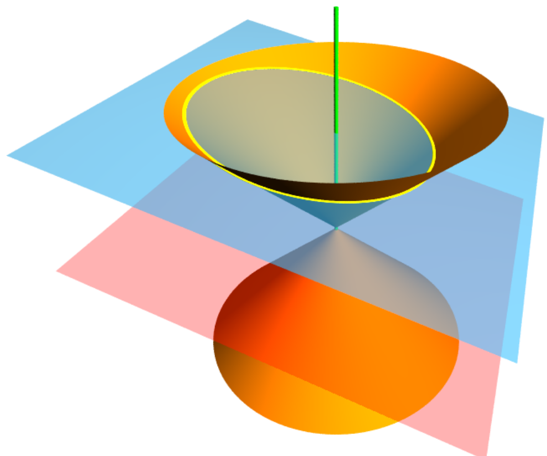
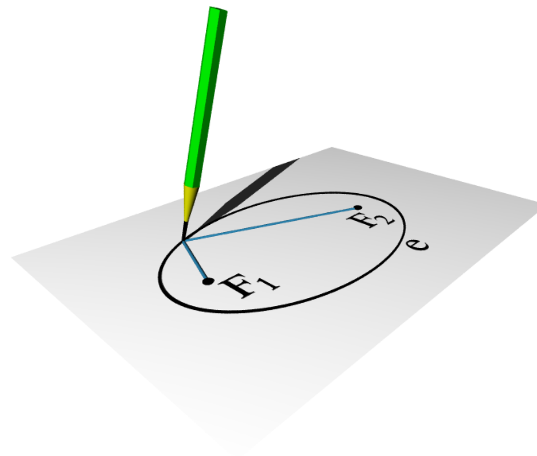
Elipsa

Výklad





Definice a ohniskové vlastnosti

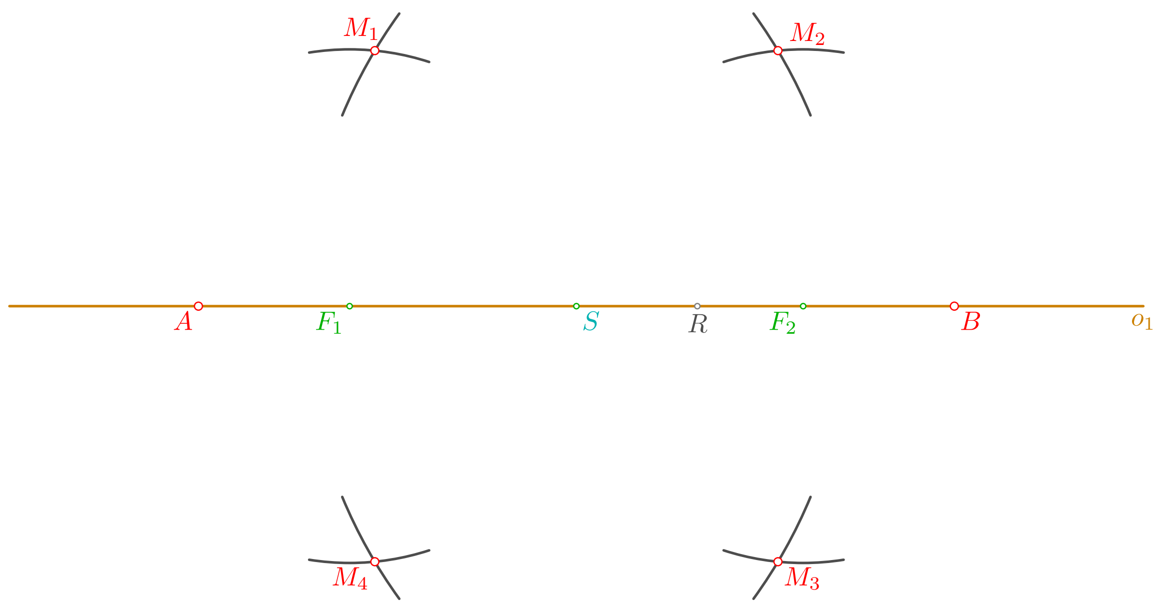
- *prostorová definice (viz obrázek vlevo nahoře):* **elipsa** je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řezná rovina není kolmá k ose rotační kuželové plochy a rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem má s kuželovou plochou společný pouze vrchol (nebo jinak: odchylka roviny řezu od osy je větší než odchylka povrchových přímek)

- *ohnisková definice (viz obrázek vpravo nahoře, který ukazuje tzv.* ***zahradnickou konstrukci*** *elipsy):* **elipsa** e je množinou všech bodů v dané rovině ρ, jejichž součet vzdáleností od dvou různých pevných bodů F_1, F_2 je roven danému číslu $2a$, které je větší než vzdálenost bodů F_1, F_2; symbolicky zapsáno:

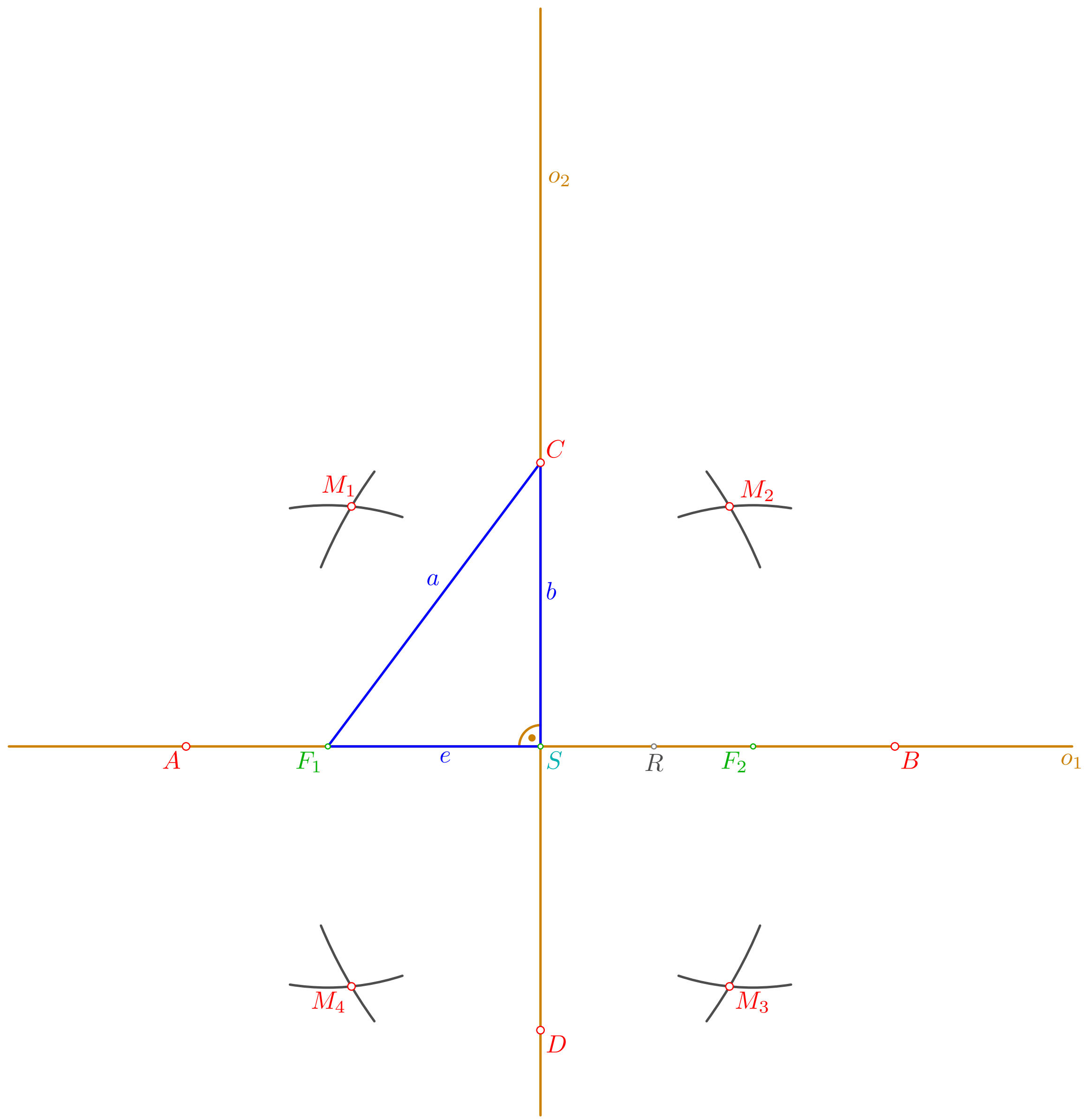
$$e = \{X \in \rho; |F_1X| + |F_2X| = 2a, 0 < |F_1F_2| < 2a\}$$

Konstrukce a základní pojmy

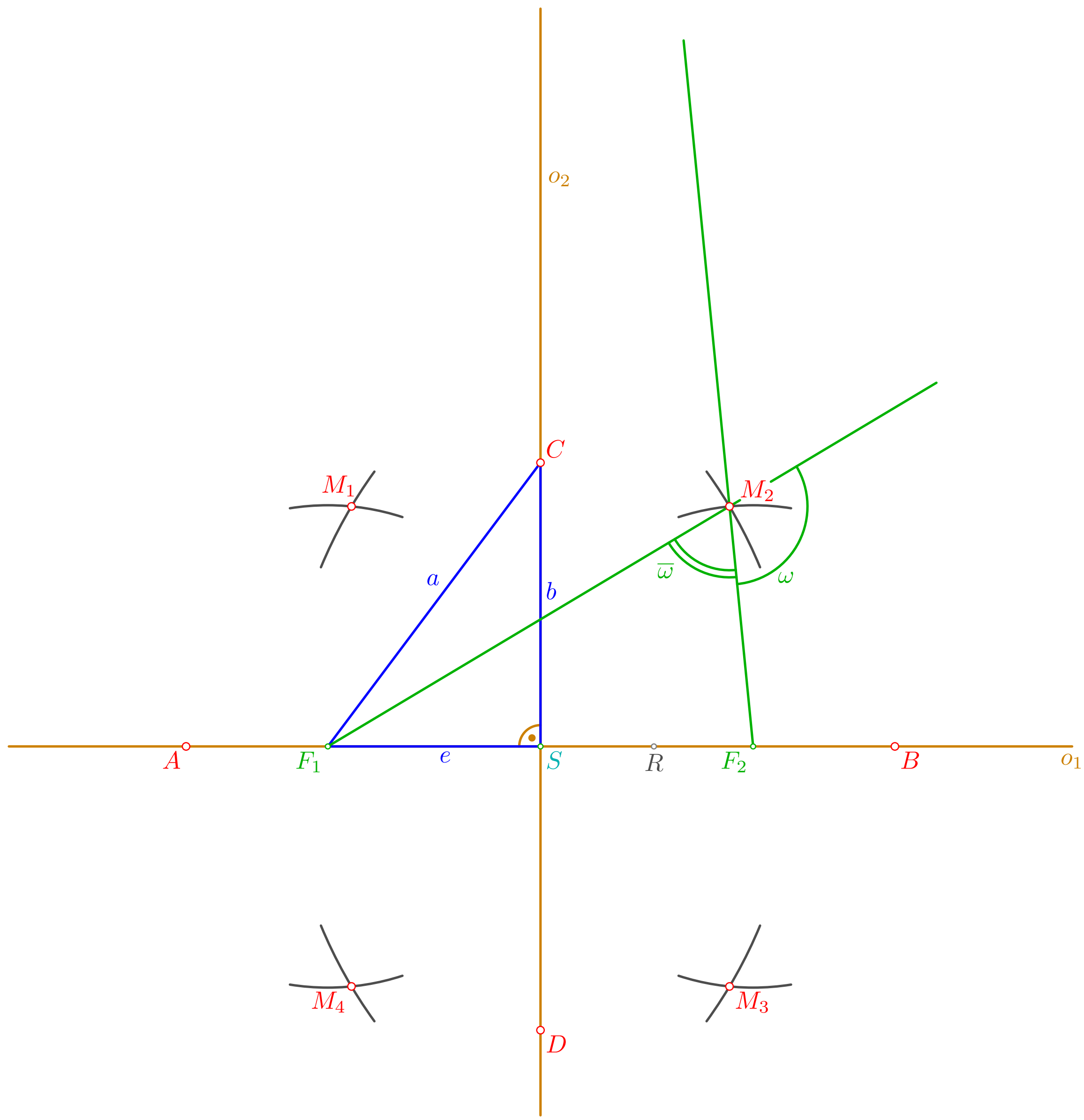
- na vodorovné přímce o_1 zvolme bod S a od něj na obě strany souměrně nanesme dvě libovolně zvolené vzdálenosti; bližší body označme F_1, F_2 a nazvěme je **ohnisky** elipsy, oněmi pevnými body, o nichž se mluví v ohniskové definici; vzdálenější body označme A, B a nechť pro jejich vzdálenost platí $|AB| = 2a$; pak je $|F_1A| + |F_2A| = |F_1A| + |F_1B| = 2a$, a podle definice je bod A bodem elipsy e; totéž lze ukázat pro bod B a body A, B se nazývají **hlavní vrcholy** elipsy (elipsa v nich má největší křivost); přímka $o_1 = AB = F_1F_2$ je **hlavní osa** elipsy a bod S je její **střed** (elipsa je podle něj středově souměrná)



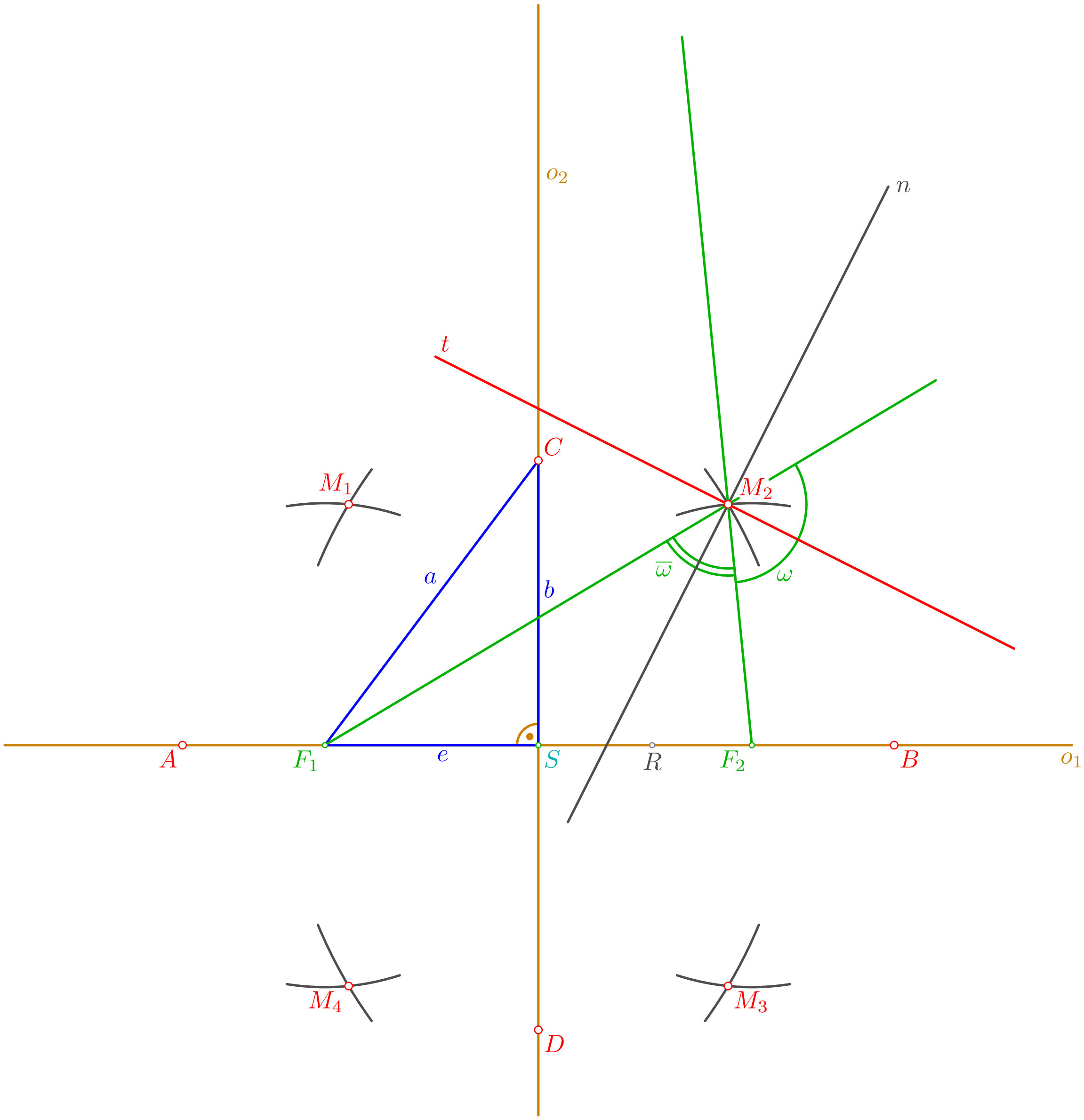
- sestrojme další **obecné body** elipsy: na úsečce F_1F_2 zvolme pomocný bod R, vezměme do kružítka poloměr délky $|AR|$ a opišme čtyři oblouky kružnic kolem ohnisek F_1, F_2; změňme poloměr na délku $|RB|$ a proveďme totéž – kolem ohnisek protněme předchozí čtyři oblouky; získáme tak čtyři body M_1, M_2, M_3, M_4, kde např. pro M_2 platí $|F_1M_2|+$ $+|F_2M_2| = |AR|+|RB| = 2a$ (analogicky pro M_1, M_3, M_4); podle ohniskové definice tak snadno můžeme jinou volbou bodu R konstruovat další a další body elipsy e; zvolíme-li bod R v některém z ohnisek, dostaneme tímto způsobem hlavní vrcholy A, B; při volbě bodu R (na hlavní ose o_1) mimo úsečku F_1F_2 se příslušné kruhové oblouky neprotnou a nezískáme tak žádné další body elipsy



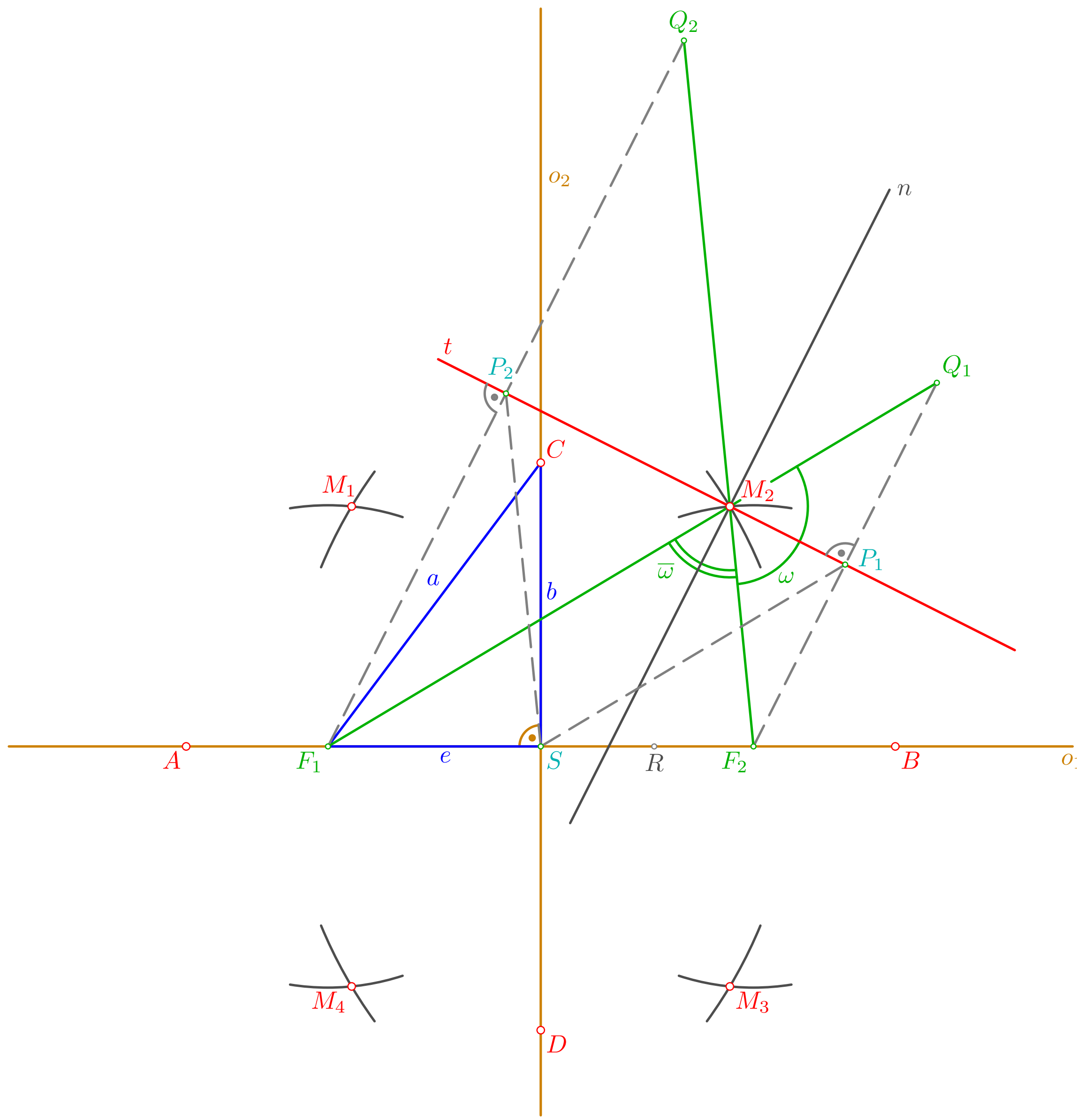
- provedeme-li předchozí konstrukci pro $R = S$, získáme pouze dva body – **vedlejší vrcholy** C, D elipsy, které leží na **vedlejší ose** $o_2 \perp o_1, S \in o_2$; délka $a = |SA|$ se nazývá **délka hlavní poloosy** a objevuje se také jako délka přepony F_1C v tzv. **charakteristickém trojúhelníku** F_1SC elipsy; délka jeho odvěsny SC se nazývá **délka vedlejší poloosy** $b = |SC|$ a délka odvěsny F_1S udává tzv. **excentricitu** (výstřednost) $e = |F_1S|$ elipsy (pro $e \to 0$ se elipsa blíží kružnici, naopak pro $e \to a$ se elipsa blíží k úsečce); z pravoúhlého trojúhelníka F_1SC a Pythagorovy věty vyplývá vztah mezi délkami poloos a excentricitou elipsy: $a^2 = e^2 + b^2$



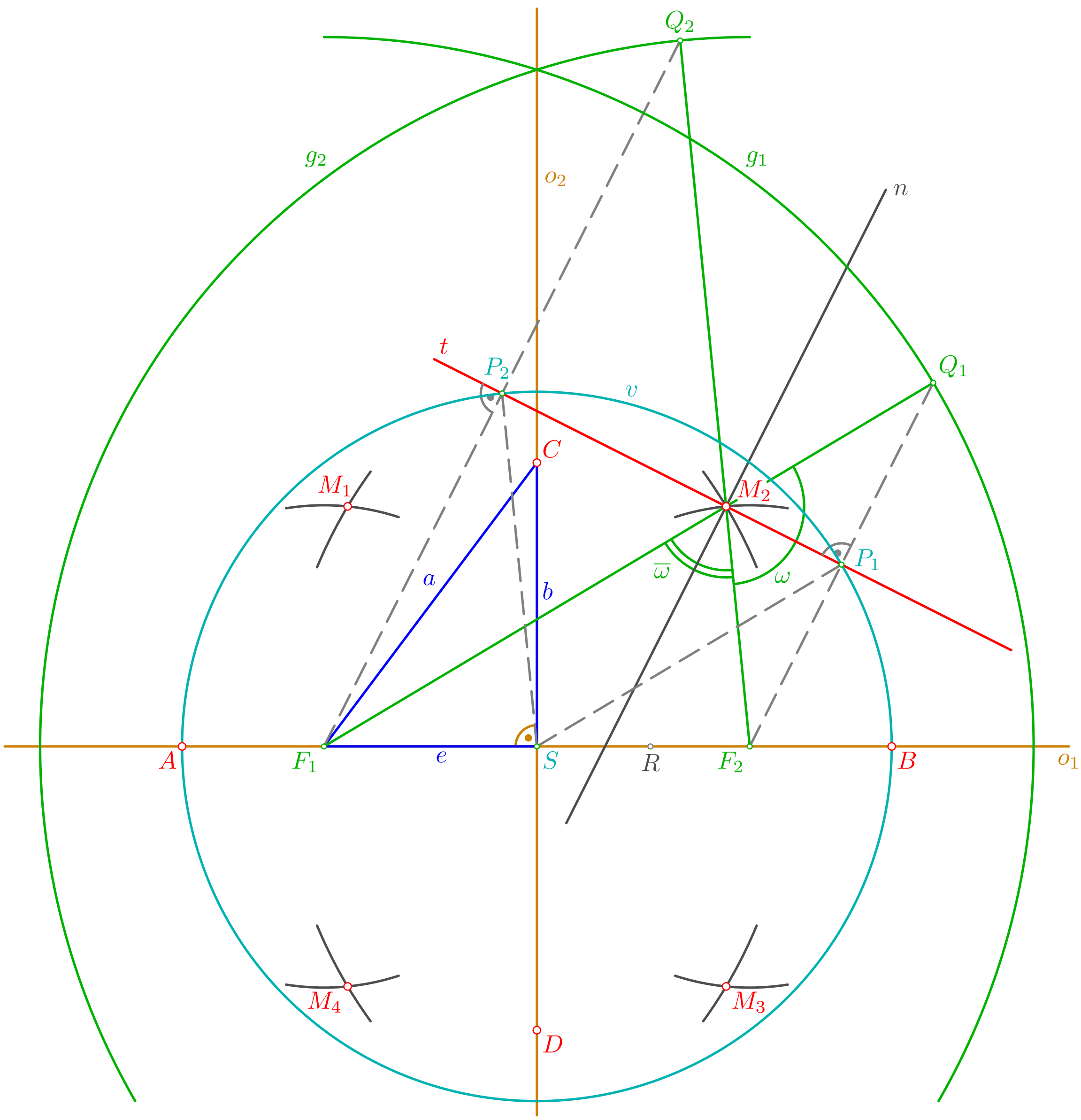
- pro další konstrukce vyberme např. bod M_2 a sestrojme přímky F_1M_2, F_2M_2, což jsou tzv. **průvodiče bodu** M_2; ty rozdělí rovinu na čtyři úhly, vždy dva protější vrcholové shodné; úhel, v němž leží střed S (nebo úhel k němu vrcholový) označme $\bar{\omega}$ a nazvěme ho **vnitřní úhel průvodičů** bodu M_2; některý z úhlů vedlejších k úhlu $\bar{\omega}$ označme ω a říkejme mu **vnější úhel průvodičů** bodu M_2



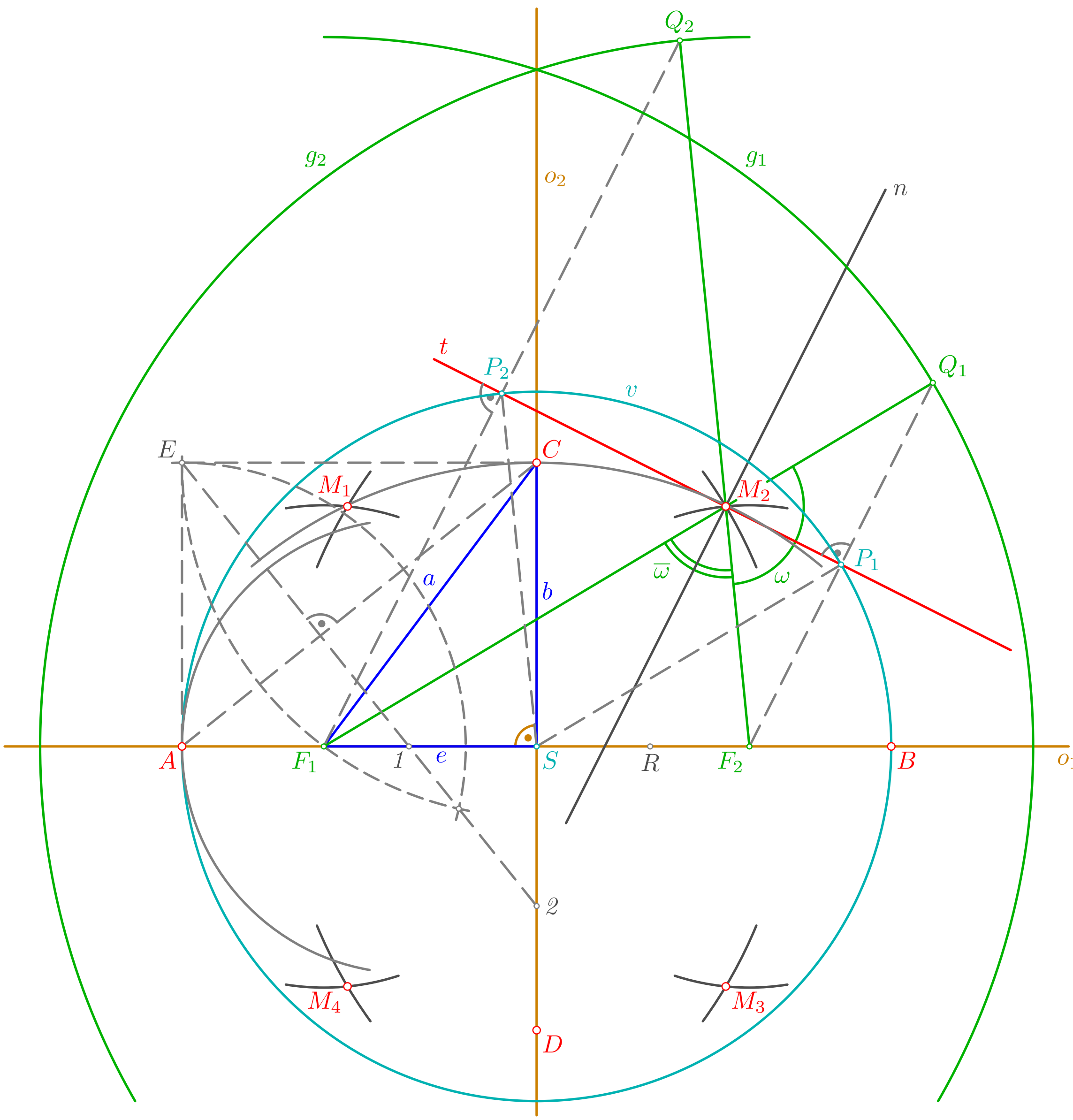
- dá se dokázat, že osa t vnějšího úhlu ω průvodičů bodu M_2 je současně **tečnou** elipsy v bodě M_2; přímka $n \perp t$ je pak **normálou** elipsy v bodě M_2 a současně osou vnitřního úhlu $\bar{\omega}$ průvodičů bodu M_2; to platí v každém bodě elipsy a toto tvrzení je shrnuto v dále uvedené Větě 1



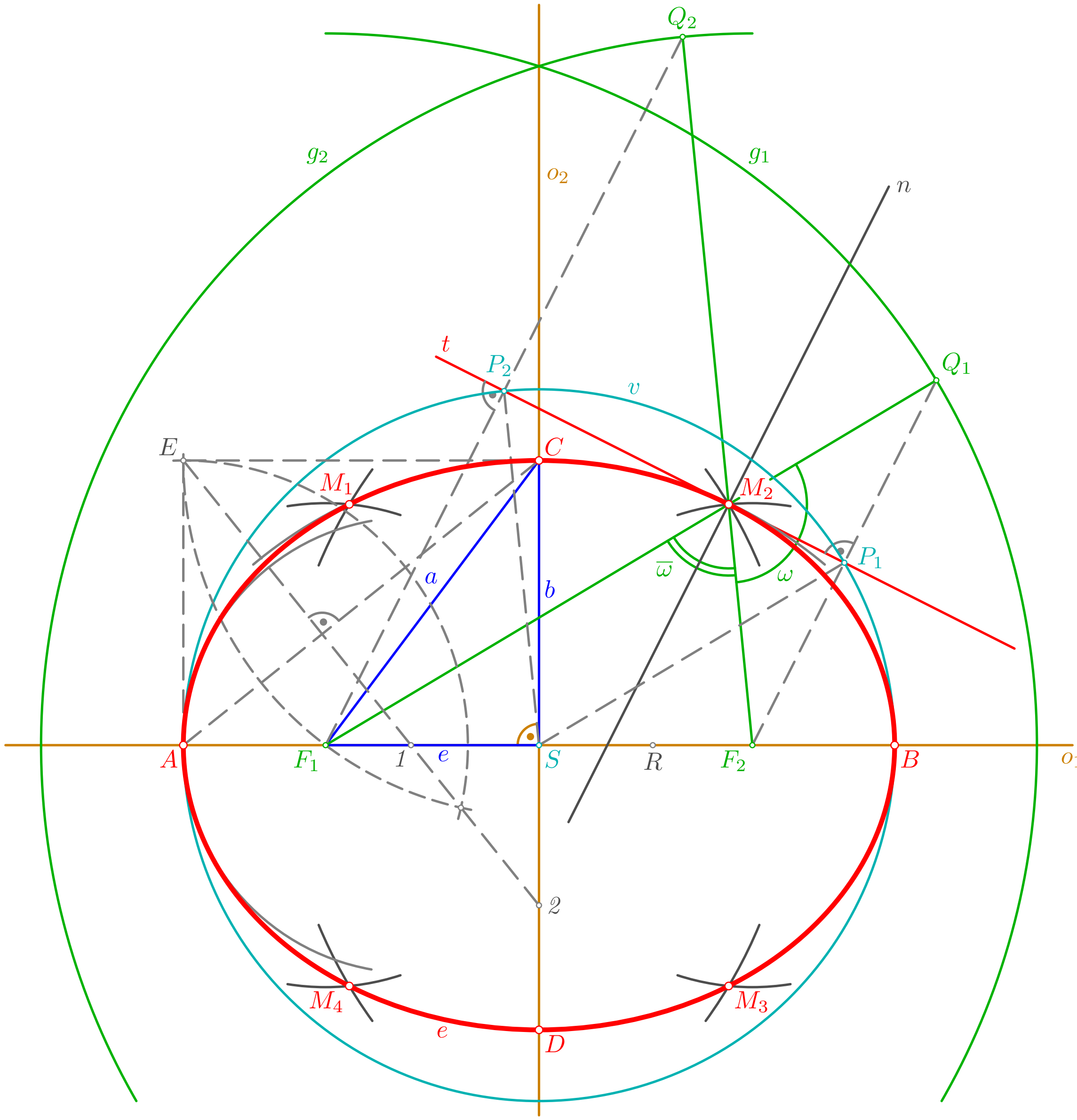
- na základě předchozího odvoďme další vlastnosti elipsy: sestrojme body Q_1, Q_2 souměrně sdružené s ohnisky F_2, F_1 podle tečny t a označme příslušné paty P_1, P_2 kolmic Q_1F_2, Q_2F_1 spuštěných z ohnisek F_2, F_1 na tečnu t (tj. středy úseček Q_1F_2, Q_2F_1); z osové souměrnosti průvodičů bodu M_2 podle tečny t plyne, že bod Q_1 leží na přímce F_1M_2 a bod Q_2 padne na průvodič F_2M_2



- díky osové souměrnosti je $|M_2Q_1| = |M_2F_2|$, a tudíž platí $|F_1Q_1| = |F_1M_2| + |M_2Q_1| = = |F_1M_2|+|M_2F_2| = 2a$; totéž lze ukázat v každém bodě elipsy, a všechny body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle tečen elipsy tedy leží na tzv. **řídicí kružnici** $g_1(F_1, 2a)$; analogicky dostaneme $|F_2Q_2| = 2a$ a můžeme sestrojit druhou řídicí kružnici $g_2(F_2, 2a)$, na níž leží všechny body souměrně sdružené s ohniskem F_1 podle tečen elipsy (viz Věta 2); úsečky SP_1, SP_2 jsou po řadě střední příčky trojúhelníků $F_1F_2Q_1, F_1F_2Q_2$ a pro jejich délky tedy platí: $|SP_1| = \frac{|F_1Q_1|}{2} = a = \frac{|F_2Q_2|}{2} = |SP_2|$; obecně shrnuto, paty kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny leží na tzv. **vrcholové kružnici** $v(S, a)$ (viz Věta 3)



- pro jednodušší a pěknější vyrýsování elipsy sestrojme v jejích vrcholech oblouky tzv. **hyperoskulačních kružnic**: trojúhelník ASC doplňme na obdélník $ASCE$, vrcholem E veďme kolmici k úhlopříčce AC a určeme její průsečíky *1,2* s hlavní a vedlejší osou elipsy; bod *1*, resp. *2*, je pak středem oblouku hyperoskulační kružnice ve vrcholu A, resp. ve vrcholu C (oblouky ve vrcholech B, D doplníme souměrně podle středu S, konstrukce není v obrázku provedena); tyto oblouky přibližně nahrazují průběh elipsy v blízkém okolí vrcholů a jejich konstrukce výrazně přispěje k vytažení souměrné křivky (a ne nějaké „brambory“); alternativní způsob konstrukce bodů *1,2* je popsán v následujícím kroku



□

- body *1,2* je možné sestrojit také takto: kolem vedlejšího vrcholu C opišme oblouk kružnice o poloměru $a = |SA|$ (prochází oběma ohnisky) a protněme jej obloukem kružnice o poloměru $b = |SC|$ opsaným kolem hlavního vrcholu A; přímka, která spojuje průsečíky sestrojených oblouků (jedním z nich je bod E), je pak kolmice k přímce AC (kterou při použití tohoto způsobu není potřeba sestrojovat) a ta protíná hlavní a vedlejší osu elipsy v bodech *1,2*; na závěr je vytažena elipsa e, což lze provést od ruky, nebo pomocí vhodného křivítka, anebo užitím tzv. **zahradnické konstrukce**: dva konce provázku délky $|AB| = 2a$ se upevní do ohnisek a pohybující se hrot tužky, který napíná provázek, opisuje elipsu…

Věta 1

Tečna (normála) v bodě elipsy půlí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů.

Věta 2

Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen je řídicí kružnice elipsy o středu ve druhém ohnisku a poloměru $2a$.

Věta 3

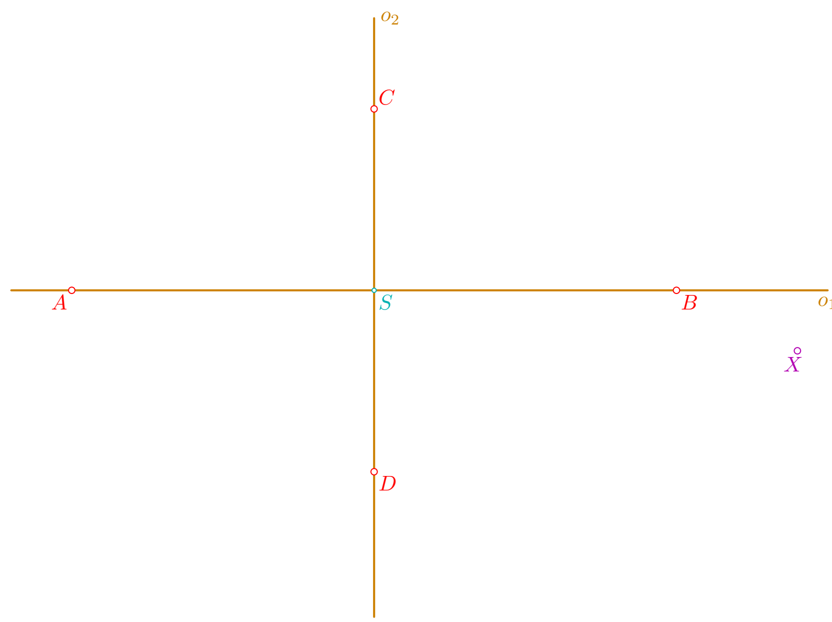
Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je vrcholová kružnice elipsy.

Řešené úlohy

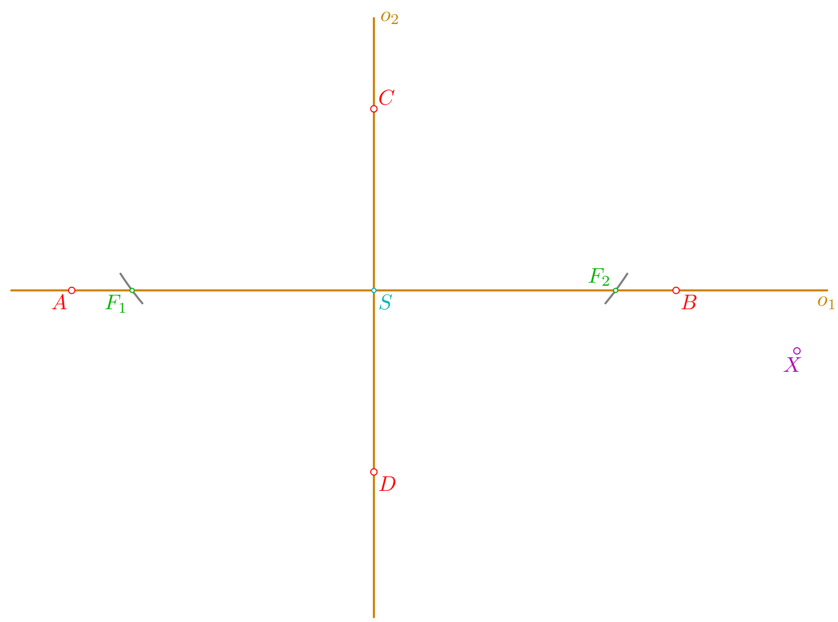
Tečny k elipse daným bodem

Příklad: Bodem X veďte tečny k nenarýsované elipse e, která je dána hlavními a vedlejšími vrcholy.

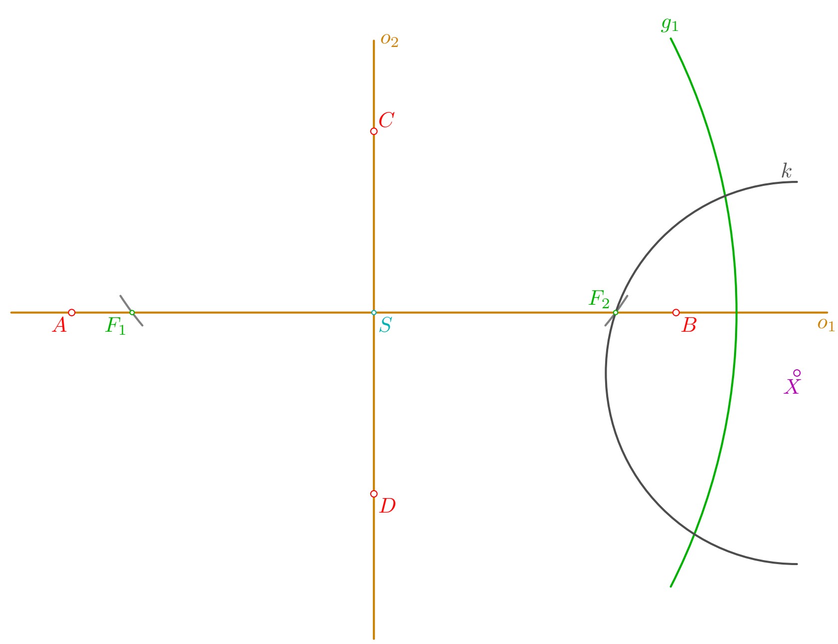
- zvolme střed S, vodorovně hlavní osu o_1, na ní hlavní vrcholy A, B, svisle vedlejší osu $o_2 \perp o_1$ a na ní vedlejší vrcholy C, D; rovněž zvolme bod X, z něhož pomocí výše uvedených vět povedeme tečny k zadané elipse



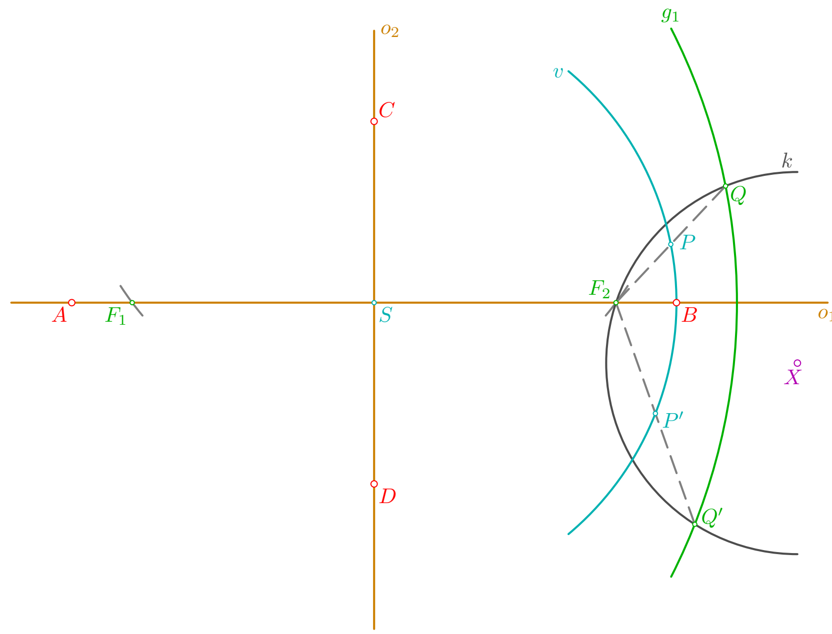
- nejprve doplňme ohniska F_1, F_2 elipsy: ta leží na hlavní ose o_1 a na kružnici o poloměru $a = |SA|$ opsané kolem vedlejšího vrcholu C, tj. platí $|F_1C| = |F_2C| = a$



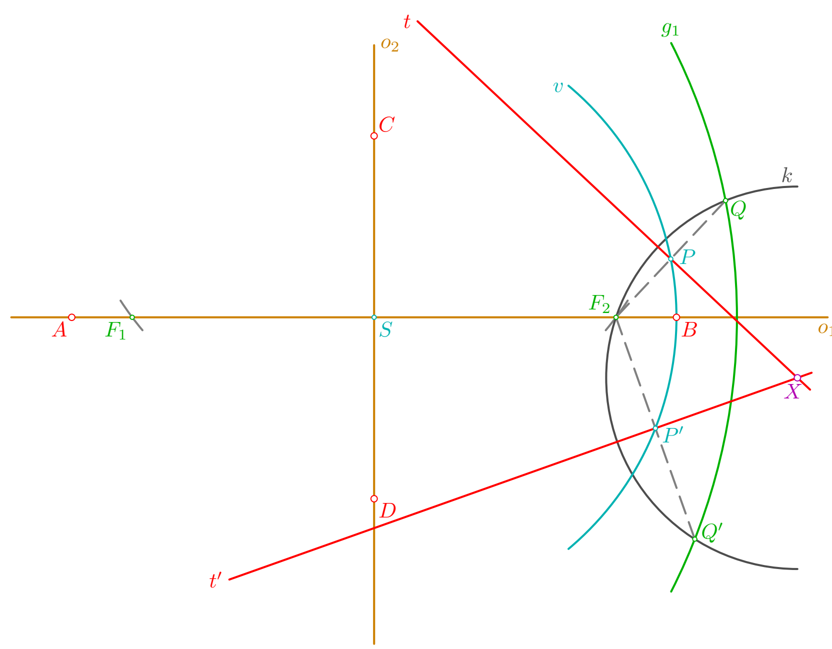
- podle Věty 2 leží body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle hledaných tečen na řídicí kružnici $g_1(F_1, 2a = |AB|)$; současně musí mít od bodu X vzdálenost $|F_2X|$, a musí tedy ležet také na kružnici $k(X, |F_2X|)$



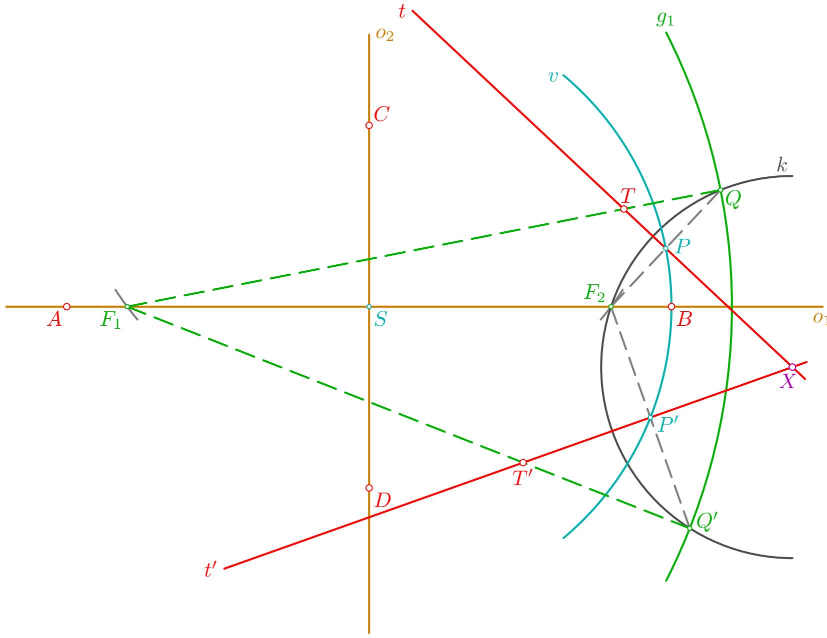
- kružnice g_1, k se protínají v bodech Q, Q'; středy P, P' úseček F_2Q, F_2Q' jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F_2 na hledané tečny a podle Věty 3 leží také na vrcholové kružnici $v(S, a)$



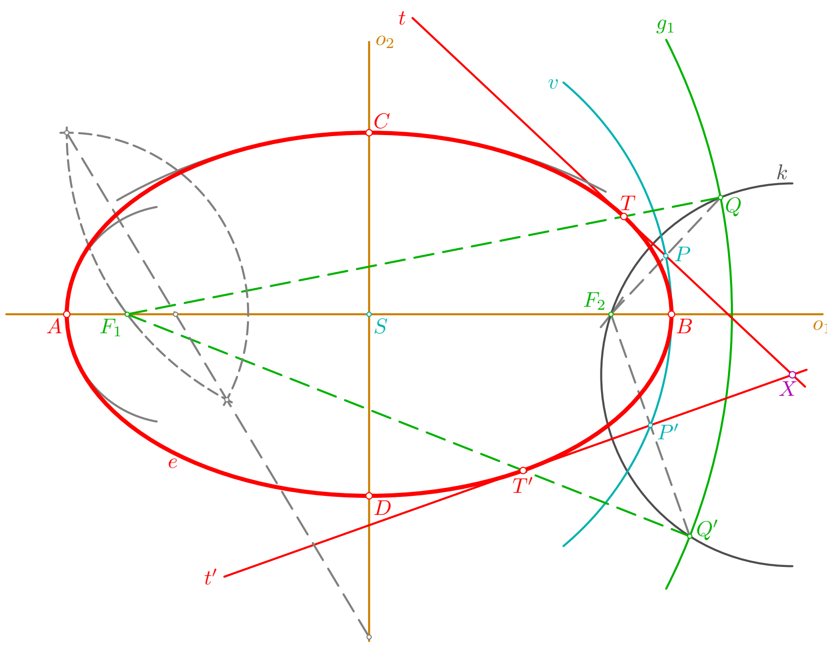
- nyní již můžeme sestrojit tečny $t = XP, t' = XP'$, pro které platí: $t \perp F_2Q, t' \perp F_2Q'$



- pro body T, T' dotyku tečen t, t' s elipsou platí: $T = t \cap F_1Q$, $T' = t' \cap F_1Q'$; přímka F_1Q, resp. přímka F_1Q', je vlastně jedním z průvodičů bodu T, resp. bodu T'



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat elipsu e, která se v bodech T, T' dotýká tečen t, t' vedených z daného bodu X



□

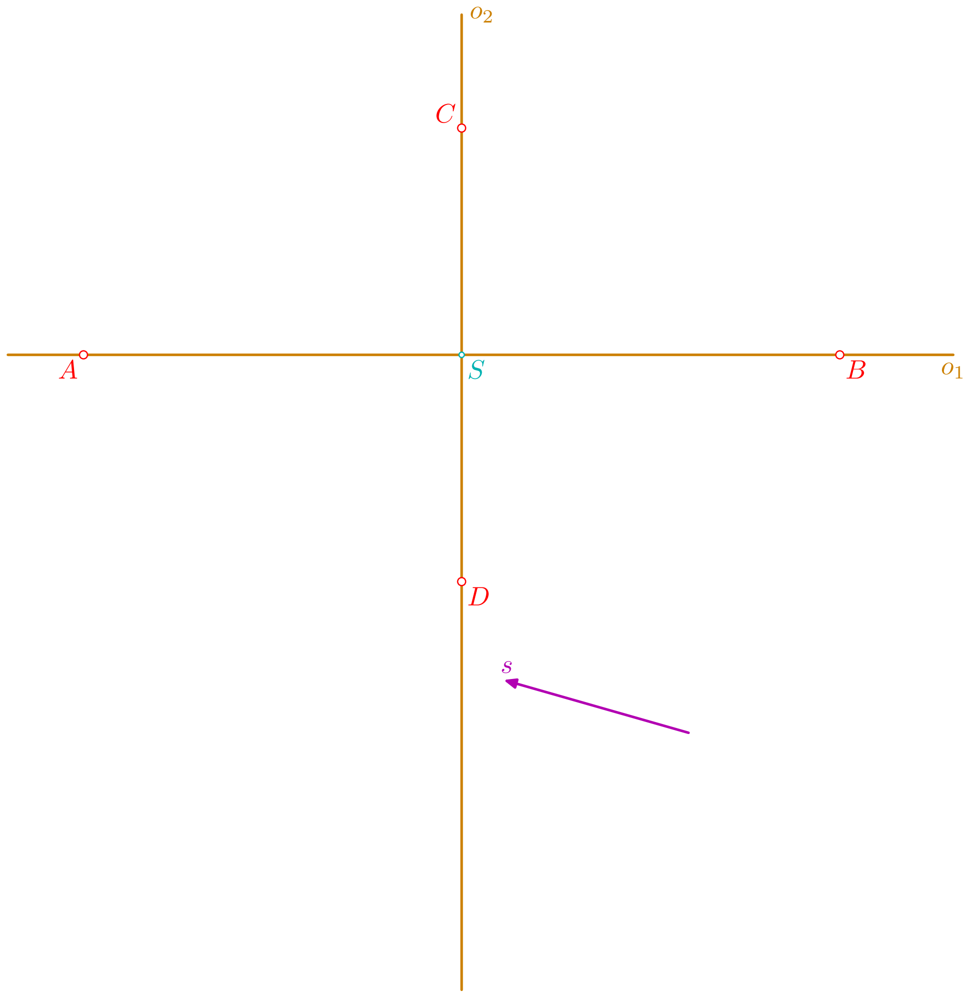
Alternativní způsob řešení: vystačíme pouze s vlastnostmi Věty 3, tj. s nalezením pat P, P' kolmic spuštěných z ohniska F_2 na hledané tečny; body P, P' musí ležet na vrcholové kružnici $v(S, a)$ a současně na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem F_2X; pro body T, T' dotyku pak platí: $T \in t, F_1T \parallel SP$ a $T' \in t', F_1T' \parallel SP'$; roli obou ohnisek lze také prohodit, záleží na konkrétním zadání a velikosti nákresny; zkuste si jako cvičení...

Diskuze: pokud se kružnice $g_1(F_1, 2a), k(X, |XF_2|)$ (případně $g_2(F_2, 2a), k(X, |XF_1|)$) protínají ve dvou bodech, resp. se dotýkají v jednom bodě, resp. nemají žádný společný bod, pak bod X leží ve vnější oblasti elipsy e, resp. bod X je bodem elipsy e, resp. bod X leží ve vnitřní oblasti elipsy e, a lze jím vést dvě různé tečny, resp. jedinou (dvojnásobnou) tečnu, resp. jím nelze vést žádnou tečnu k dané elipse e. Při alternativním způsobu řešení rozhoduje o počtu tečen vzájemná poloha vrcholové kružnice $v(S, a)$ a Thaletovy kružnice nad průměrem F_2X nebo F_1X.

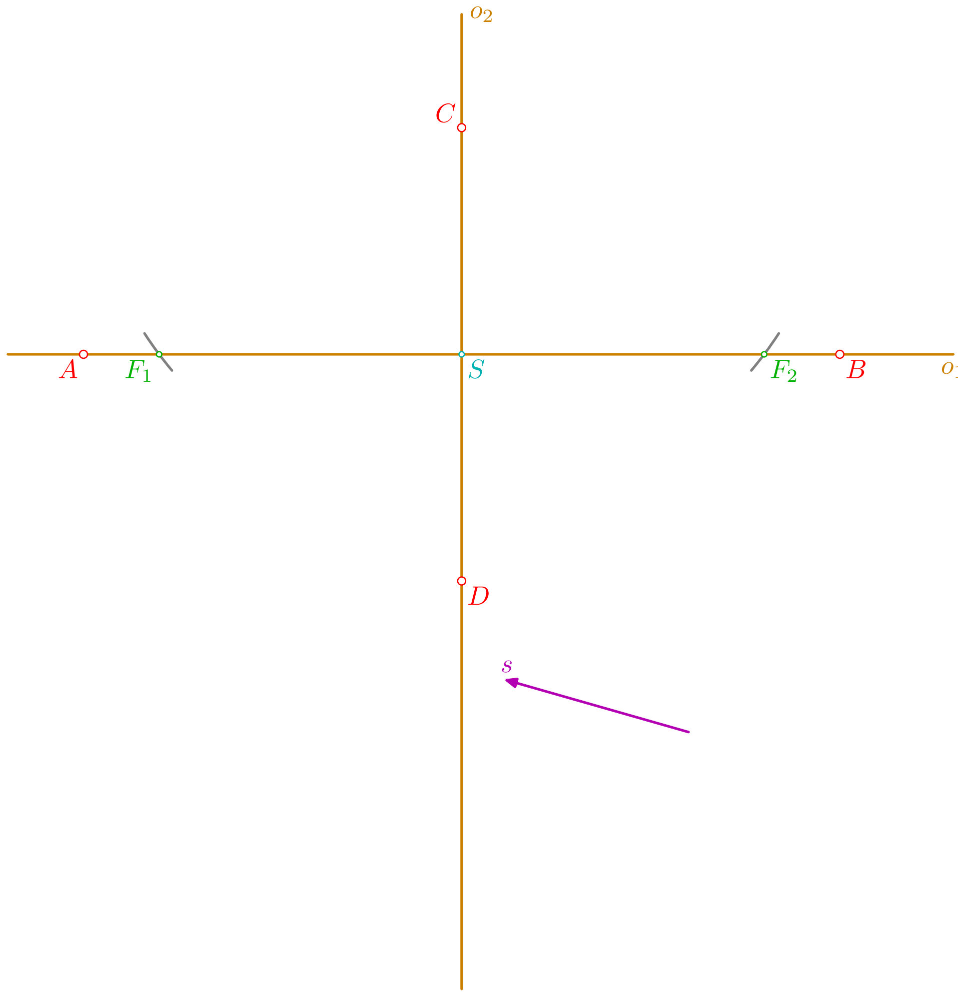
Tečny k elipse daného směru

Příklad: K nenarýsované elipse e, která je dána hlavními a vedlejšími vrcholy, veďte tečny směru s (tj. rovnoběžné s přímkou s).

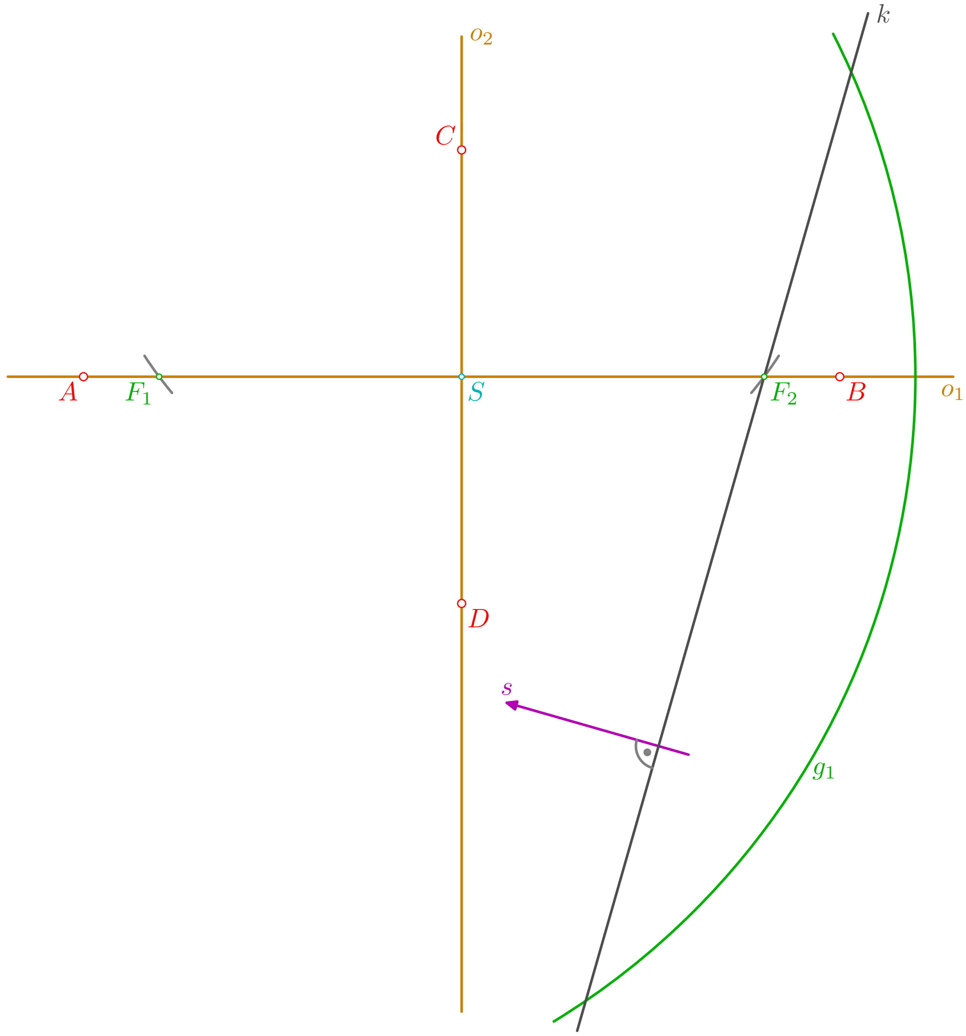
- zvolme střed S, vodorovně hlavní osu o_1, na ní hlavní vrcholy A, B, svisle vedlejší osu $o_2 \perp o_1$ a na ní vedlejší vrcholy C, D; rovněž zvolme směr s, s nímž mají být hledané tečny rovnoběžné



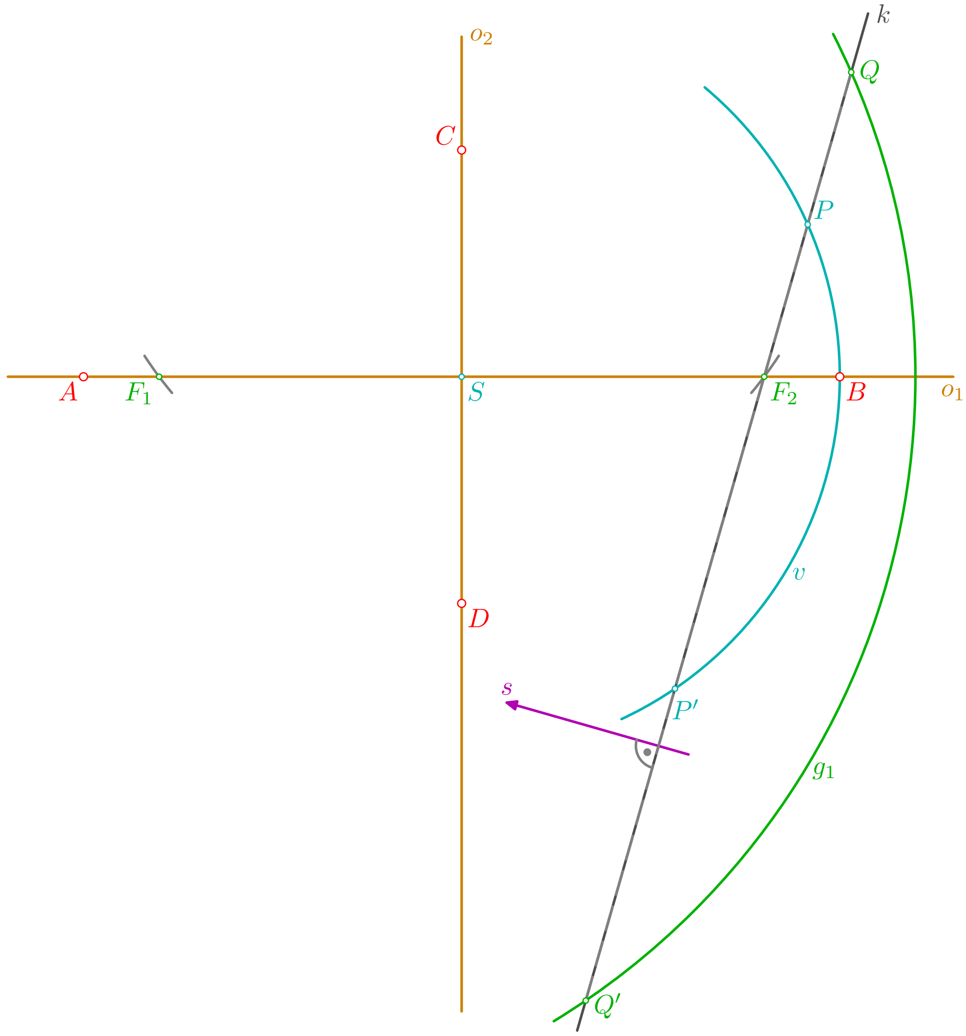
- nejprve doplňme ohniska F_1, F_2 elipsy: ta leží na hlavní ose o_1 a na kružnici o poloměru $a = |SA|$ opsané kolem vedlejšího vrcholu C, tj. platí $|F_1C| = |F_2C| = a$



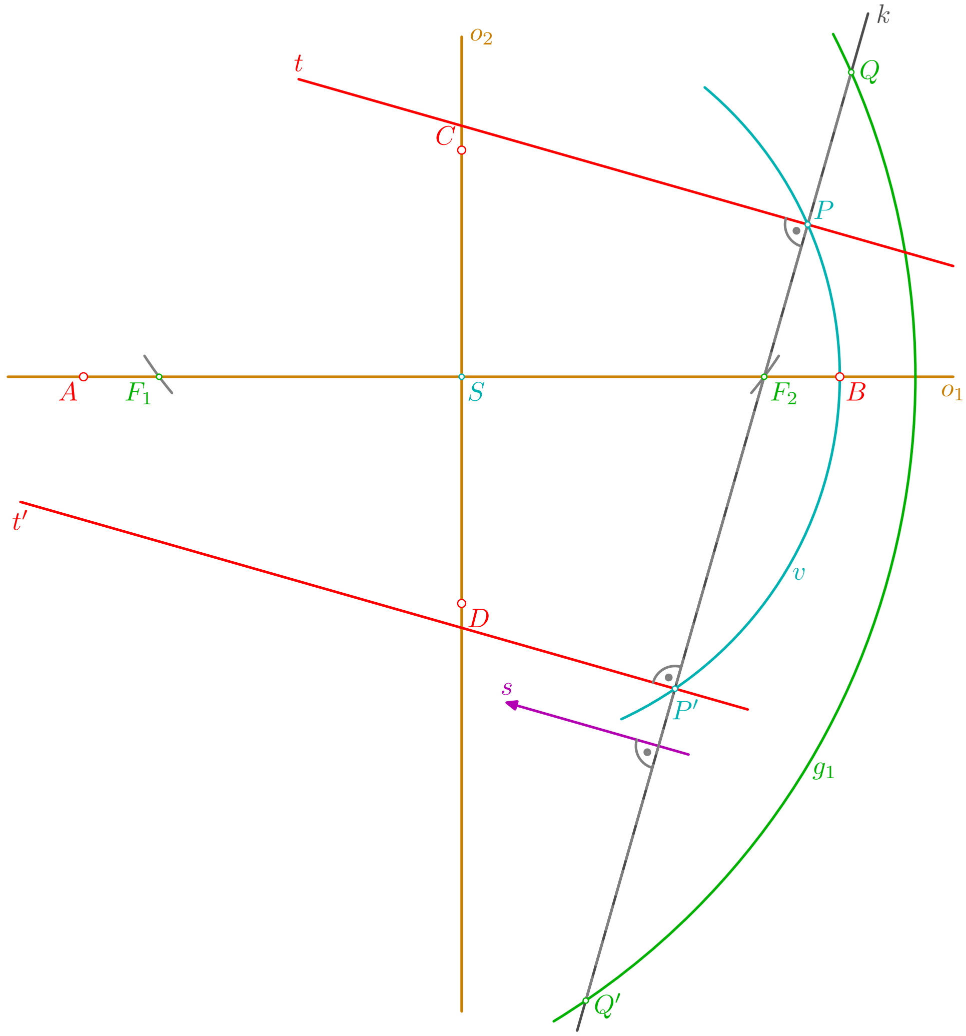
- podle Věty 2 leží body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle hledaných tečen na řídicí kružnici $g_1(F_1, 2a = |AB|)$; současně musí ležet na kolmici k vedené ohniskem F_2 kolmo k danému směru s; alternativně bychom mohli hledat body souměrně sdružené s ohniskem F_1, které musí ležet na řídicí kružnici $g_2(F_2, 2a)$ a na přímce vedené tímto ohniskem kolmo ke směru s



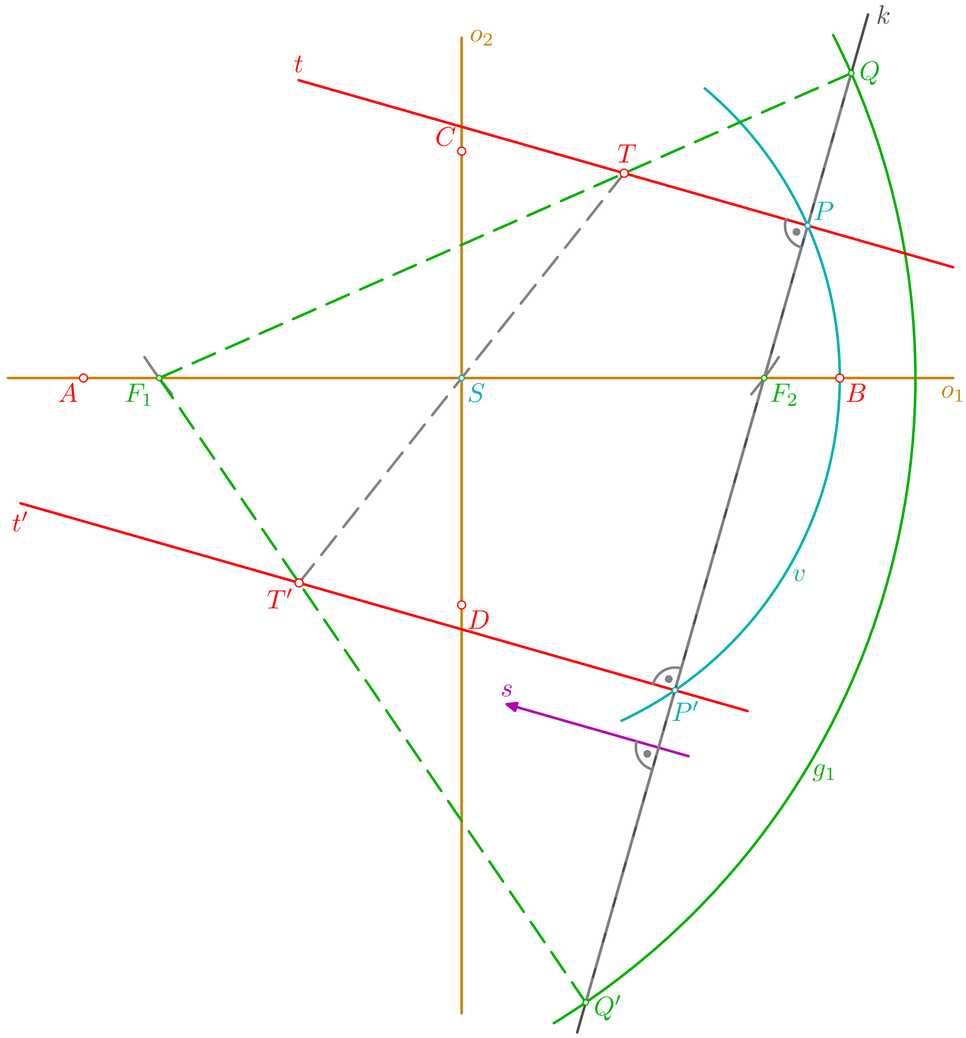
- přímka k protíná kružnici g_1 v bodech Q, Q'; středy P, P' úseček F_2Q, F_2Q' jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F_2 na hledané tečny a podle Věty 3 leží také na vrcholové kružnici $v(S, a)$; při řešení této úlohy bychom vystačily pouze s Větou 3 a tedy s body $P, P' = k \cap v$; to v případě, že některý z bodů Q, Q' vychází mimo nákresnu; my zde ovšem chceme demonstrovat také užití vlastností Věty 2



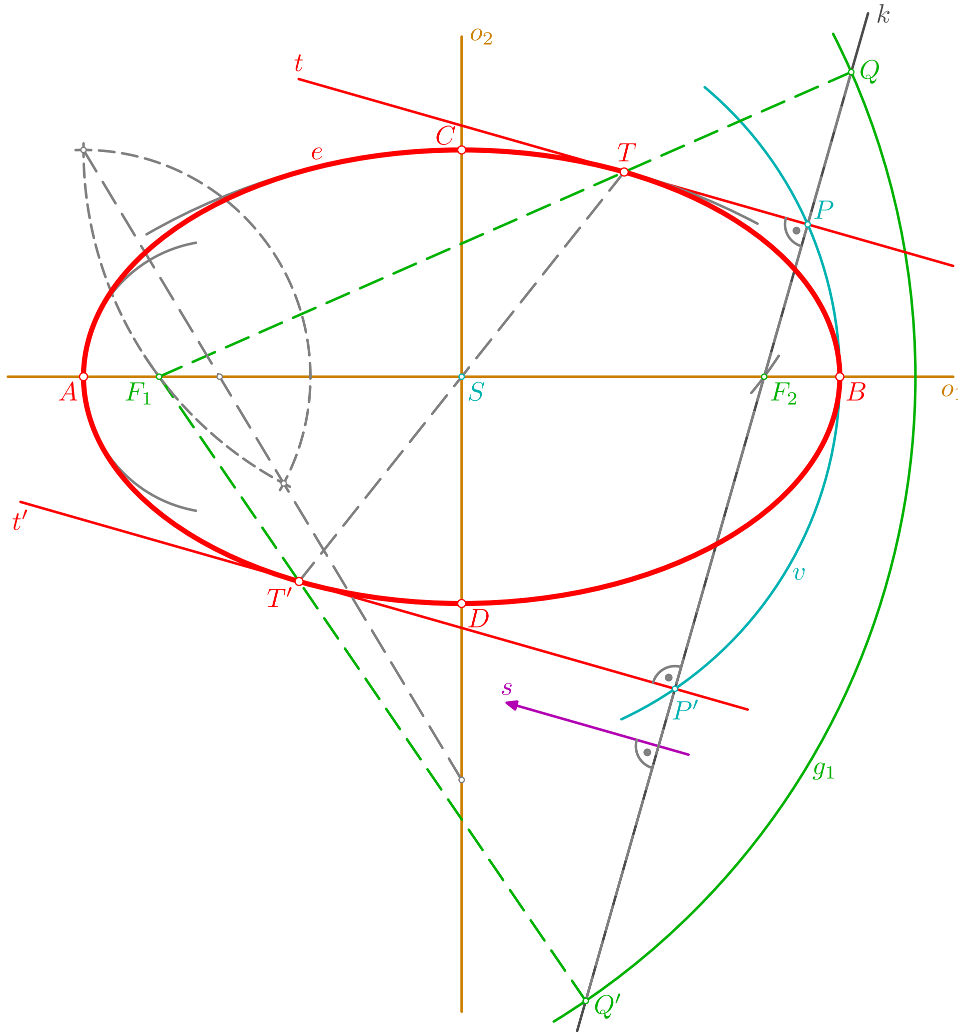
- nyní již můžeme sestrojit tečny t, t', kde $t \parallel t' \parallel s$ (tj. $t \perp k, t' \perp k$) a $P \in t, P' \in t'$; zvídavý čtenář si může do obrázku dokreslit alternativní variantu řešení: paty kolmice vedené ohniskem F_1 kolmo ke směru s padnou na sestrojené tečny t, t' a současně na vrcholovou kružnici $v(S, a)$



- pro body T, T' dotyku tečen t, t' s elipsou platí: $T = t \cap F_1Q$, $T' = t' \cap F_1Q'$; přímka F_1Q, resp. přímka F_1Q', je vlastně jedním z průvodičů bodu T, resp. bodu T'; současně platí $F_1T \parallel SP, F_1T \parallel SP'$ a navíc jsou tečny $t \parallel t'$ středově souměrné podle středu S elipsy, z čehož vyplývá $S \in TT'$; v této úloze je tedy možné sestrojit pouze jedno řešení na základě ohniskových vlastností a druhé lze snadno doplnit pomocí středové souměrnosti; konstrukce vztahující se k užití alternativního řešení pomocí druhého ohniska jsou přenechány čtenáři jako cvičení...



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat elipsu e, která se v bodech T, T' dotýká tečen t, t' rovnoběžných s daným směrem s



□

Diskuze: Řídicí kružnice $g_1(F_1, 2a)$ a přímka k, vedená ohniskem F_2 kolmo k libovolně danému směru s, se vždy protínají právě ve dvou bodech, a úloha má tudíž vždy právě dvě řešení souměrná podle středu S elipsy e; k témuž závěru lze dojít při užití alternativních způsobů řešení – tj. pomocí druhé řídicí kružnice g_2, nebo pomocí vrcholové kružnice v.