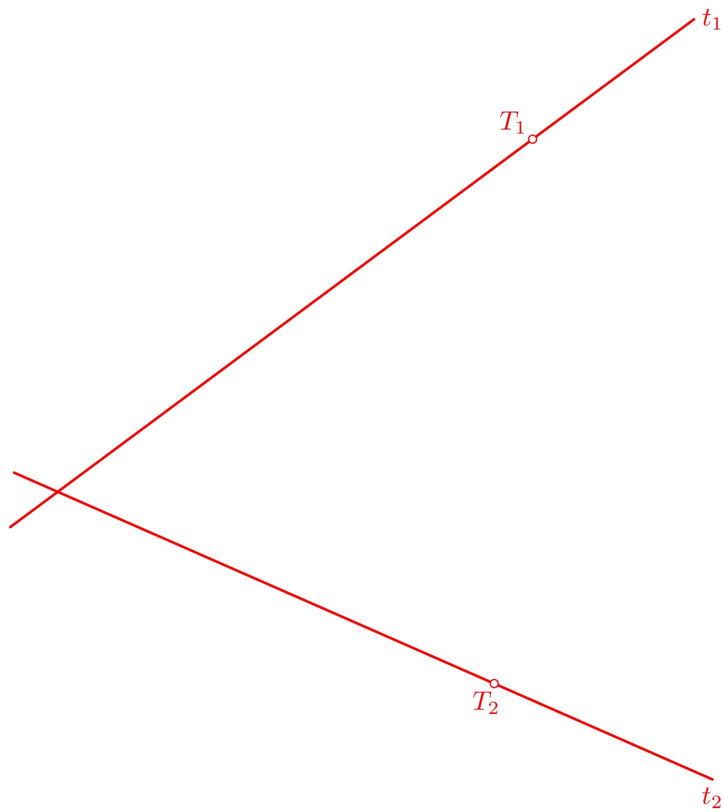
Další užitečné konstrukce paraboly

Řešené úlohy

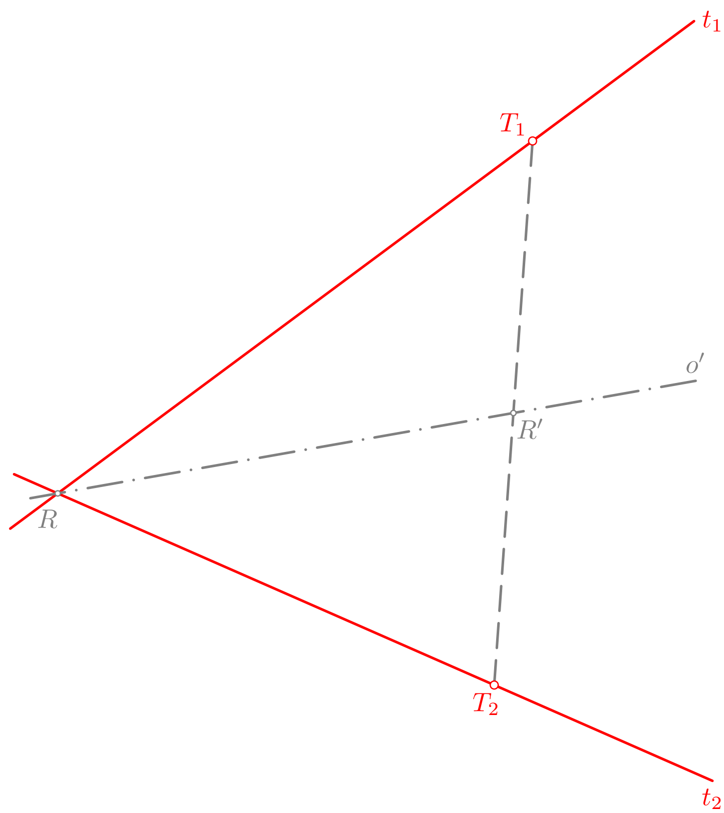
Konstrukce paraboly dané dvěma tečnami s body dotyku

Příklad: Sestrojte parabolu p, jsou-li dány její tečny t_1, t_2 s body T_1, T_2 dotyku.

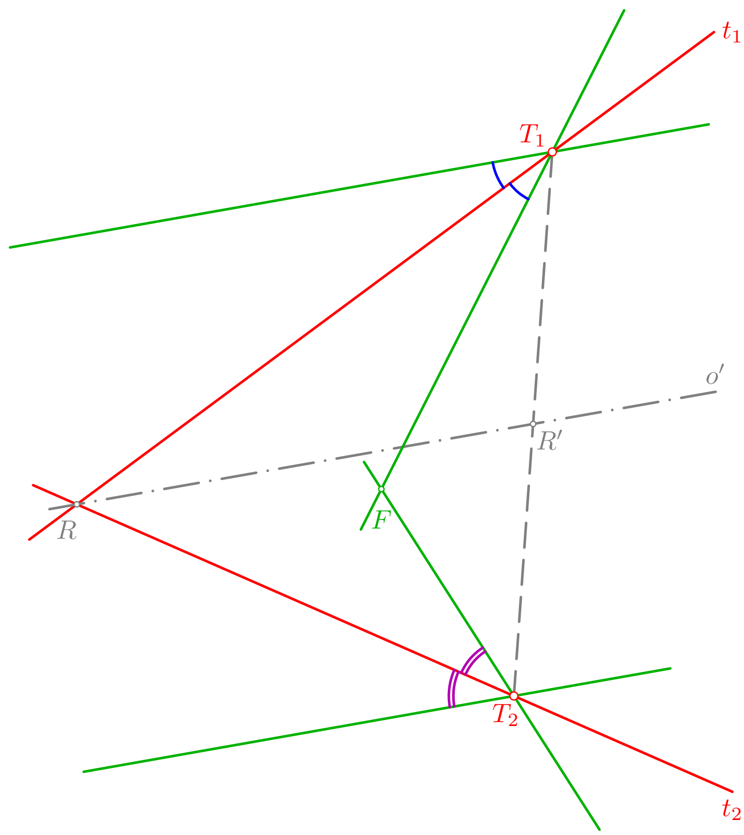
- zvolme dvě různoběžné přímky t_1, t_2 a na každé z nich jeden bod, označme je $T_1 \in t_1$ a $T_2 \in t_2$; žádný z nich nechť přitom neleží v průsečíku zvolených tečen; dá se dokázat, že tímto způsobem je parabola dána jednoznačně, jejím pátým určujícím elementem je nevlastní přímka roviny – tečna hledané paraboly v nekonečnu...



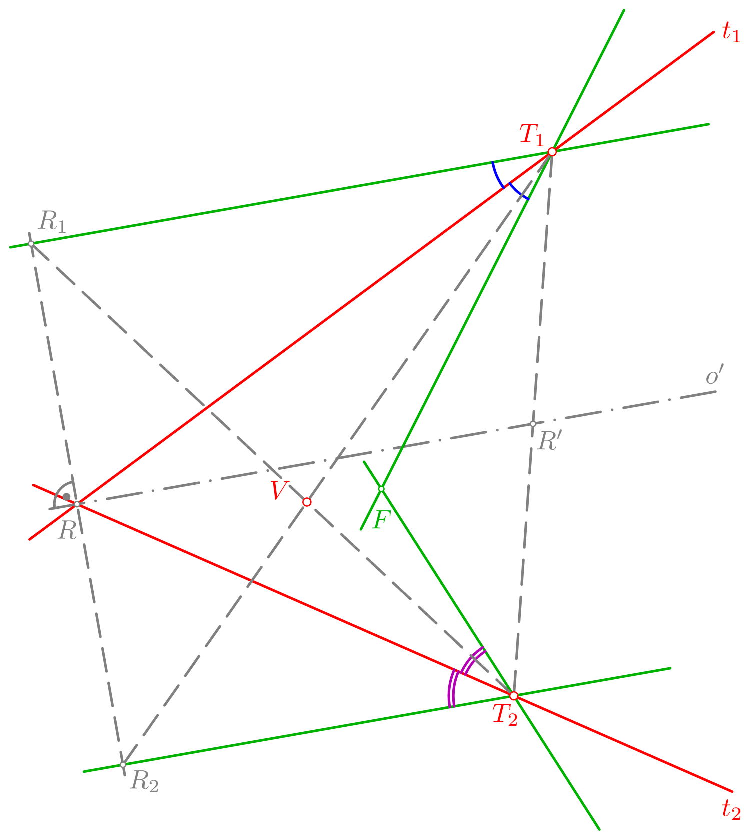
- dá se ukázat, že přímka $o' = RR'$, kde $R = t_1 \cap t_2$ a bod R' je střed úsečky T_1T_2, udává směr osy o hledané paraboly p (vyplývá to z tzv. projektivních nebo polárních vlastností paraboly); jestliže navíc budou body T_1, T_2 ve stejné vzdálenosti od průsečíku $R = t_1 \cap t_2$, tj. bude-li platit $|T_1R| = |T_2R|$, potom přímka $o' = RR'$ bude přímo osou $o = o'$ hledané paraboly a střed úsečky RR' by podle Věty 4 o subtangentě udával její vrchol; pro tuto variantu zadání nechť si čtenář ve volném místě na stránce laskavě načrtne nebo narýsuje samostatný obrázek jako cvičení...



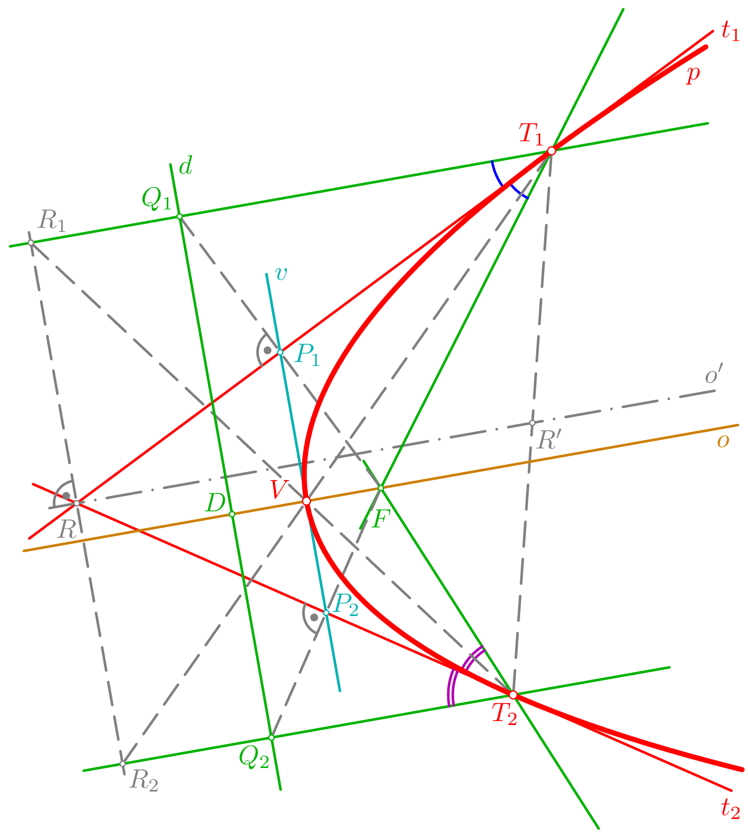
- jeden průvodič bodu T_1 je rovnoběžný s osou o a tedy také s přímkou o', druhý je podle Věty 1 s prvním osově souměrný podle tečny t_1; analogicky můžeme sestrojit také oba průvodiče bodu T_2 a určit ohnisko F jako průsečík těch průvodičů bodů T_1, T_2, které nejsou rovnoběžné s přímkou o'; poznamenejme ještě, že tato konstrukce je při ručním rýsování dosti nepřesná (zejména při přenášení úhlů) a navíc nefunguje v případě, kdy $t_1 \perp t_2$ (nechť si čtenář pro zajímavost tuto variantu opět raději narýsuje do volného místa): při takovém zadání totiž splynou souměrné průvodiče bodů T_1, T_2 s přímkou T_1T_2 a nelze tedy nalézt ohnisko F jako jejich průsečík; dá se ovšem dokázat, že v tomto případě je ohnisko F patou kolmice spuštěné z průsečíku $R = t_1 \cap t_2$ na přímku T_1T_2



- známe-li ohnisko F paraboly, můžeme již doplnit osu o a pomocí Vět 2,3 také vrcholovou tečnu v a řídicí přímku d; než to provedeme, ukažme ještě jiný alternativní způsob řešení zadané úlohy: označme R_1, R_2 průsečíky průvodičů bodů T_1, T_2 rovnoběžných se směrem o' a kolmice k přímce o' vedené bodem $R = t_1 \cap t_2$; pak se dá ukázat, že průsečík úhlopříček R_1T_2, R_2T_1 ve vzniklém pravoúhlém lichoběžníku $R_1R_2T_2T_1$ je vrcholem V hledané paraboly p (opět to vyplývá z projektivních vlastností paraboly); tento způsob řešení funguje bez omezení, tj. je lhostejno, zda jsou zadané tečny t_1, t_2 navzájem kolmé či nikoliv



- ať už máme ohnisko F nebo vrchol V, snadno sestrojíme osu $o \parallel o'$ hledané paraboly p; dále můžeme z ohniska F vést kolmici k tečně t_1, najít její patu P_1, sestrojit bod Q_1 souměrně sdružený a vést jimi vrcholovou tečnu $v \perp o, P_1 \in v$, řídicí přímku $d \perp o$, $Q_1 \in d$, a následně doplnit vrchol V (totéž lze zřejmě provést vzhledem k druhé dané tečně t_2); nebo při alternativním způsobu řešení vyjdeme od sestrojeného vrcholu V, vedeme jím vrcholovou tečnu $v \perp o$, ta protne dané tečny t_1, t_2 v bodech P_1, P_2, jimi vedené kolmice k příslušným tečnám se musí protnout na ose o v ohnisku F a body Q_1, Q_2 souměrně sdružené s ohniskem F podle tečen t_1, t_2 určí řídicí přímku d; rovněž lze využít vlastností subtangenty nebo subnormály některého z bodů T_1, T_2 – prostě možností dořešení úlohy je zde několik. . .



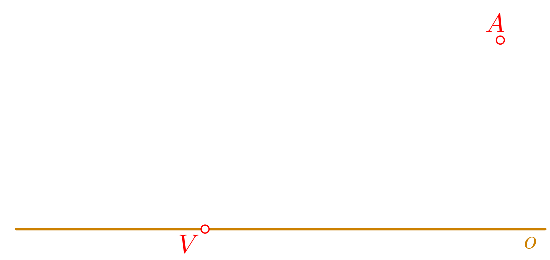
□

Diskuze: úloha nemá žádné řešení, jsou-li tečny t_1, t_2 navzájem rovnoběžné, nebo některý z bodů T_1, T_2 dotyku splývá s průsečíkem přímek t_1, t_2; jinak má daná úloha vždy právě jedno řešení.

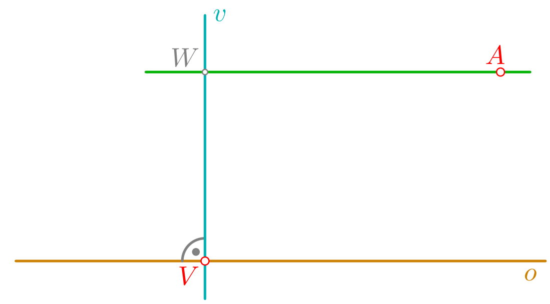
Příčková konstrukce bodů paraboly

Příklad: Sestrojte další body paraboly p, je-li dán její vrchol V, osa o a obecný bod A.

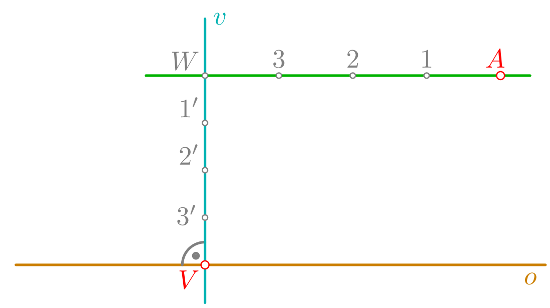
- vodorovně zvolme osu o, na ní vrchol V a zcela libovolně ještě další bod A, který má na hledané parabole ležet



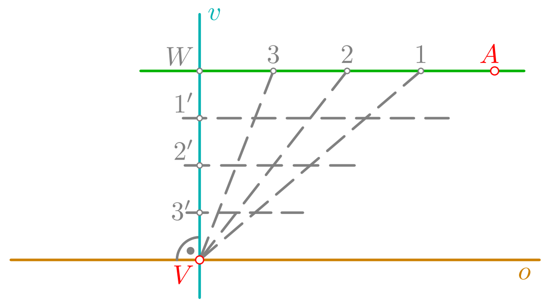
- doplňme vrcholovou tečnu $v \perp o, V \in v$, a bodem A veďme jeden jeho průvodič rovnoběžný s osou o; průsečík tohoto průvodiče s vrcholovou tečnou v označme W



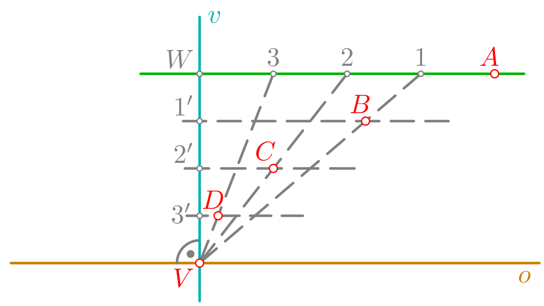
- úsečky AW a WV rozdělme rovnoměrně na stejný počet dílů – dejme tomu na čtyři, tj. napůl a vzniklé poloviny zase napůl; dělicí body na úsečce AW očíslujme $1, 2, 3$ směrem od bodu A k bodu W; podobně očíslujme $1', 2', 3'$ dělicí body úsečky WV směrem od bodu W k vrcholu V



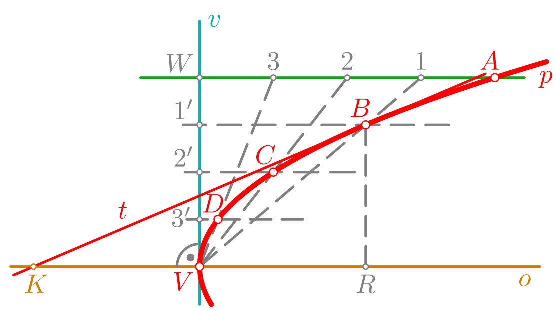
- nyní sestrojme tzv. **příčky** paraboly: body $1, 2, 3$ spojme úsečkami s vrcholem V a každým z bodů $1', 2', 3'$ veďme rovnoběžku s osou o



- pak lze dokázat, že odpovídající si příčky se protínají v dalších bodech hledané paraboly; konkrétně úsečka $1V$, resp. $2V$, resp. $3V$, protíná rovnoběžku s osou vedenou bodem $1'$, resp. $2'$, resp. $3'$, v dalším bodě B, resp. C, resp. D, paraboly p



- tečny v bodech $A, B.C, D$ můžeme sestrojit pomocí Věty 4 o subtangentě, např. pro bod B: pravoúhlý průmět R bodu B do osy o přenesme souměrně podle vrcholu V do bodu $K \in o$ a vytáhněme tečnu $t = KB$ k parabole p v bodě B; na závěr lze docela dobře volnou rukou vytáhnout průběh paraboly p, pro kterou máme dost bodů a ve dvou z nich i tečny



□