$P(C) = P(A) \cdot P(B)$	průnik nezávislých jevů, $C = A \cap B,\ P(B\|A) = P(B)$

doplněk

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ opačný jev, $\overline{A} = \Omega - A$

podmíněná pravděpodobnost

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $\quad P(A) \neq 0$

$P(B|A) = P(B)$ nezávislé jevy

úplná pravděpodobnost

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)$ $\quad i = 1, \ldots, n;\ A_i$ jsou vzájemně disjunktní jevy

Bayesův vzorec inverzní pravděpodobnosti

$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)}$ $\quad i = 1, \ldots, n$

Bernoulliovo schéma, opakované nazávislé pokusy

$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ jev A s pravděpodobností p nastane k krát v n opakováních

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Náhodná veličina

Funkce, vlastnosti

hustota pravděpodobnosti $f(x)$

$$f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

pravděpodobnostní funkce $p(x) = P(X = x)$

$$p(x_i) \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

distribuční funkce

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \approx \sum_{i:x_i \leq x} P(X = x_i)$$

pravděpodobnost

$$P(x_1 < x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Číselné charakteristiky

momenty k-tého řádu

$E(X^k) = \sum_i x_i^k \cdot P(X = x_i)$ — obecný (počáteční) moment diskrétní NV

$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,dx$ — obecný (počáteční) moment spojité NV

$E(X) = \mu$ — střední hodnota

$E(X - E(X))^k = \sum_i (x_i - E(X))^k \cdot P(X = x_i)$ — centrální moment diskrétní NV

$E(X - E(X))^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k \cdot f(x)\,dx$ — centrální moment spojité NV

$D(X) = \sigma^2 = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ — rozptyl

$\sigma = \sqrt{D(X)}$ — směrodatná odchylka

$A = \dfrac{E(X - E(X))^3}{\sigma^3}$ — koeficient šikmosti

$e = \dfrac{E(X - E(X))^4}{\sigma^4}$ — koeficient špičatosti

kvantil x_p

$P(X \leq x_p) = p$ — $p \in \langle 0, 1 \rangle$, pouze pro spojité NV

modus $Mo(X)$ – hodnota x, v níž nabývá frekvenční funkce maxima

Diskrétní rozdělení

binomické rozdělení $Bi(n, p)$ — X = počet „úspěchů" v n nezávislých pokusech

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ — BINOM.DIST$(k; n; p; 0)$

$\mu = np,\ \sigma^2 = np(1-p)$

hypergeometrické rozdělení $H(N, M, n)$ — X = počet prvků s danou vlastností ve výběru n prvků

$P(X = k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ — HYPGEOM.DIST$(k; n; M; N; 0)$

geometrické rozdělení $Ge(p)$ — X = počet Bernoulliho pokusů do prvního úspěchu

$P(X = k) = p(1-p)^{n-k}$

$\mu = \frac{1}{p},\ \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda t)$ — X = počet výskytu události v časovém intervalu

$P(X = k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t}$ — POISSON.DIST$(k; \lambda t; 0)$

$\mu = \lambda t,\ \sigma^2 = \lambda t$

Spojitá rozdělení

normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dt$$

NORM.DIST$(x; \mu; \sigma; 1)$

normované normální rozdělení $N(0, 1)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

NORM.S.DIST$(x; 1)$

transformace $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ do normovaného normálního r.: $u = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$, $\Phi(u) = F(x)$

exponenciální rozdělení $Exp(\lambda)$ — X = doba do výskytu první události

$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ — $x > 0, \lambda > 0$

$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ — EXPON.DIST$(x; \lambda; 1)$

$\mu = \dfrac{1}{\lambda},\ \sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$