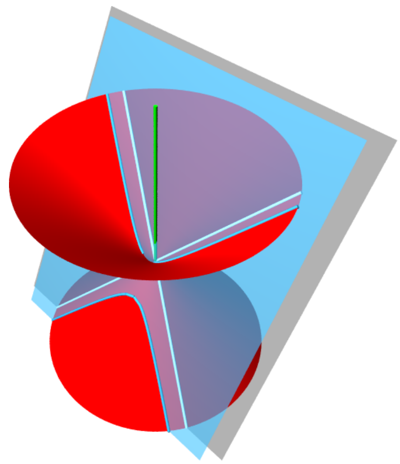
Hyperbola

Výklad



Definice a ohniskové vlastnosti

- *prostorová definice (viz obrázek nahoře):* **hyperbola** je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řezná rovina má takovou polohu, že rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem protíná kuželovou plochu ve dvou různoběžných přímkách (nebo jinak: odchylka roviny řezu od osy je menší než odchylka povrchových přímek)

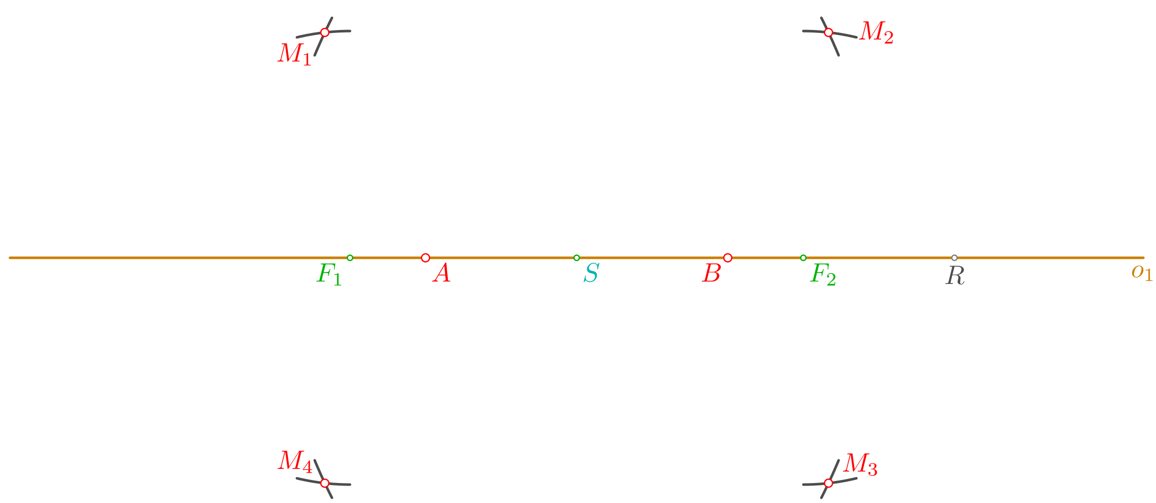
- *ohnisková definice:* **hyperbola** h je množinou všech bodů v dané rovině ρ, pro něž je absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou různých pevných bodů F_1, F_2 rovna danému číslu $2a$, které je menší než vzdálenost bodů F_1, F_2; symbolicky zapsáno:

$$h = \{X \in \rho; ||F_1X| - |F_2X|| = 2a, 0 < 2a < |F_1F_2|\}$$

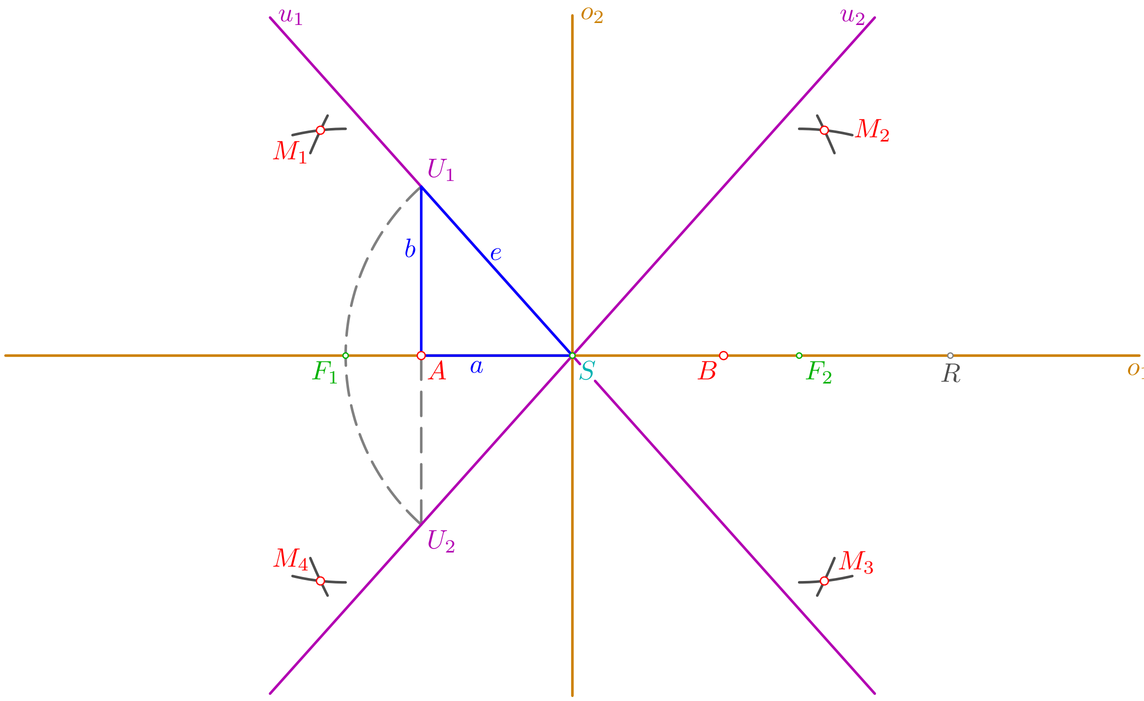
Konstrukce a základní pojmy

- na vodorovné přímce o_1 zvolme bod S a od něj na obě strany souměrně nanesme dvě libovolně zvolené vzdálenosti; vzdálenější body označme F_1, F_2 a nazvěme je **ohnisky** hyperboly, oněmi pevnými body, o nichž se mluví v ohniskové definici; bližší body označme A, B a nechť pro jejich vzdálenost platí $|AB| = 2a$; pak je $||F_1A| - |F_2A|| = = ||F_1A| - |F_1B|| = 2a$, a podle definice je bod A bodem hyperboly h; totéž lze ukázat pro bod B a body A, B se nazývají **vrcholy** (někdy se používá i přívlastek *hlavní*) hyperboly (hyperbola v nich má největší křivost); přímka $o_1 = AB = F_1F_2$ je **hlavní osa** hyperboly a bod S je její **střed** (hyperbola je podle něj středově souměrná)

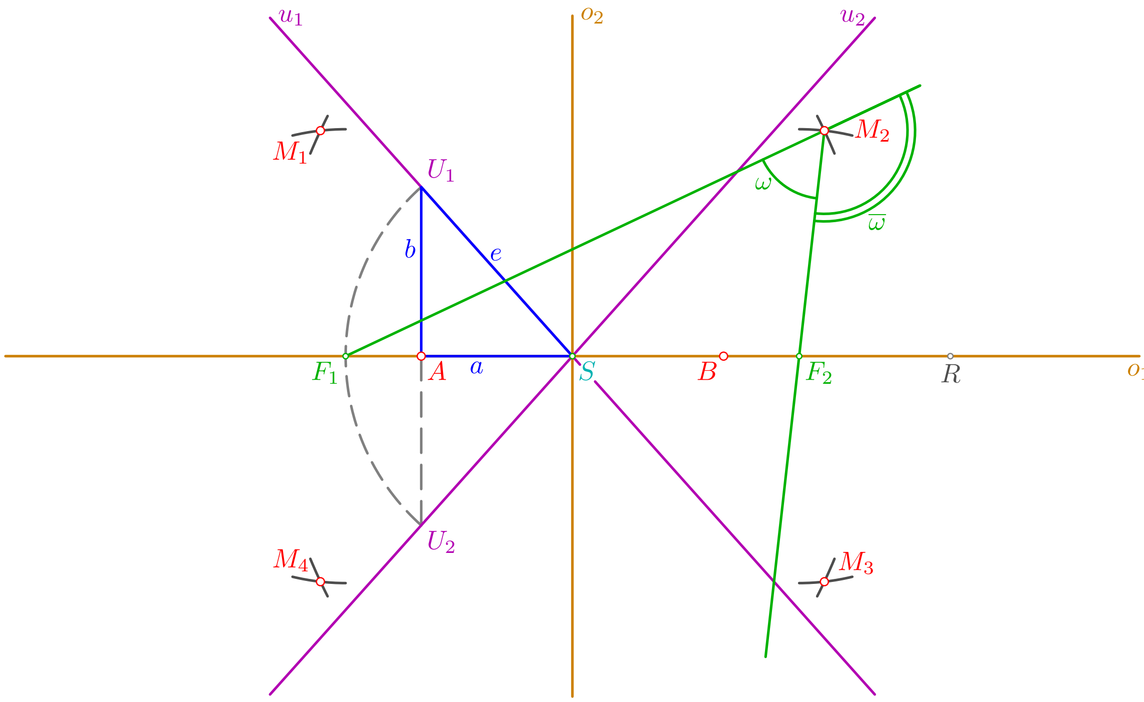
- sestrojme další **obecné body** hyperboly: na hlavní ose o_1 mimo úsečku F_1F_2 zvolme pomocný bod R, vezměme do kružítka poloměr délky $|AR|$ a opišme čtyři oblouky kružnic kolem ohnisek F_1, F_2; změňme poloměr na délku $|BR|$ a proveďme totéž – kolem ohnisek protněme předchozí čtyři oblouky; získáme tak čtyři body M_1, M_2, M_3, M_4, kde např. pro M_2 platí $||F_1M_2| - |F_2M_2|| = ||AR| - |BR|| = |AB| = 2a$ (analogicky pro M_1, M_3, M_4); podle ohniskové definice tak snadno můžeme jinou volbou bodu R konstruovat další a další body hyperboly h; zvolíme-li bod R v některém z ohnisek, dostaneme tímto způsobem vrcholy A, B; při volbě bodu R uvnitř úsečky F_1F_2 se příslušné kruhové oblouky neprotnou a nezískáme tak žádné další body hyperboly



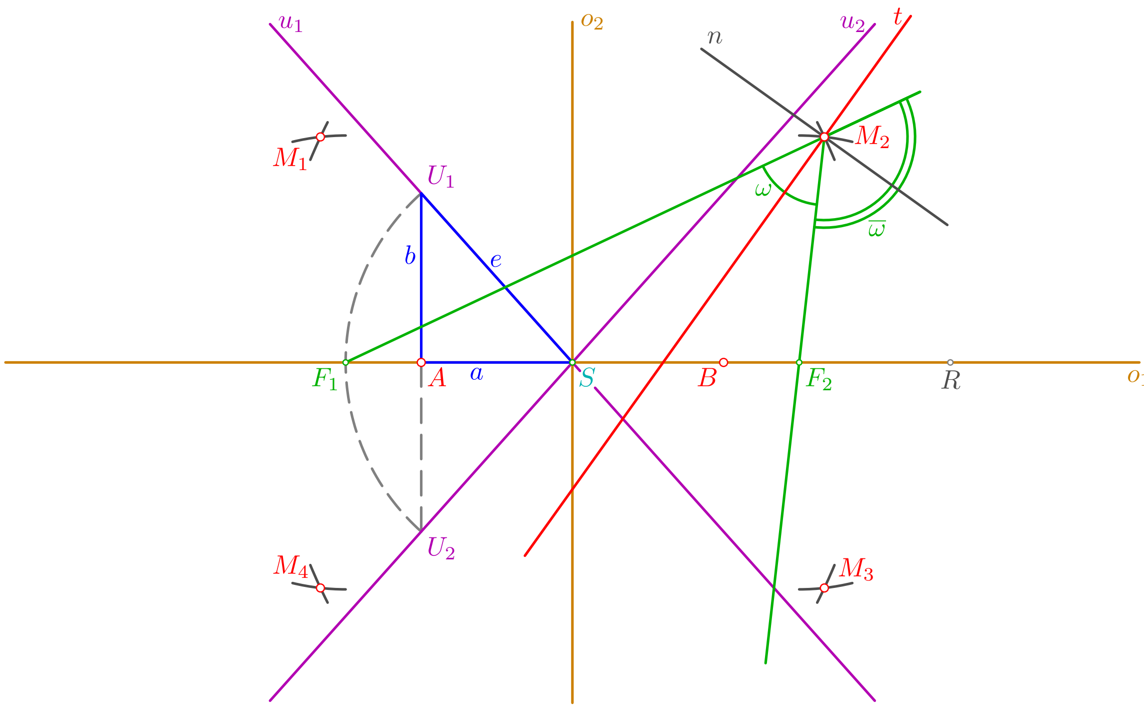
- vrcholem A vztyčme kolmici na hlavní osu o_1 a sestrojme její průsečíky U_1, U_2 s kružnicí, která má střed v bodě S a poloměr $|SF_1|$; přímky $u_1 = SU_1, u_2 = SU_2$ jsou pak tzv. **asymptoty** hyperboly – tečny, které se jí dotýkají v nekonečnu; hyperbola je osově souměrná také podle **vedlejší osy** $o_2 \perp o_1, S \in o_2$; délka $a = |SA|$ se nazývá **délka hlavní poloosy**, délka úsečky AU_1 se nazývá **délka vedlejší poloosy** $b = |AU_1|$ a délka úsečky F_1S udává tzv. **excentricitu** (výstřednost) $e = |F_1S| = |SU_1|$ hyperboly; z charakteristického pravoúhlého trojúhelníka ASU_1 a Pythagorovy věty vyplývá vztah mezi délkami poloos a excentricitou hyperboly: $a^2 = e^2 - b^2$



- pro další konstrukce vyberme např. bod M_2 a sestrojme přímky F_1M_2, F_2M_2, což jsou tzv. **průvodiče bodu** M_2; ty rozdělí rovinu na čtyři úhly, vždy dva protější vrcholové shodné; úhel, v němž leží střed S (nebo úhel k němu vrcholový) označme ω a nazvěme ho **vnější úhel průvodičů** bodu M_2; některý z úhlů vedlejších k úhlu ω označme $\bar{\omega}$ a říkejme mu **vnitřní úhel průvodičů** bodu M_2

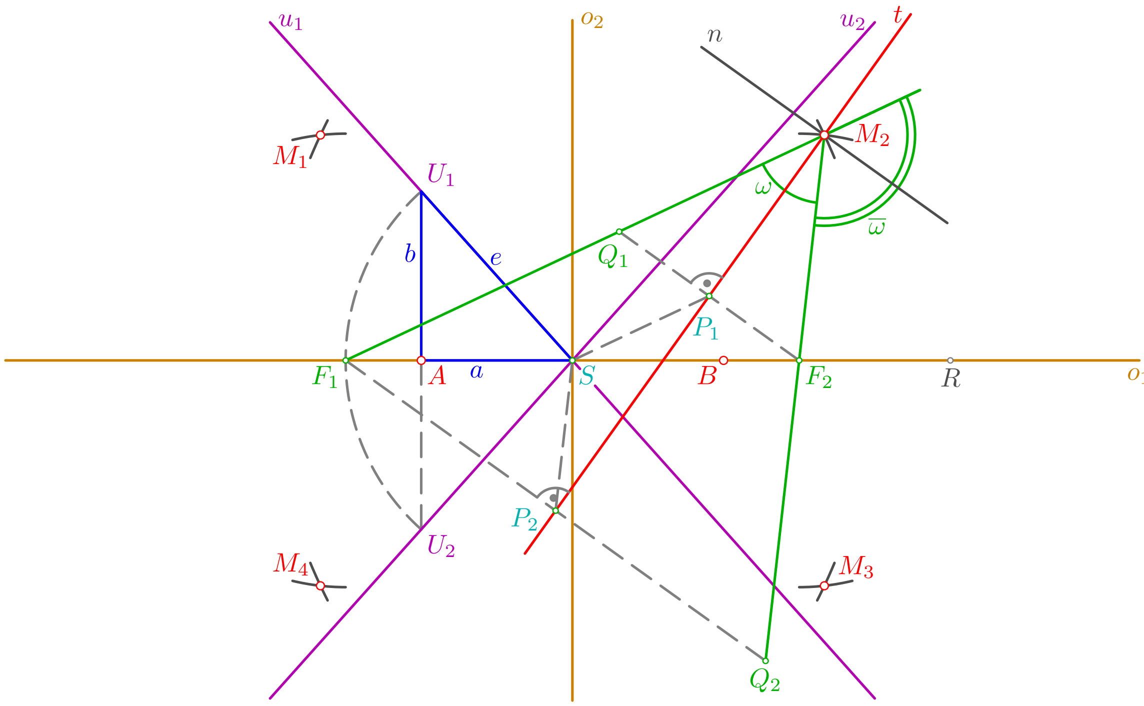


- dá se dokázat, že osa t vnějšího úhlu ω průvodičů bodu M_2 je současně **tečnou** hyperboly v bodě M_2; přímka $n \perp t$ je pak **normálou** hyperboly v bodě M_2 a současně osou vnitřního úhlu $\bar{\omega}$ průvodičů bodu M_2; to platí v každém bodě hyperboly a toto tvrzení je shrnuto v níže uvedené Větě 1

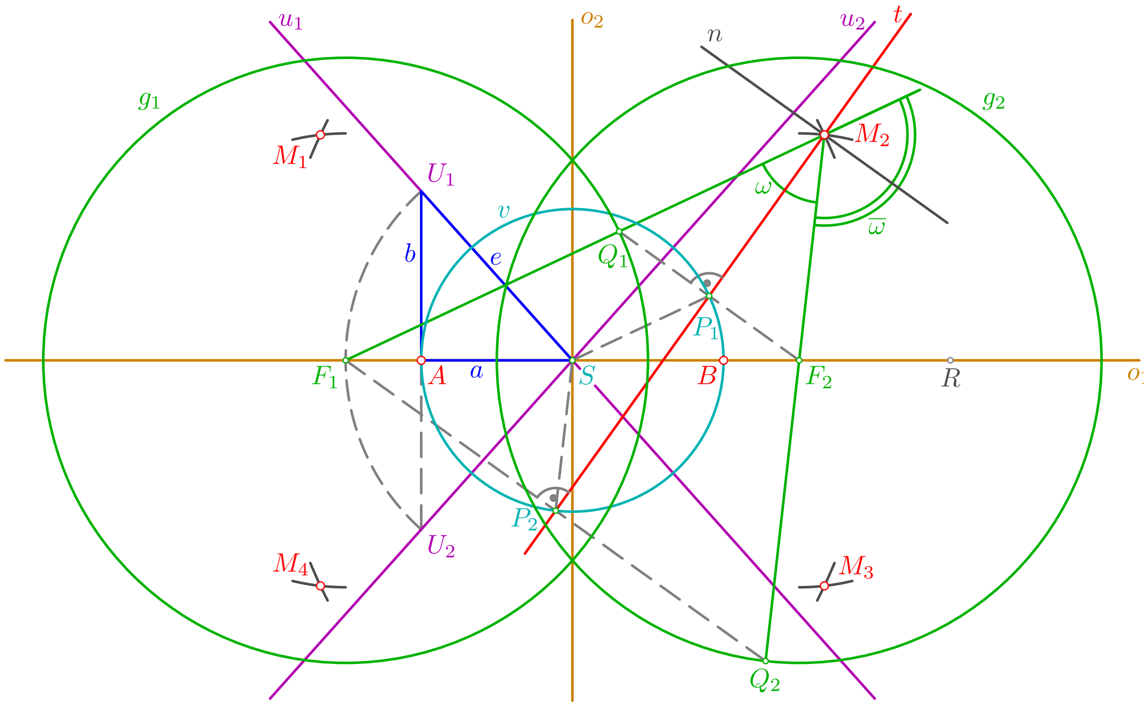


Věta 1
Tečna (normála) v bodě hyperboly půlí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů.

- na základě předchozího odvoďme další vlastnosti hyperboly: sestrojme body Q_1, Q_2 souměrně sdružené s ohnisky F_2, F_1 podle tečny t a označme příslušné paty P_1, P_2 kolmic Q_1F_2, Q_2F_1 spuštěných z ohnisek F_2, F_1 na tečnu t (tj. středy úseček Q_1F_2, Q_2F_1); z osové souměrnosti průvodičů bodu M_2 podle tečny t plyne, že bod Q_1 leží na přímce F_1M_2 a bod Q_2 padne na průvodič F_2M_2



- díky osové souměrnosti je $|M_2Q_1| = |M_2F_2|$, a tudíž platí $|F_1Q_1| = ||F_1M_2| - |M_2Q_1|| = = ||F_1M_2| - |M_2F_2|| = 2a$; totéž lze ukázat v každém bodě hyperboly, a všechny body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle tečen hyperboly tedy leží na tzv. **řídicí kružnici** $g_1(F_1, 2a)$; analogicky dostaneme $|F_2Q_2| = 2a$ a můžeme sestrojit druhou řídicí kružnici $g_2(F_2, 2a)$, na níž leží všechny body souměrně sdružené s ohniskem F_1 podle tečen hyperboly (viz Věta 2); úsečky SP_1, SP_2 jsou po řadě střední příčky trojúhelníků $F_1F_2Q_1, F_1F_2Q_2$ a pro jejich délky tedy platí: $|SP_1| = \frac{|F_1Q_1|}{2} = a = \frac{|F_2Q_2|}{2} = |SP_2|$; obecně shrnuto, paty kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny leží na tzv. **vrcholové kružnici** $v(S, a)$ (viz Věta 3)



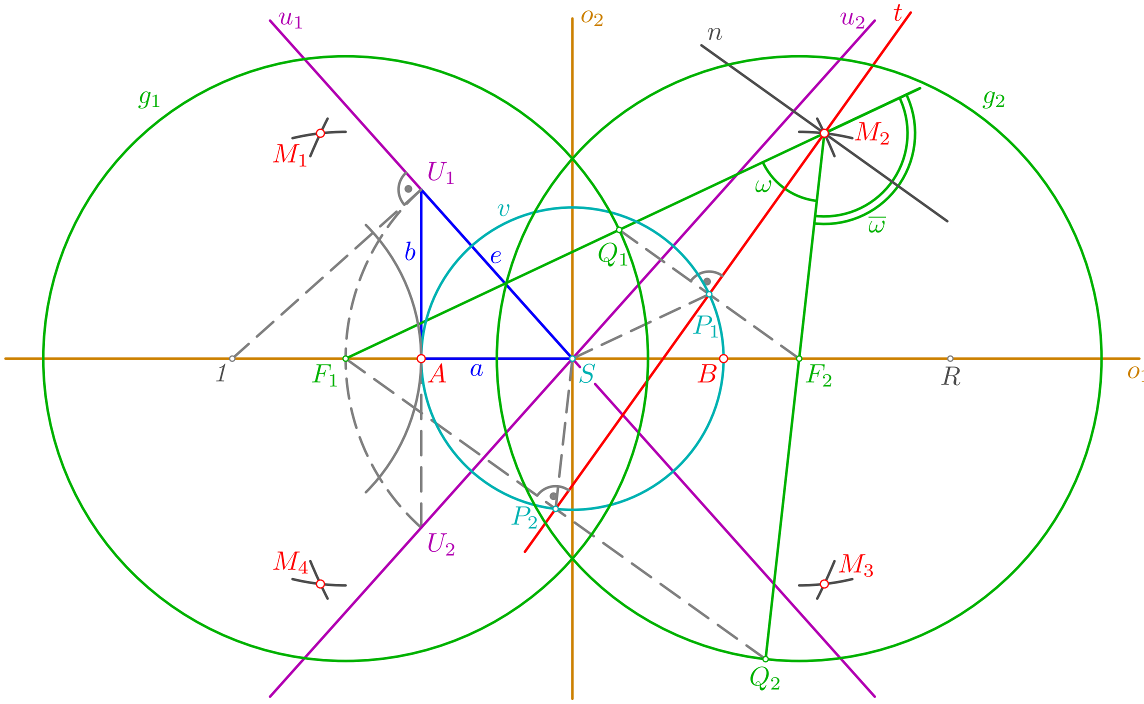
Věta 2

Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly podle jejích tečen je řídicí kružnice hyperboly o středu ve druhém ohnisku a poloměru $2a$.

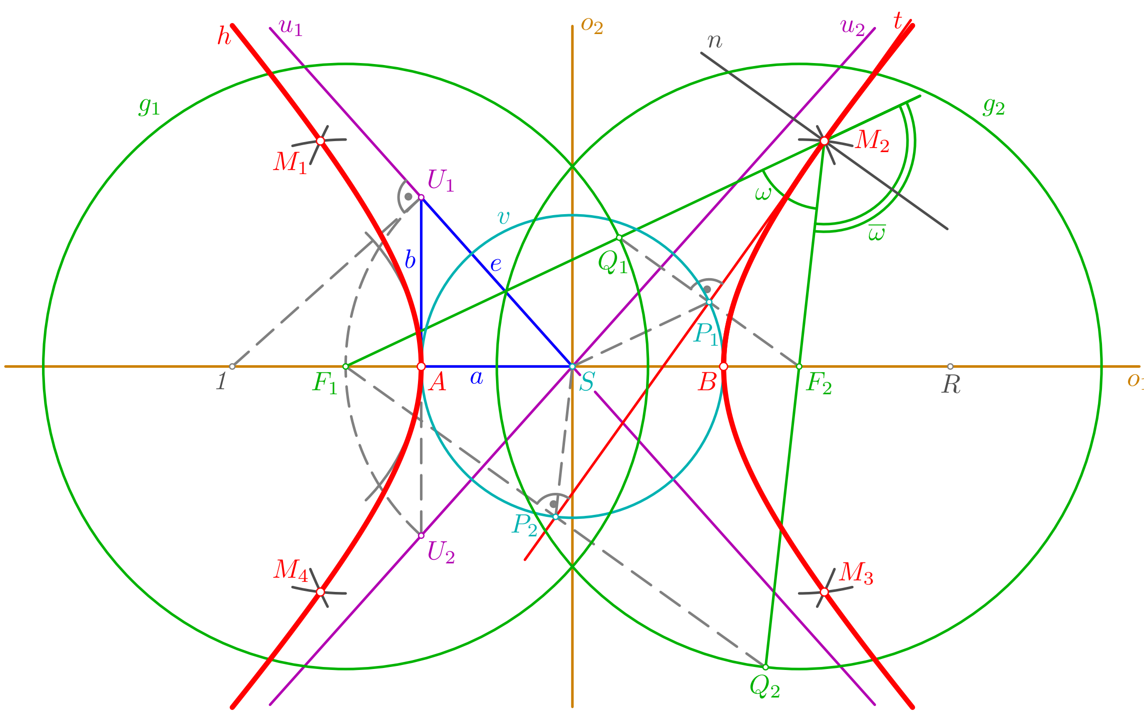
Věta 3

Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny je vrcholová kružnice hyperboly.

- pro jednodušší a pěknější vyrýsování hyperboly sestrojme v jejích vrcholech oblouky tzv. **hyperoskulačních kružnic**: stačí vést bodem U_1 kolmici k asymptotě u_1 a určit její průsečík *1* s hlavní osou o_1 hyperboly; bod *1* je pak středem oblouku hyperoskulační kružnice ve vrcholu A (oblouk ve vrcholu B doplníme souměrně podle středu S, konstrukce není v obrázku provedena); tyto oblouky přibližně nahrazují průběh hyperboly v blízkém okolí vrcholů, ale jejich konstrukce není tak užitečná jako u elipsy



- na závěr je vytažena hyperbola h (přesněji řečeno její část), což lze provést od ruky, nebo pomocí vhodného křivítka; při tom jsou důležitým vodítkem právě asymptoty, k nimž se směrem od vrcholů hyperbola stále přibližuje, ale dotkne se jich až v nekonečnu (v jejich nevlastních bodech); zkusme si představit hypotetickou cestu po hyperbole, např. na kole: vyjedeme z vrcholu A směrem k bodu M_1, projedeme jím a pokračujeme dále k asymptotě u_1; dejme tomu, že se nám podaří dojet do jejího nevlastního bodu, kde se jí „konečně" dotkneme, chvilku si odpočineme, přece jen to byla nekonečně dlouhá cesta, a vydáme se dál započatým směrem, tj. musíme se od asymptoty u_1 začít vzdalovat, projedeme bodem M_3, vrcholem B, bodem M_2, v němž se dotkneme sestrojené tečny t, podruhé přijedeme do nekonečna, tentokrát do nevlastního bodu asymptoty u_2, jíž se v něm dotkneme, a přes bod M_4 se vrátíme zpět do vrcholu A; hyperbola je tedy také (podobně jako elipsa) uzavřená křivka, která se skládá ze dvou větví oddělených dvěma nevlastními body. . .



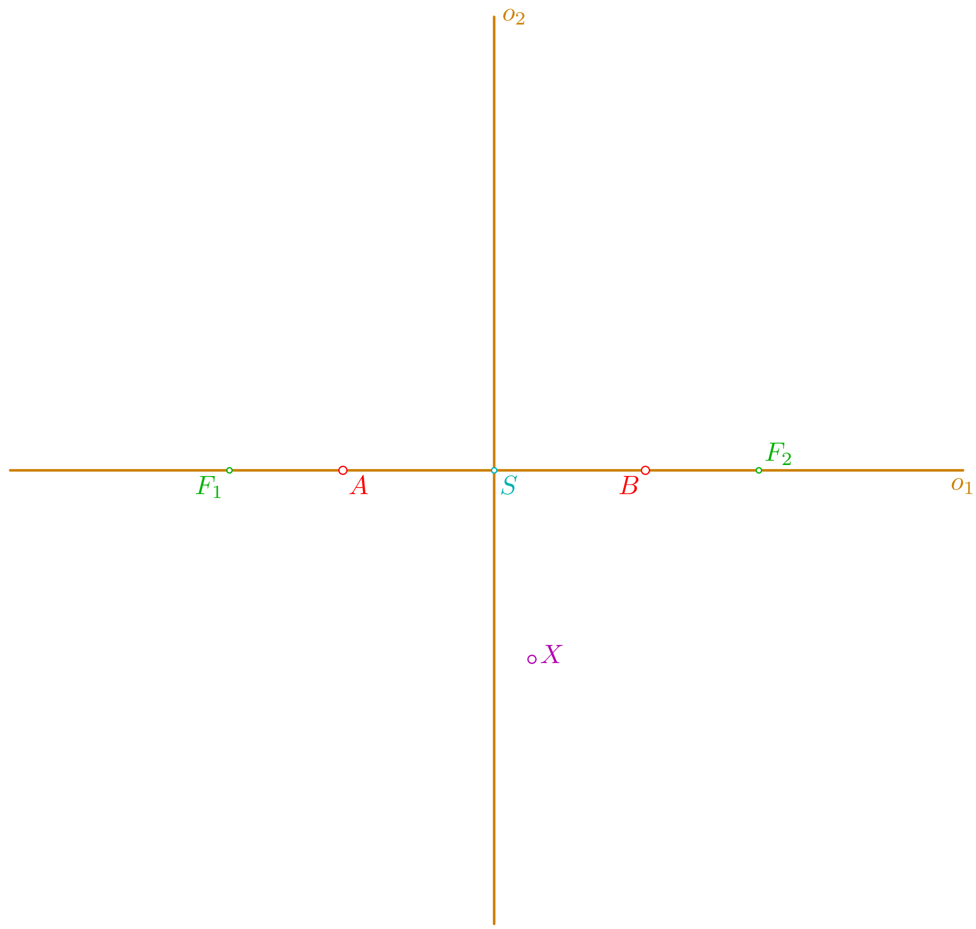
□

Řešené úlohy

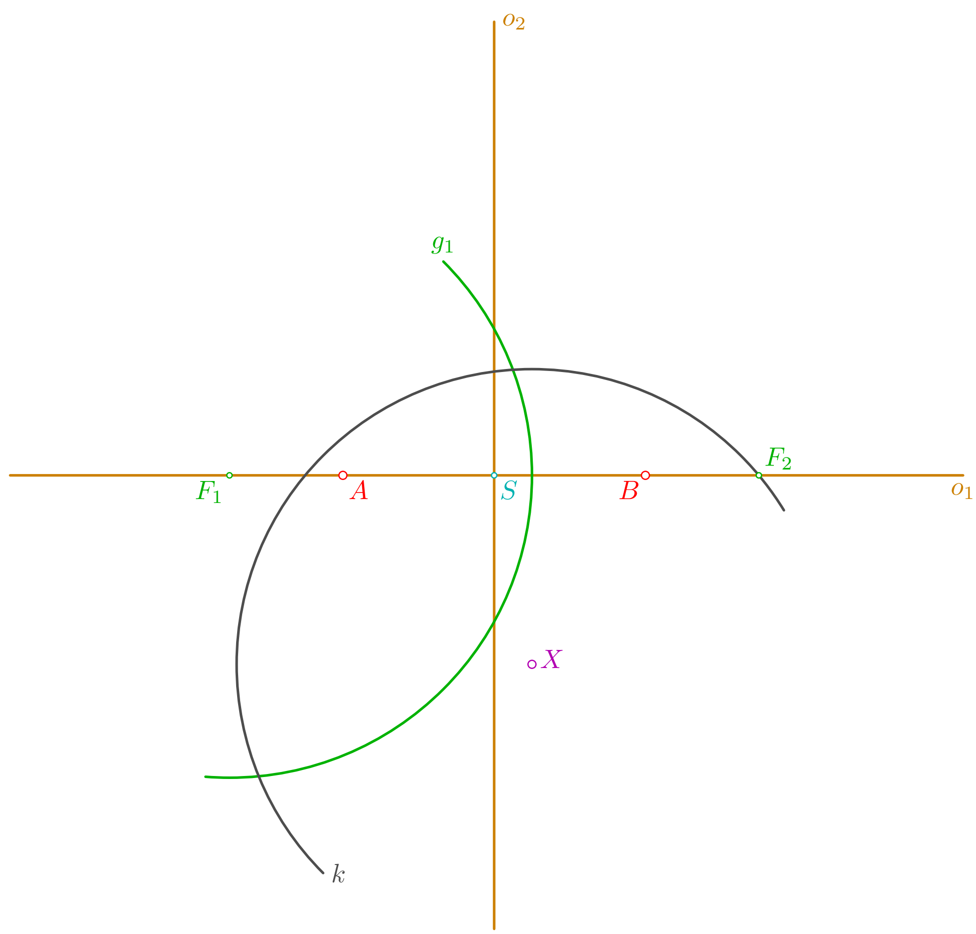
Tečny k hyperbole daným bodem

Příklad: Bodem X veďte tečny k nenarýsované hyperbole h, která je dána svými vrcholy a ohnisky.

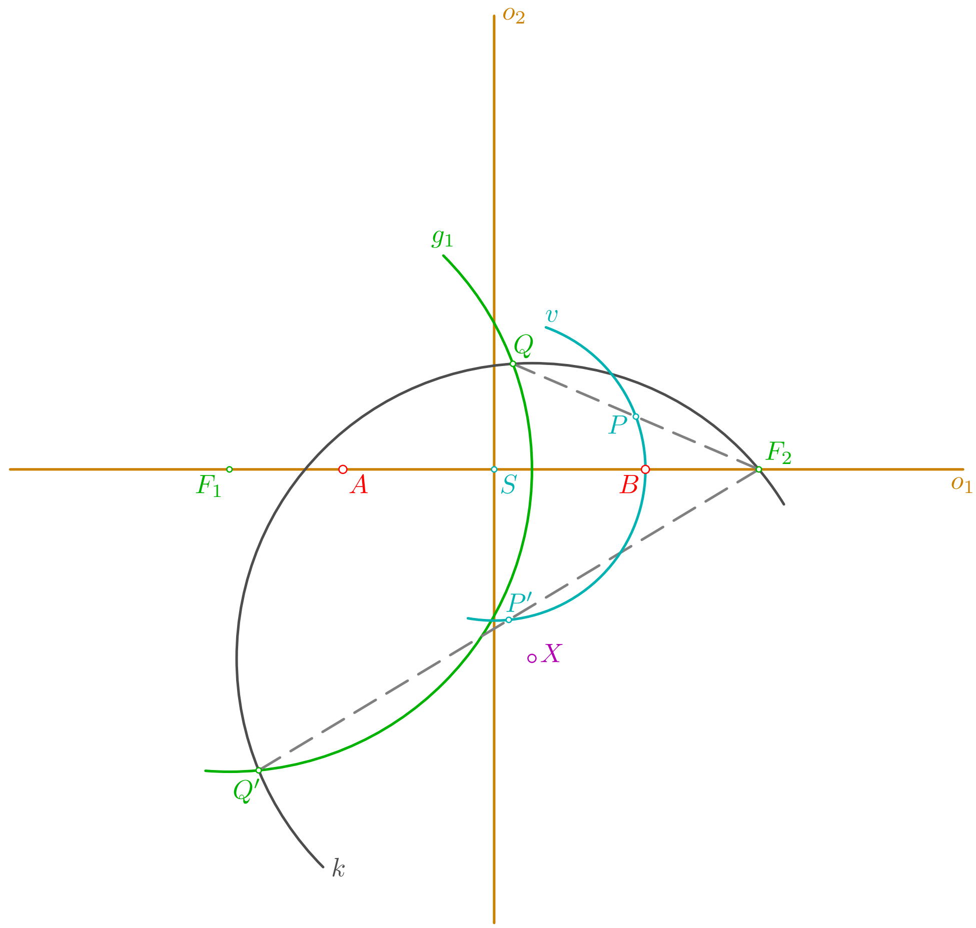
- zvolme střed S hyperboly, vodorovně hlavní osu o_1, na ní hlavní vrcholy A, B a ohniska F_1, F_2, svisle doplňme vedlejší osu $o_2 \perp o_1, S \in o_2$; rovněž zvolme bod X, z něhož pomocí uvedených ohniskových vlastností povedeme tečny k zadané hyperbole



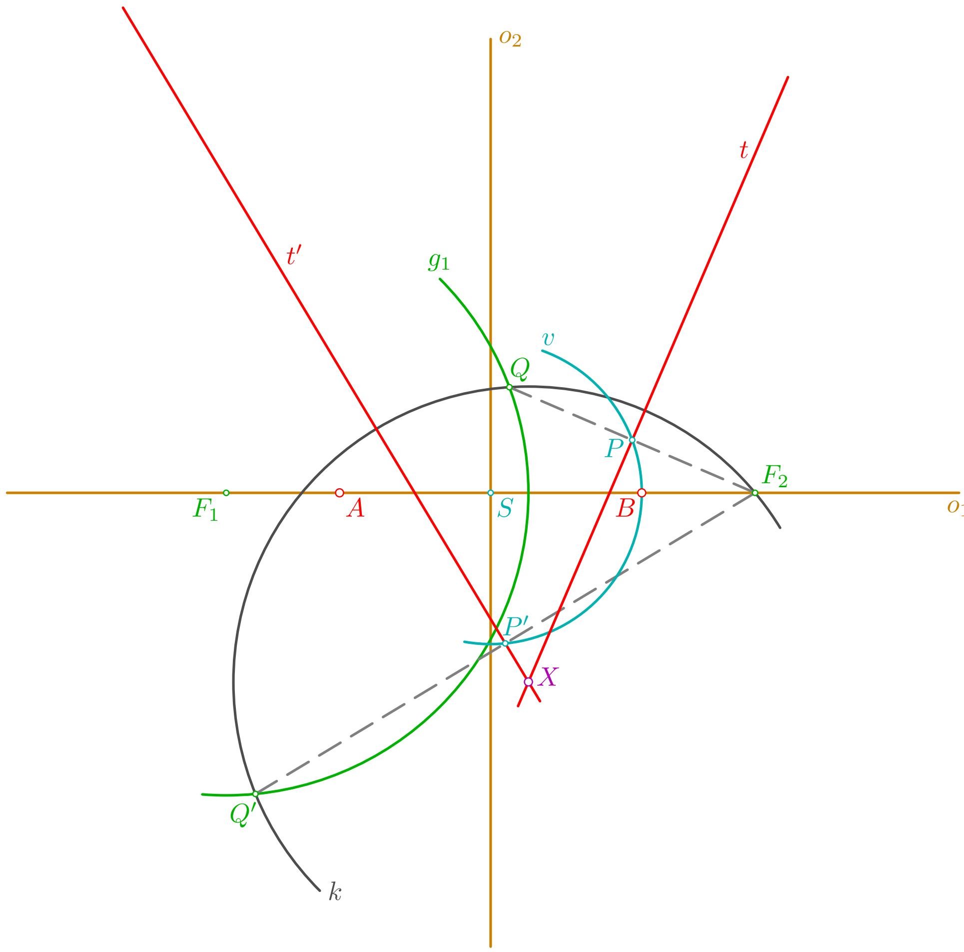
- podle Věty 2 leží body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle hledaných tečen na řídicí kružnici $g_1(F_1, 2a = |AB|)$; současně musí mít od bodu X vzdálenost $|F_2X|$, a musí tedy ležet také na kružnici $k(X, |F_2X|)$; analogicky bychom mohli k řešení použít druhou řídicí kružnici $g_2(F_2, 2a)$ a kružnici o poloměru $|F_1X|$ opsanou kolem bodu X (tato varianta není v obrázku zakreslena a je přenechána čtenáři jako cvičení)



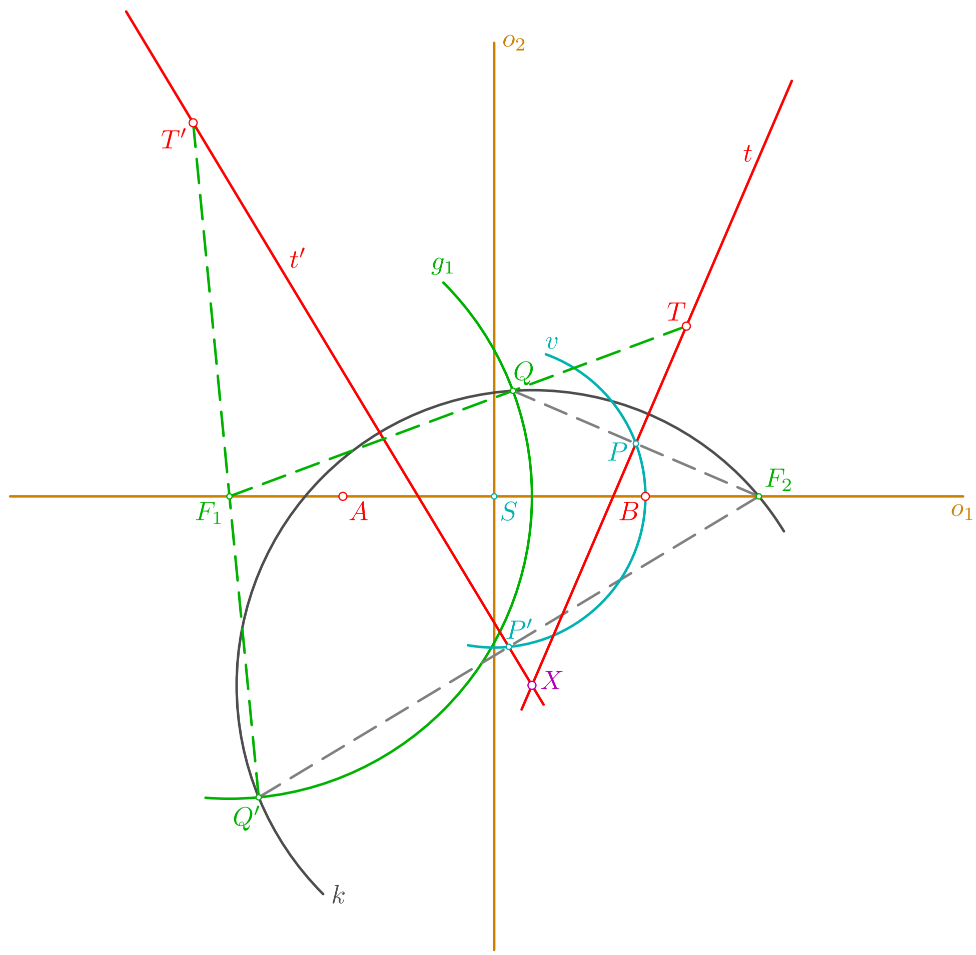
- kružnice g_1, k se protínají v bodech Q, Q'; středy P, P' úseček F_2Q, F_2Q' jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F_2 na hledané tečny a podle Věty 3 leží také na vrcholové kružnici $v(S, a)$



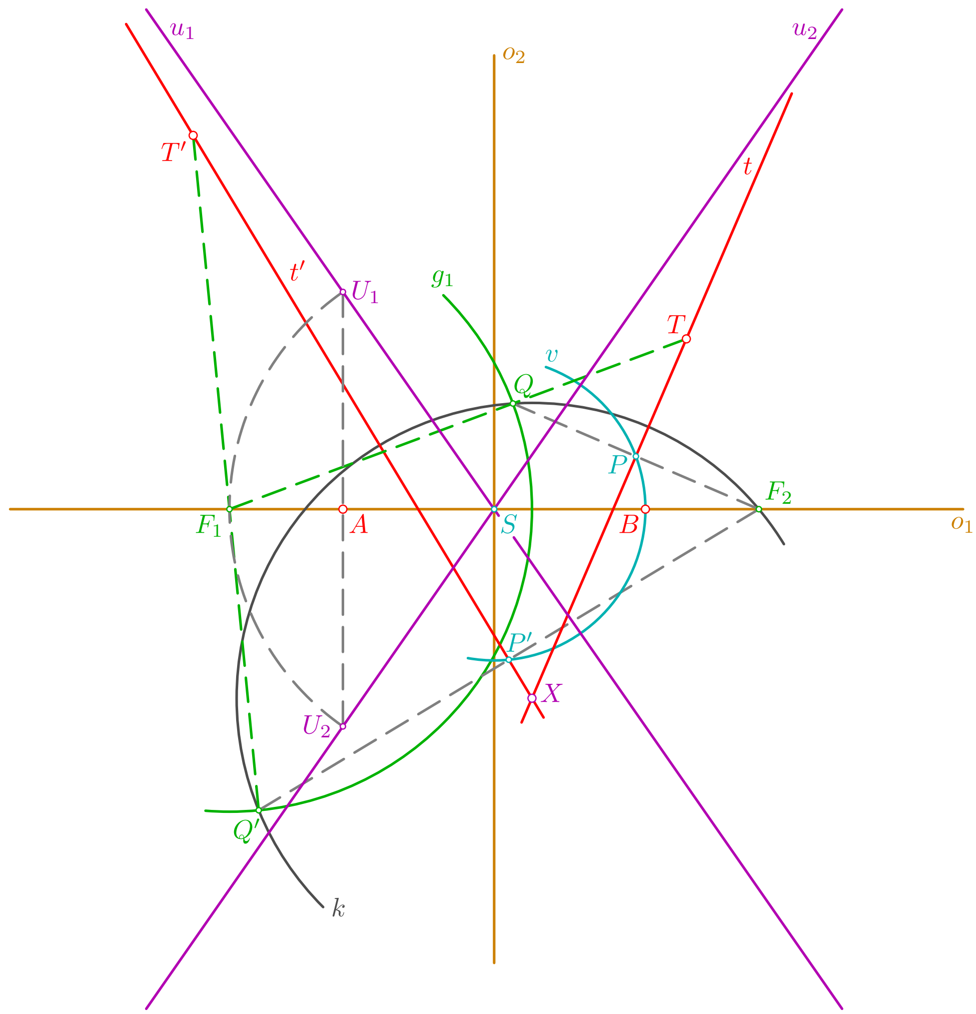
- nyní již můžeme sestrojit tečny $t = XP, t' = XP'$, pro něž platí: $t \perp F_2Q, t' \perp F_2Q'$; z toho je vidět, že body P, P' musí ležet také na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem XF_2; pro řešení úlohy lze tedy vystačit pouze se vztahy uvedenými ve Větě 3; tento alternativní postup je opět ponechán čtenáři jako procvičení ohniskových vlastností hyperboly



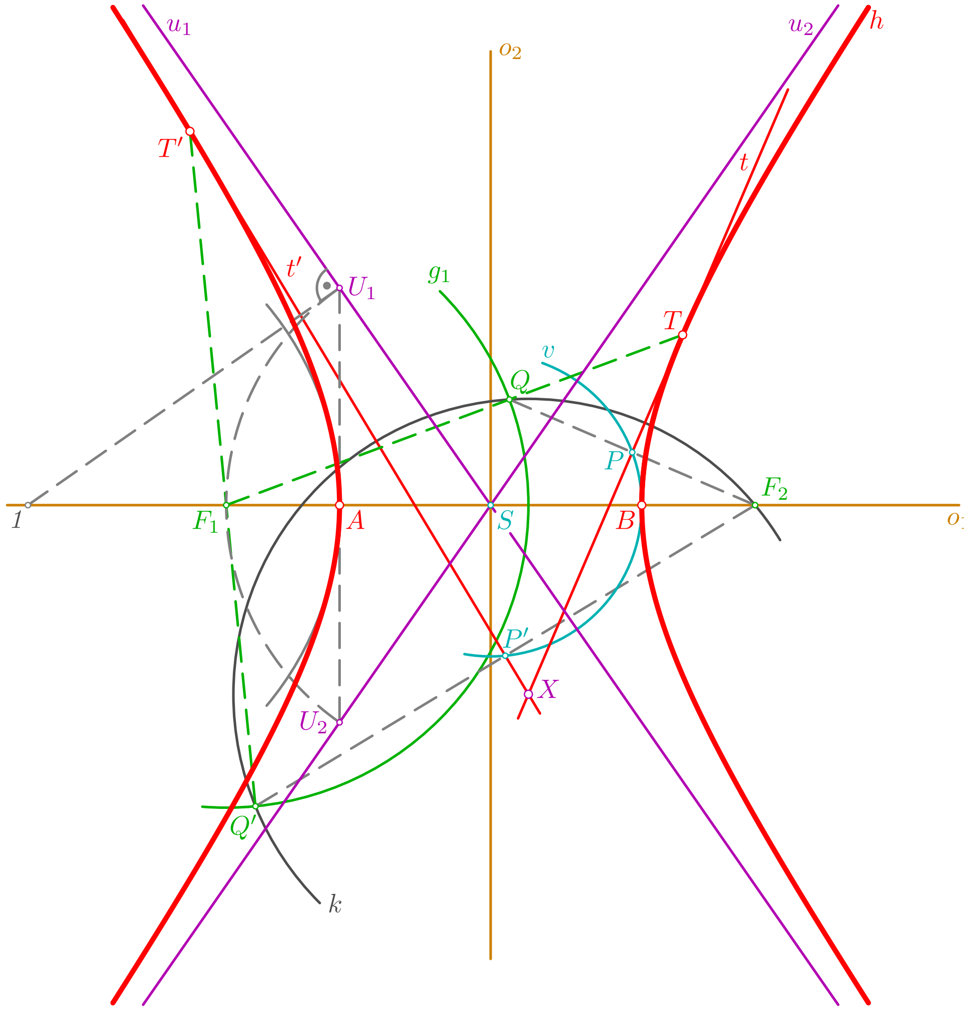
- pro body T, T' dotyku tečen t, t' s hyperbolou platí: $T = t \cap F_1Q$, $T' = t' \cap F_1Q'$; přímka F_1Q, resp. přímka F_1Q', je vlastně jedním z průvodičů bodu T, resp. bodu T'; navíc platí $TF_1 \parallel SP$, resp. $T'F_1 \parallel SP'$, a při konstrukci bodů T, T' dotyku tak vystačíme jen s body P, P', které můžeme sestrojit alternativním způsobem naznačeným v předchozím kroku



- pro přesnější vyrýsování jsou doplněny asymptoty $u_1 = SU_1, u_2 = SU_2$, kde body U_1, U_2 leží na kolmici k ose o_1 vedené vrcholem A a na kružnici o poloměru $|SF_1|$ opsané kolem středu S



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat část hyperboly h, která se v bodech T, T' dotýká tečen t, t' vedených z daného bodu X



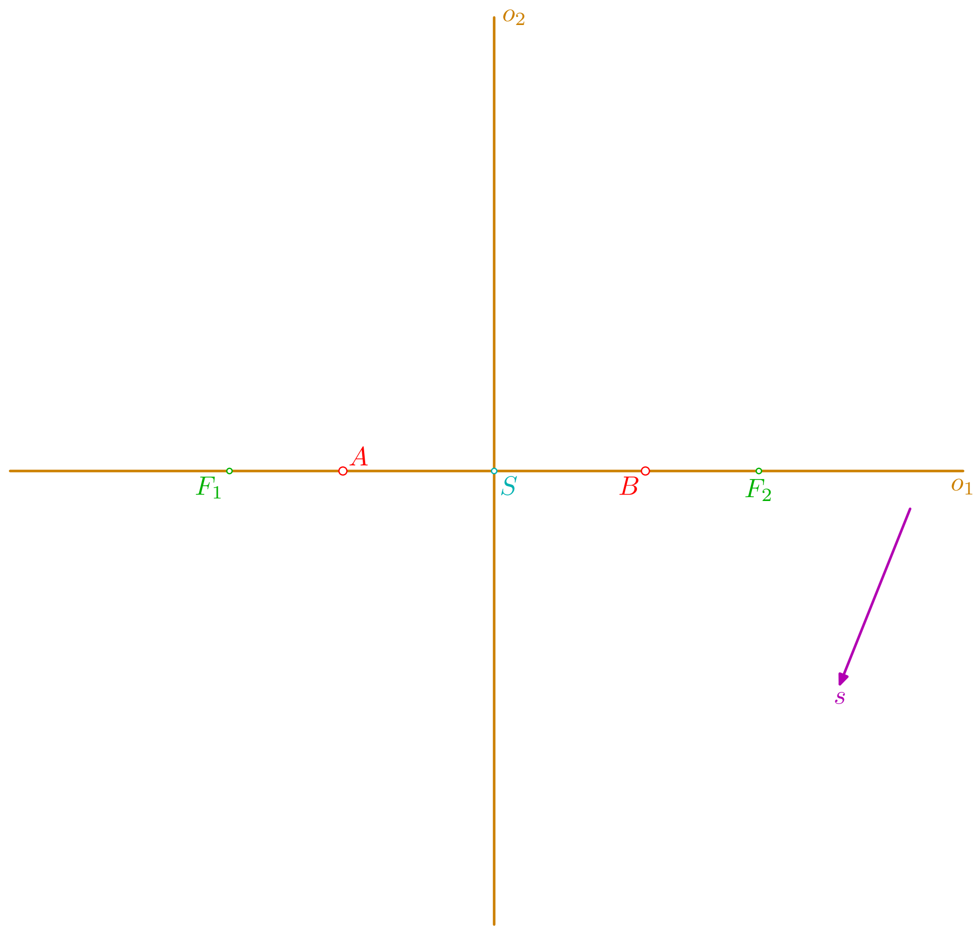
□

Diskuze: pokud se kružnice $g_1(F_1, 2a), k(X, |XF_2|)$ (případně $g_2(F_2, 2a), k(X, |XF_1|)$) protínají ve dvou bodech, resp. se dotýkají v jednom bodě, resp. nemají žádný společný bod, pak bod X leží ve vnější oblasti hyperboly h, resp. bod X je bodem hyperboly h, resp. bod X leží ve vnitřní oblasti hyperboly h, a lze jím vést dvě různé tečny, resp. jedinou (dvojnásobnou) tečnu, resp. jím nelze vést žádnou tečnu k dané hyperbole h. Při alternativním způsobu řešení rozhoduje o počtu tečen vzájemná poloha vrcholové kružnice $v(S, a)$ a Thaletovy kružnice nad průměrem F_2X nebo F_1X.

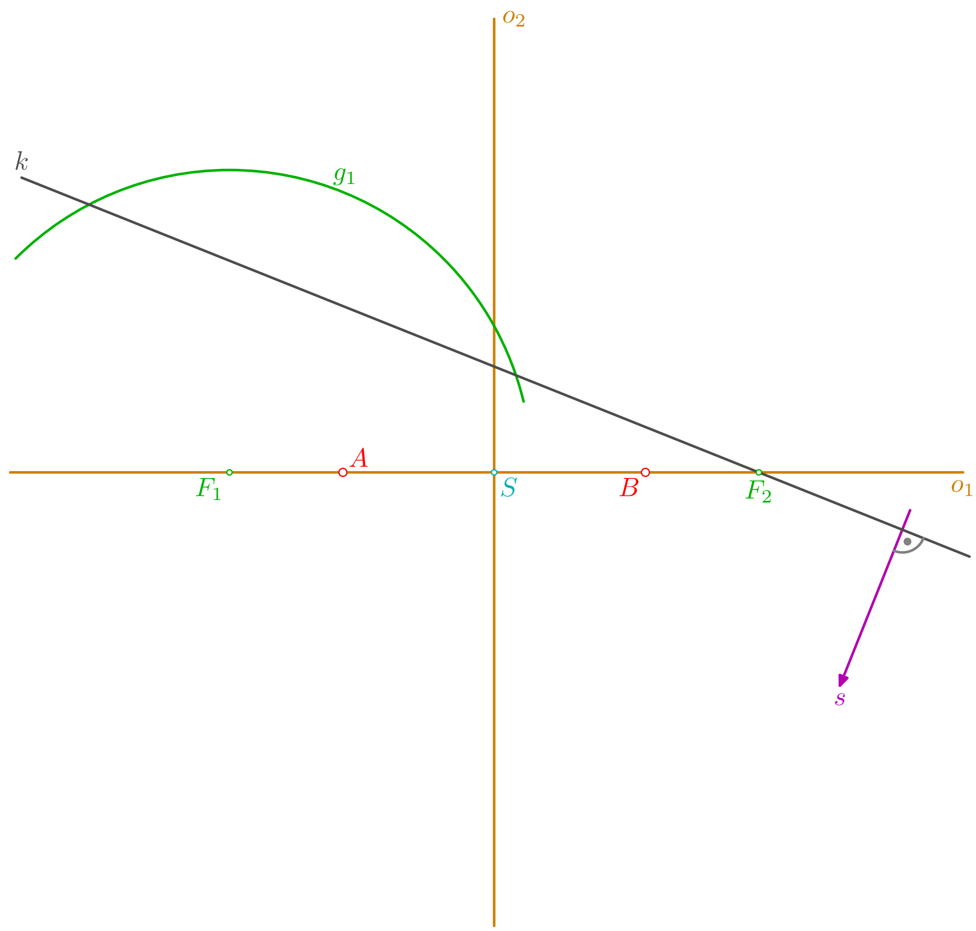
Tečny k hyperbole daného směru

Příklad: K nenarýsované hyperbole h, která je dána svými vrcholy a ohnisky, veďte tečny směru s (tj. rovnoběžné s přímkou s).

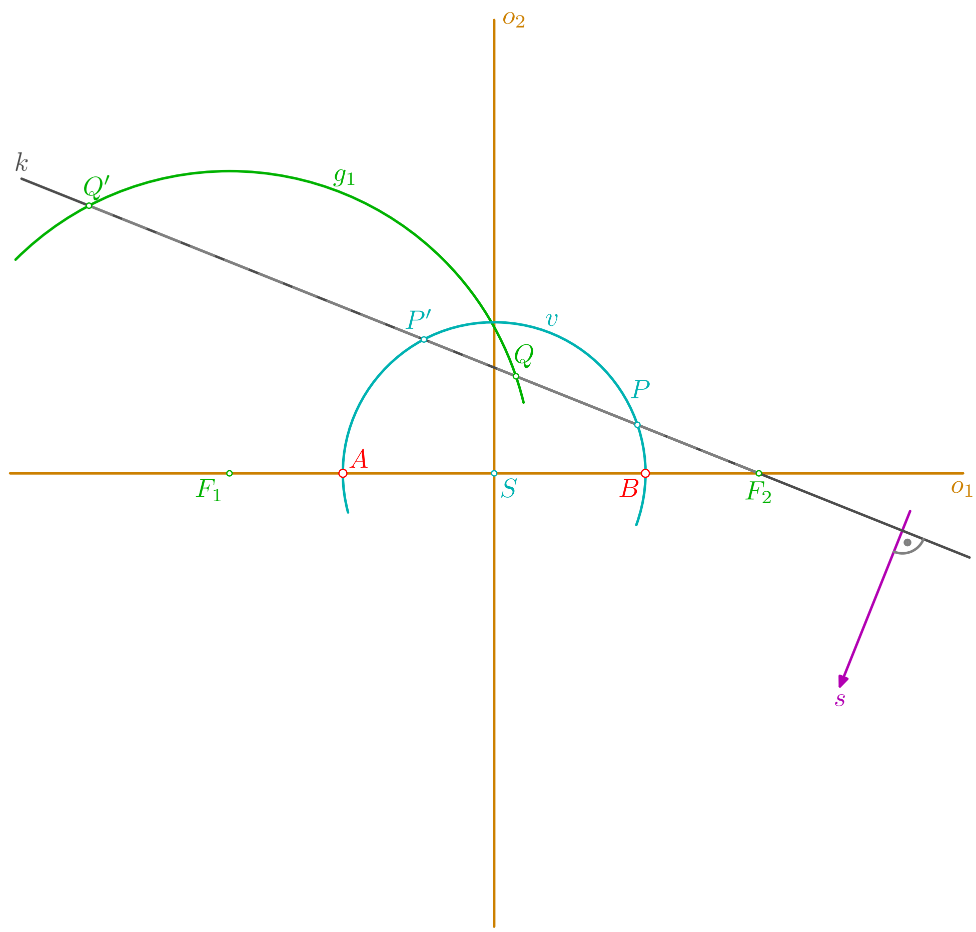
- zvolme střed S hyperboly, vodorovně hlavní osu o_1, na ní hlavní vrcholy A, B a ohniska F_1, F_2, svisle doplňme vedlejší osu $o_2 \perp o_1, S \in o_2$; rovněž zvolme směr s, s nímž mají být hledané tečny rovnoběžné



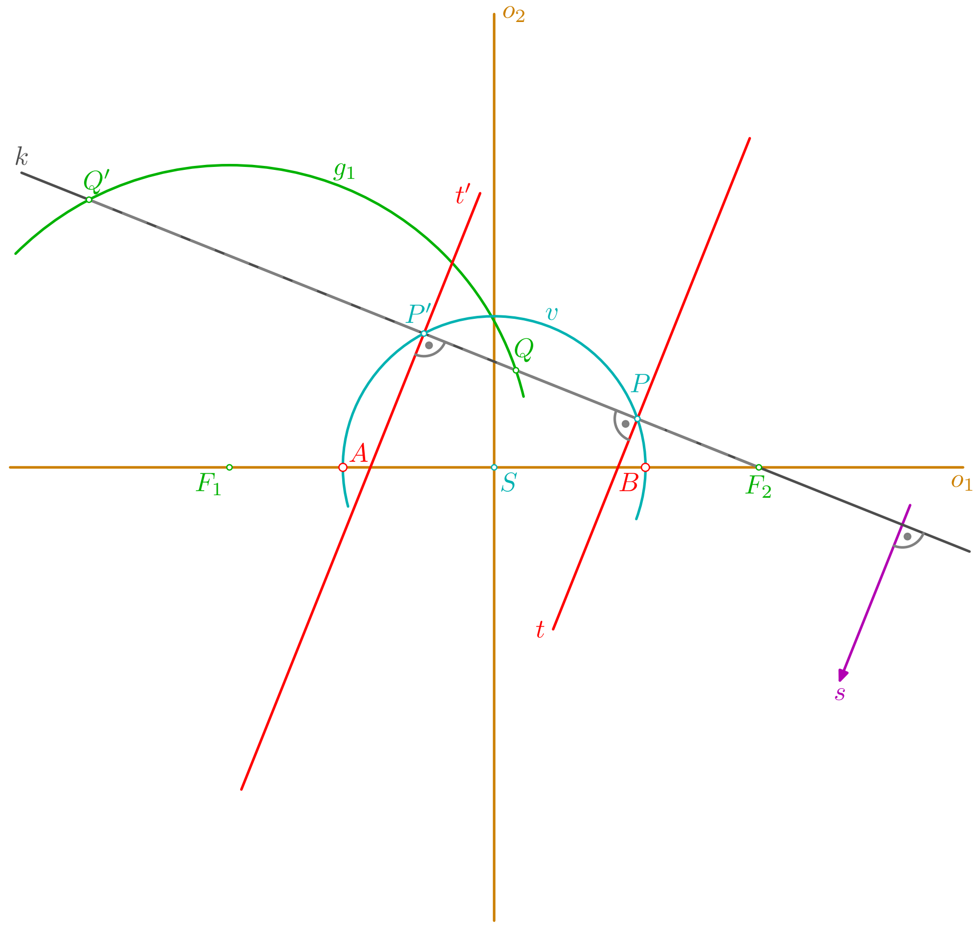
- podle Věty 2 leží body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle hledaných tečen na řídicí kružnici $g_1(F_1, 2a = |AB|)$; současně musí ležet na kolmici k vedené ohniskem F_2 kolmo k danému směru s; alternativně bychom mohli hledat body souměrně sdružené s ohniskem F_1, které musí ležet na řídicí kružnici $g_2(F_2, 2a)$ a na přímce vedené tímto ohniskem kolmo ke směru s



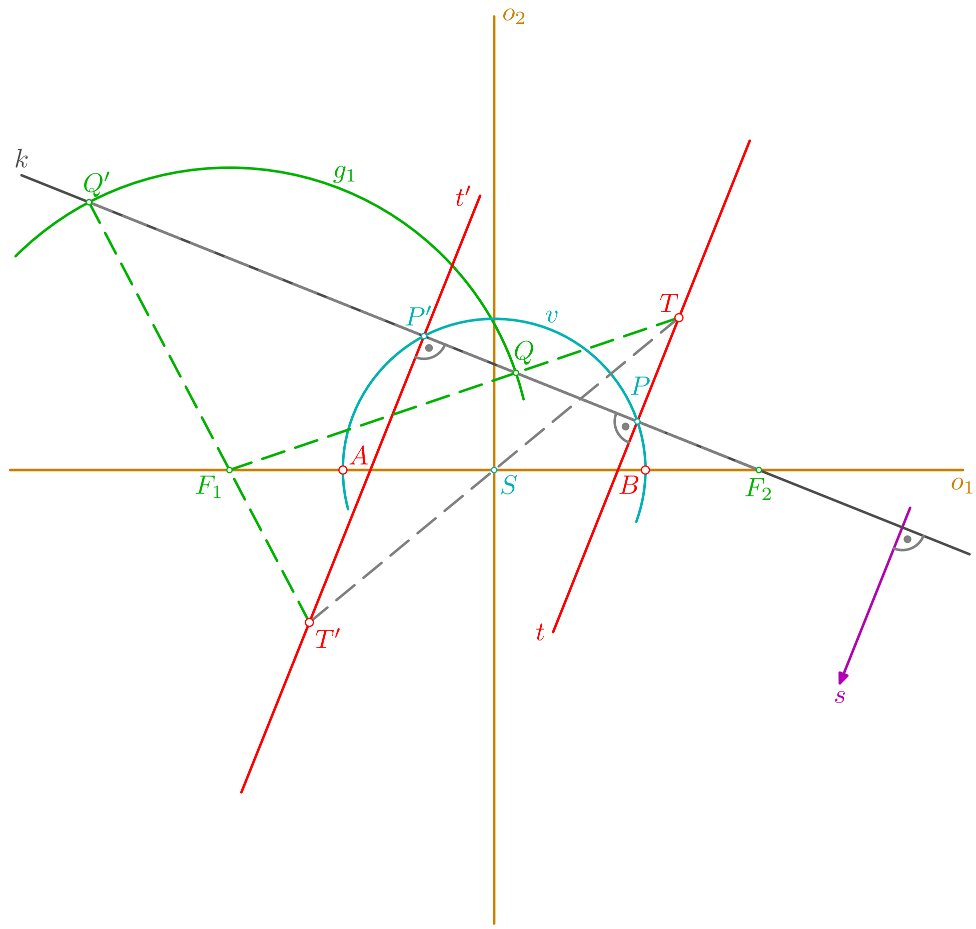
- přímka k protíná kružnici g_1 v bodech Q, Q'; středy P, P' úseček F_2Q, F_2Q' jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F_2 na hledané tečny a podle Věty 3 leží také na vrcholové kružnici $v(S, a)$; při řešení této úlohy bychom vystačily pouze s Větou 3 a tedy s body $P, P' = k \cap v$; to v případě, že některý z bodů Q, Q' vychází mimo nákresnu; my zde ovšem chceme demonstrovat také užití vlastností Věty 2



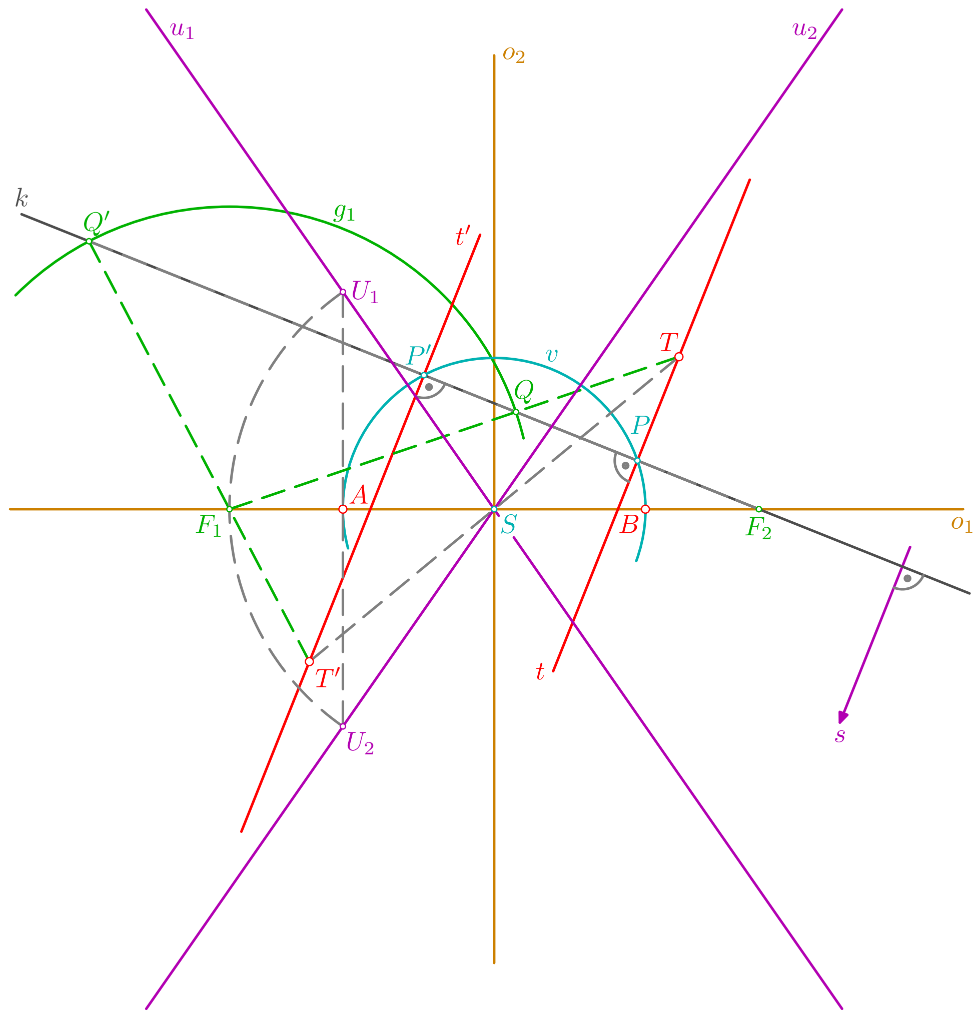
- nyní již můžeme sestrojit tečny t, t', kde $t \parallel t' \parallel s$ (tj. $t \perp k, t' \perp k$) a $P \in t, P' \in t'$; zvídavý čtenář si může do obrázku dokreslit alternativní variantu řešení: paty kolmice vedené ohniskem F_1 kolmo ke směru s padnou na sestrojené tečny t, t' a současně na vrcholovou kružnici $v(S, a)$



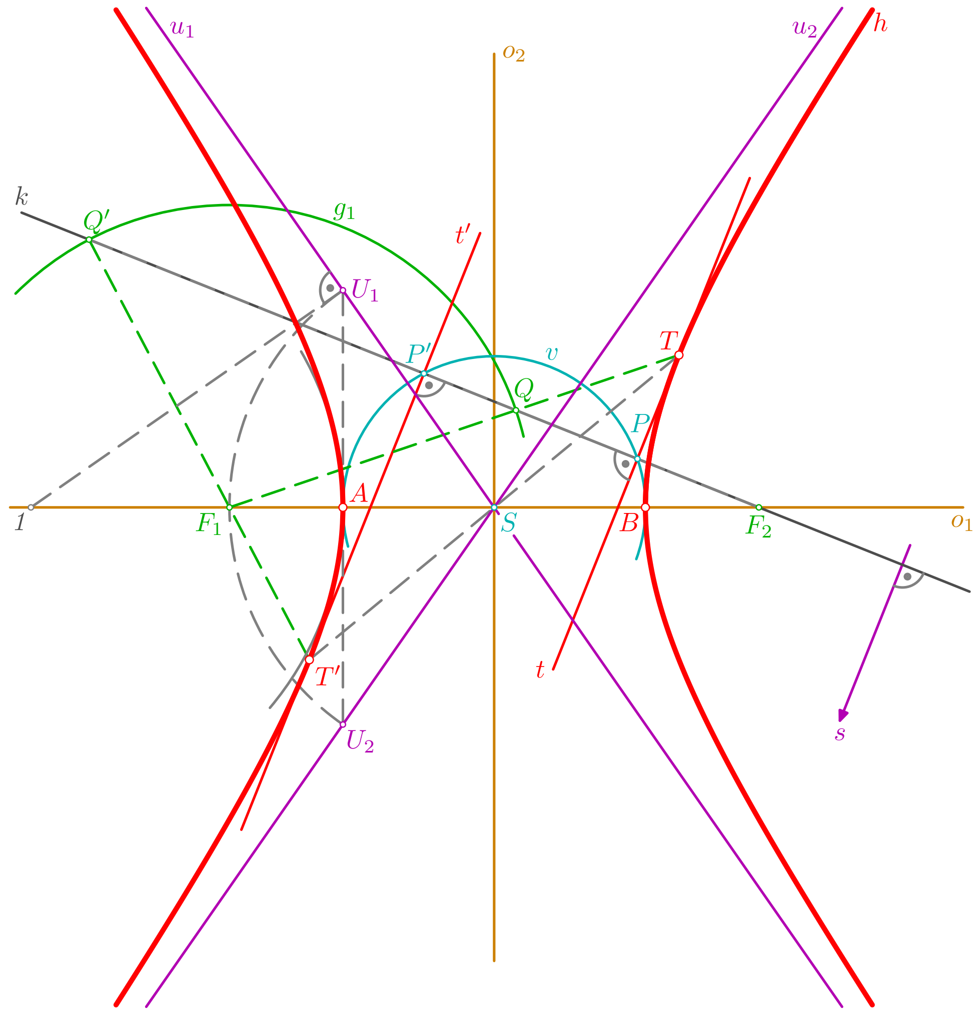
- pro body T, T' dotyku tečen t, t' s hyperbolou platí: $T = t \cap F_1Q$, $T' = t' \cap F_1Q'$; přímka F_1Q, resp. přímka F_1Q', je vlastně jedním z průvodičů bodu T, resp. bodu T'; současně platí $F_1T \parallel SP, F_1T' \parallel SP'$ a navíc jsou tečny $t \parallel t'$ středově souměrné podle středu S hyperboly, z čehož vyplývá $S \in TT'$; v této úloze je tedy možné sestrojit pouze jedno řešení na základě ohniskových vlastností a druhé lze snadno doplnit pomocí středové souměrnosti; konstrukce vztahující se k užití alternativního řešení pomocí druhého ohniska F_1 jsou přenechány čtenáři jako cvičení...



- pro přesnější vyrýsování jsou doplněny asymptoty $u_1 = SU_1, u_2 = SU_2$, kde body U_1, U_2 leží na kolmici k ose o_1 vedené vrcholem A a na kružnici o poloměru $|SF_1|$ opsané kolem středu S



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat část hyperboly h, která se v bodech T, T' dotýká tečen t, t' rovnoběžných s daným směrem s



□

Diskuze: Je-li přímka k, vedená ohniskem F_2 kolmo k danému směru s, sečnou, resp. tečnou, resp. nesečnou, řídicí kružnice $g_1(F_1, 2a)$, pak lze daným směrem vést dvě různé tečny, resp. jedinou tečnu (asymptotu), resp. žádnou tečnu, k dané hyperbole h; k témuž závěru lze dojít při užití alternativních způsobů řešení – tj. pomocí druhé řídicí kružnice g_2, nebo pomocí vrcholové kružnice v.