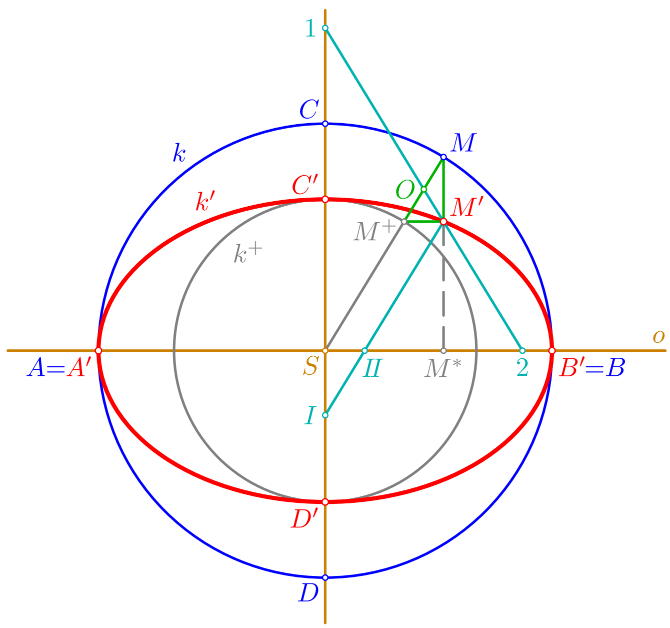
Afinní vztah kružnice a elipsy

Výklad

- rovnoběžným průmětem kružnice do roviny je v obecném případě elipsa; speciálně se může kružnice promítnout do kružnice nebo do úsečky
- daná kružnice k a její rovnoběžný průmět – elipsa k' – si odpovídají v prostorové osové afinitě mezi rovinami obou křivek; rovnoběžným průmětem této prostorové osové afinity do nějaké roviny ρ je osová afinita v této rovině ρ
- na základě tohoto afinního vztahu mezi kružnicí a elipsou lze odvodit některé užitečné konstrukce elipsy

Trojúhelníková a proužkové konstrukce elipsy



- pravoúhlá osová afinita mezi kružnicí k a elipsou k' je dána takto: osou o afinity je hlavní osa elipsy k', dvojici odpovídajících si bodů tvoří body $C \in k$ a $C' \in k'$ na vedlejší ose
- potom lze další body elipsy k' sestrojovat pomocí tzv. **trojúhelníkové konstrukce**
  - na kružnici k zvolme bod M
  - označme M^+ průsečík polopřímky SM s kružnicí $k^+(S, |SC'|)$

   - bodem M^+ veďme rovnoběžku s osou o a bodem M kolmici k ose o afinity; jejich průsečík M' je pak bodem elipsy k' (to lze odvodit z vlastností charakteristiky dané osové afinity: $\frac{|M'M^*|}{|MM^*|} = \frac{|M^+S|}{|MS|} = \frac{|SC'|}{|SC|}$)

- **součtová proužková konstrukce**
   - sestrojený bod M' spojme se středem O úsečky MM^+
   - tato spojnice protíná vedlejší a hlavní osu elipsy k' v bodech $1, 2$, pro něž platí: $|1M'| = |SM|$, což je délka hlavní poloosy, a $|2M'| = |SM^+|$, což je délka vedlejší poloosy elipsy k'
   - kdybychom úsečku 12 (její délka je **součtem** délek hlavní a vedlejší poloosy) spolu s dělicím bodem M' přenesli na proužek papíru a jím pak pohybovali tak, aby bod 1 ležel stále na vedlejší resp. bod 2 na hlavní ose elipsy, potom bod M' bude opisovat elipsu k'

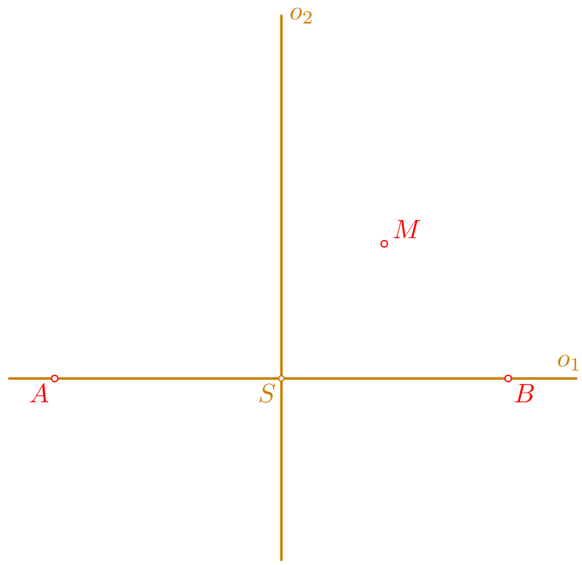
- **rozdílová proužková konstrukce**
   - sestrojeným bodem M' veďme rovnoběžku s přímkou SM
   - ta protne vedlejší a hlavní osu elipsy k' v bodech I, II, pro které platí: $|IM'| =$ $= |SM|$, což je délka hlavní poloosy, a $|IIM'| = |SM^+|$, což je délka vedlejší poloosy elipsy k'
   - kdybychom úsečku III (její délka je **rozdílem** délek hlavní a vedlejší poloosy) spolu s prodloužením do bodu M' nanesli na proužek papíru a jím pak pohybovali tak, aby bod I ležel stále na vedlejší resp. bod II na hlavní ose elipsy, potom bod M' bude opět opisovat elipsu k'

Řešené úlohy

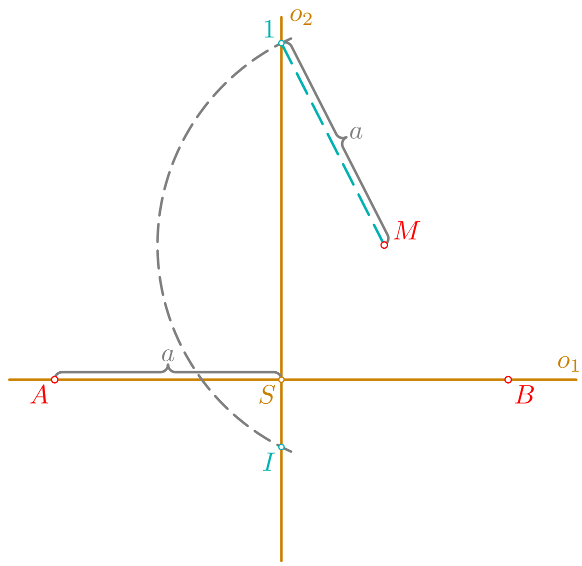
Užití proužkových konstrukcí

Příklad: Sestrojte vedlejší vrcholy C, D elipsy e, která je dána hlavními vrcholy A, B a obecným bodem M.

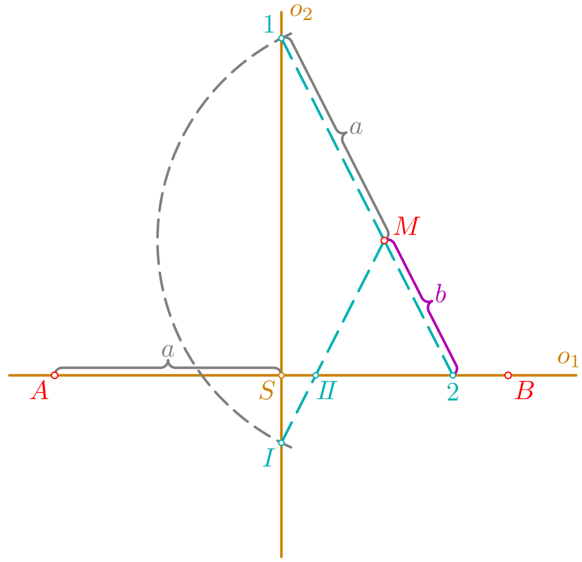
- pro elipsu e zvolme střed S a souměrně podle něj hlavní vrcholy A, B na hlavní ose o_1; doplňme vedlejší osu $o_2 \perp o_1, S \in o_2$ a obecný bod M tak, aby bylo $|SM| < |SA|$



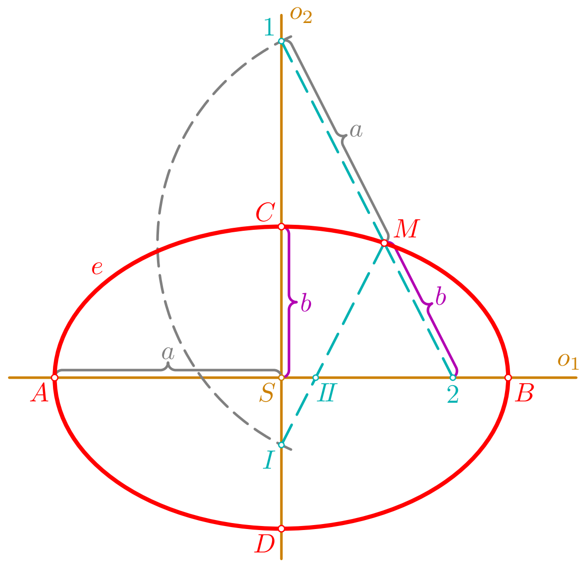
- kolem zvoleného bodu M opišme oblouk pomocné kružnice o poloměru délky $a = |SA|$ hlavní poloosy a najděme její průsečíky $1, I$ s vedlejší osou o_2



- přímka $1M$, resp. přímka IM, protíná hlavní osu o_1 v bodě 2, resp. v bodě II, přičemž $|2M| = |IIM| = b$ je podle předchozího délka vedlejší poloosy sestrojované elipsy e



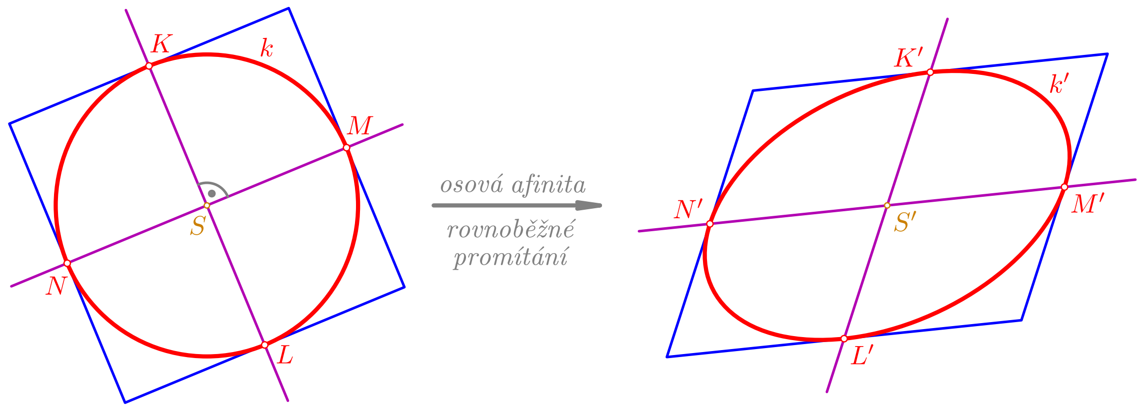
- nyní již můžeme snadno doplnit vedlejší vrcholy $C, D \in o_2$, $|SC| = |SD| = b$, a (nejlépe za pomoci hyperoskulačních kružnic ve vrcholech, tato konstrukce ovšem není v obrázku provedena) vyrýsovat elipsu e; pro řešení úlohy zřejmě stačí použít buď pouze součtovou (body $1, 2$) nebo pouze rozdílovou variantu (body I, II) některé z proužkových konstrukcí...



□

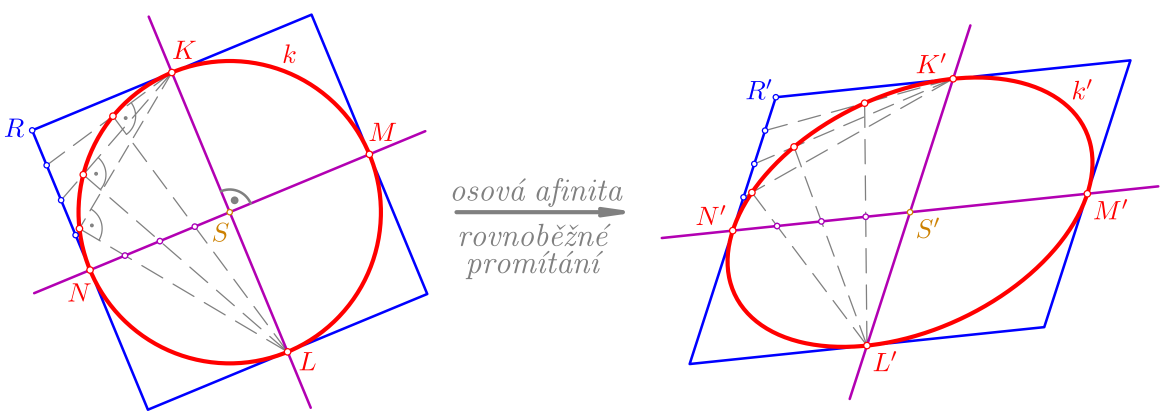
Výklad

Sdružené průměry kružnice a elipsy



- dva průměry kružnice nebo elipsy se nazývají **sdružené**, právě když tečny v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem
- sdruženost průměrů se rovnoběžným promítáním a tedy i osovou afinitou zachovává
- u kružnice jsou každé dva sdružené průměry současně navzájem kolmé
- u elipsy existuje jediná dvojice sdružených a současně kolmých průměrů – na hlavní a vedlejší ose

Příčková konstrukce bodů kružnice a elipsy



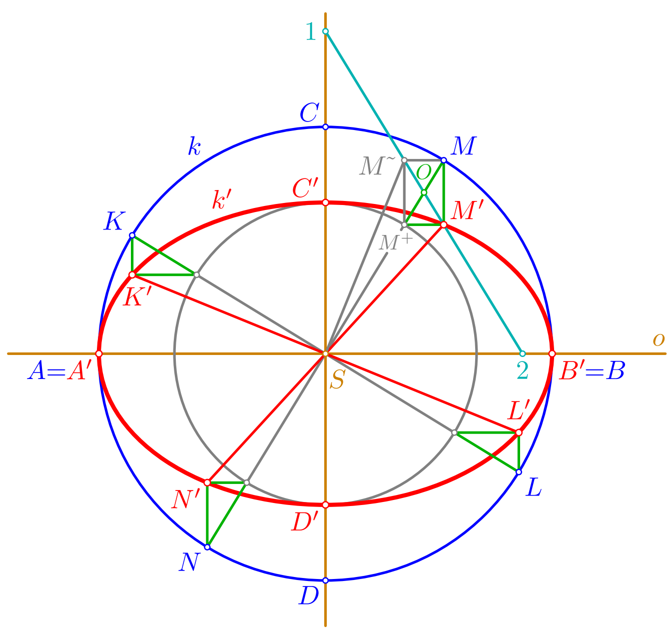
- **kružnice**
  - KL a MN jsou dva sdružené průměry dané kružnice $k(S, r)$

- tečny kružnice k v bodech K a N nechť se protínají v bodě R
- úsečky NR a NS jsou rozděleny na stejný počet stejných dílů (v obrázku na čtvrtiny)
- dělicí body na úsečce NR resp. NS jsou spojeny příčkami s bodem K resp. L
- poměrně snadno lze odvodit, že odpovídající si příčky se protínají pod pravými úhly, a dle Thaletovy věty tedy příslušné průsečíky leží na dané kružnici k

- **elipsa**
  - výše uvedená konstrukce pro kružnici je založena pouze na vlastnostech sdružených průměrů a na dělení úsečky v daném poměru
  - rovnoběžným promítáním nebo osovou afinitou ji lze tedy snadno aplikovat i na elipsu, která je dána právě sdruženými průměry

Rytzova konstrukce

- ukazuje, jak lze sestrojit hlavní a vedlejší vrcholy elipsy, která je dána pomocí dvojice svých sdružených průměrů



- kružnice k a elipsa k' si odpovídají v pravoúhlé osové afinitě, jejíž osou o je hlavní osa elipsy a v níž se bod C zobrazí na bod C'

- zvolme dvojici kolmých (a tedy i sdružených) průměrů KL, MN kružnice k a pomocí trojúhelníkové konstrukce sestrojme odpovídající sdružené průměry $K'L', M'N'$ elipsy k'

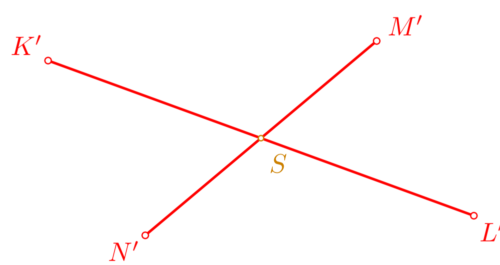
- doplníme-li trojúhelník $MM'M^+$ bodem $M\tilde{}$ na obdélník, pak platí $SM\tilde{} \perp K'L'$ a pro střed O obdélníka $MM'M^+M\tilde{}$ je $|OS| = |O1| = |O2|$

- na základě těchto vztahů lze odvodit tzv. **Rytzovu konstrukci**, jejíž použití předvedeme na následujícím příkladě

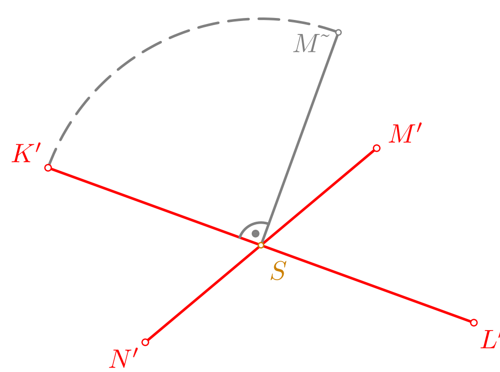
Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte hlavní a vedlejší vrcholy elipsy k', která je dána dvojicí sdružených průměrů $K'L', M'N'$.

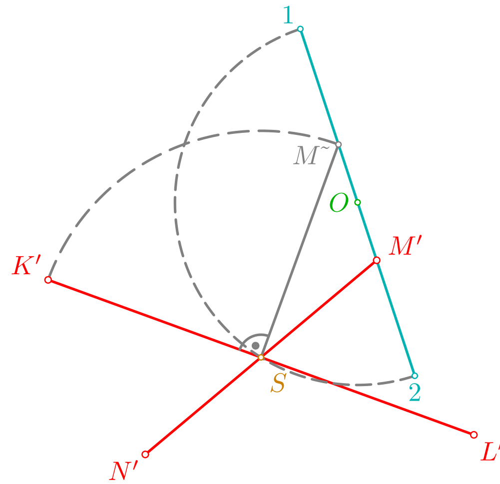
- zvolme dvojici obecných (tj. ne kolmých) sdružených průměrů $K'L', M'N'$ elipsy k', které se protínají v jejím středu S; pro lepší orientaci a porozumění je ponecháno označení z předchozího obrázku



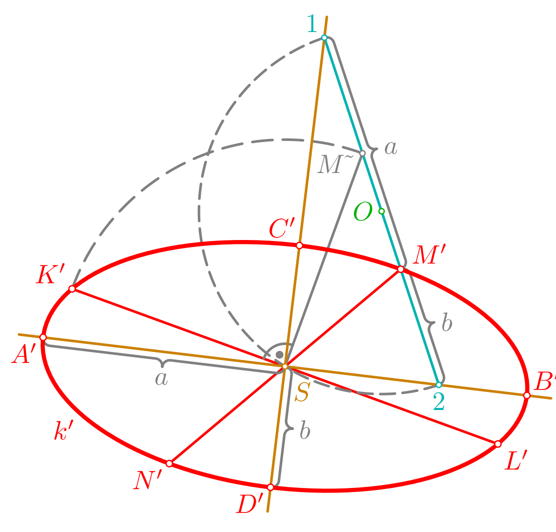
- krajní bod K' jednoho z průměrů otočme o 90° kolem středu S do bodu $M\tilde{}$; přitom je lhostejné, který z bodů K', L', M', N' vybereme a jestli jej otočíme v kladném nebo záporném smyslu



- bod $\tilde{M}$ spojme s některým (tradičně bližším, ale opět je to jedno) krajním bodem druhého průměru, tj. např. s bodem M', a sestrojme střed O úsečky $\tilde{M}M'$; dále na přímce $\tilde{M}M'$ sestrojme body $1, 2$, pro které platí $|O1| = |O2| = |OS|$



- přímky $1S, 2S$ jsou pak vedlejší a hlavní osou konstruované elipsy, přičemž hlavní osa vždy dělí ostrý úhel daných sdružených průměrů; délky hlavní a vedlejší poloosy určíme pomocí součtové proužkové konstrukce: $a = |1M'|$ a $b = |2M'|$; tyto délky naneseme od středu S na příslušné osy a získáme hledané hlavní a vedlejší vrcholy A, B, C, D; na závěr vyrýsujeme elipsu k', pro niž známe osm bodů a v každém z nich bychom mohli snadno sestrojit tečnu (jako rovnoběžku s příslušným sdruženým průměrem)…



$\square$