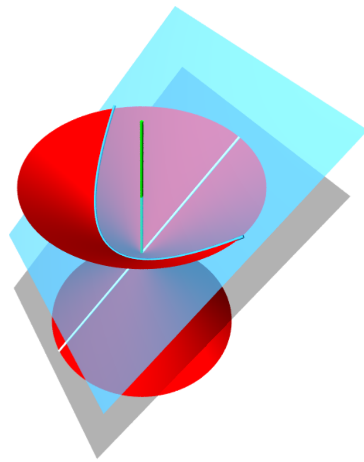
Parabola

Výklad



Definice a ohniskové vlastnosti

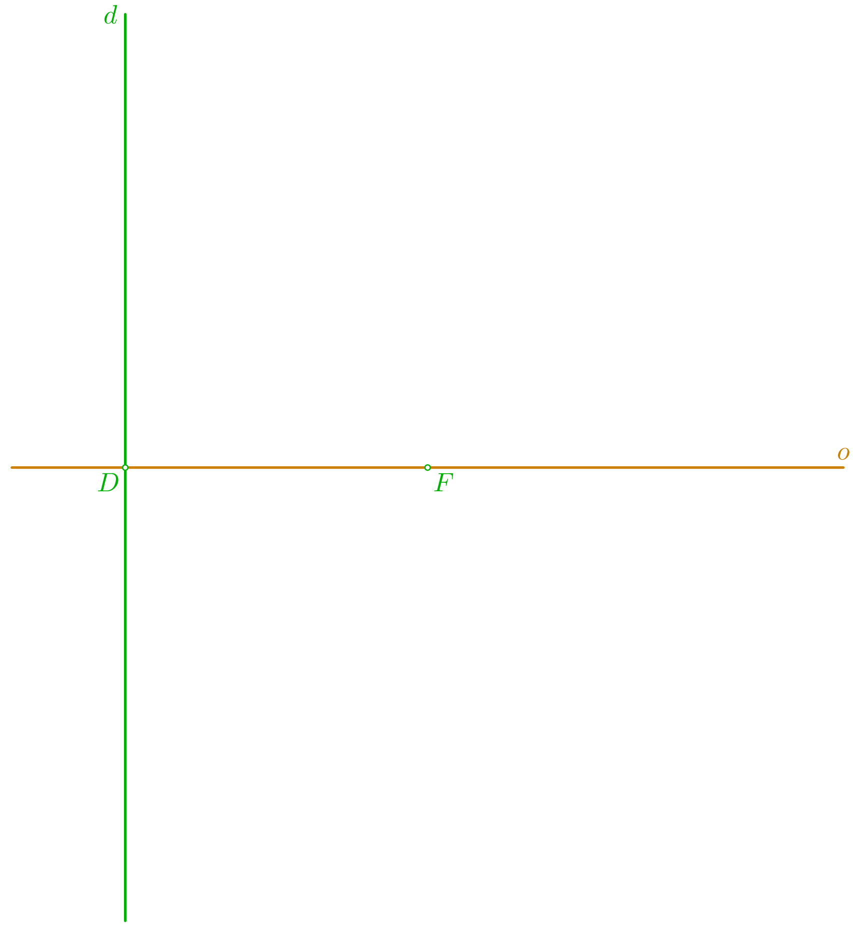
- *prostorová definice (viz obrázek nahoře):* **parabola** je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řezná rovina má takovou polohu, že rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem se dotýká kuželové plochy podél jedné její povrchové přímky (nebo jinak: odchylka roviny řezu od osy je rovna odchylce povrchových přímek)

- *ohnisková definice:* **parabola** p je množinou všech bodů v dané rovině ρ, jež mají stejnou vzdálenost od dané přímky d a od daného bodu F, který na přímce d neleží; symbolicky zapsáno:

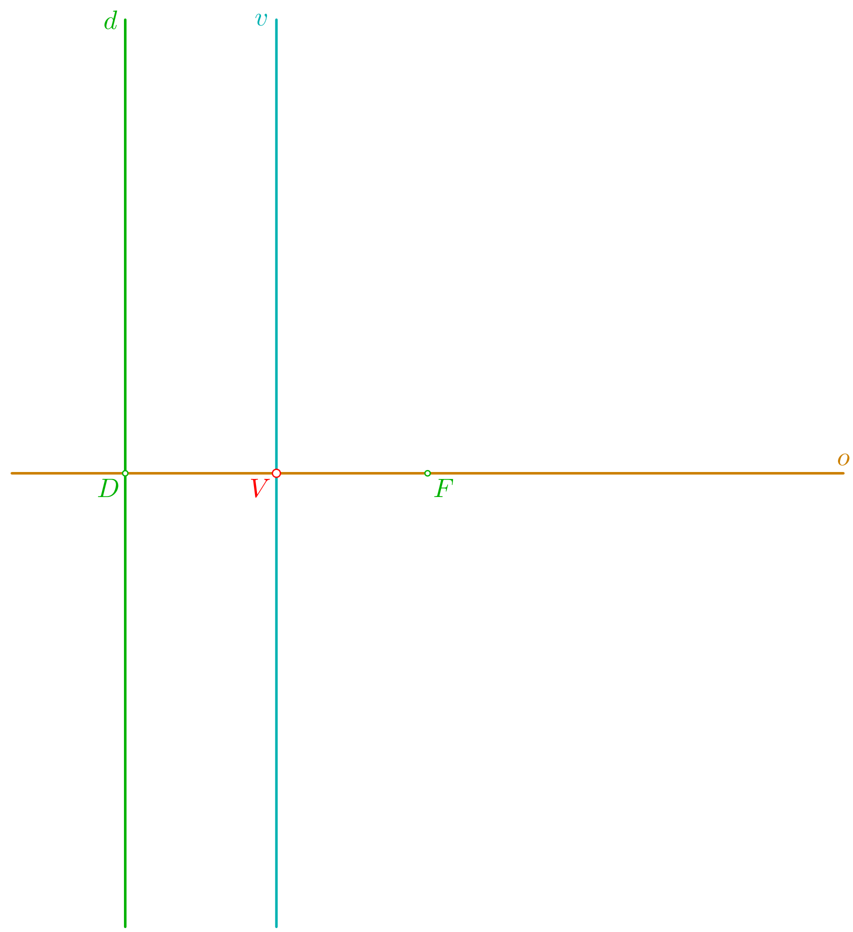
$$p = \{X \in \rho; |Xd| = |FX|, F \notin d\}$$

Konstrukce a základní pojmy

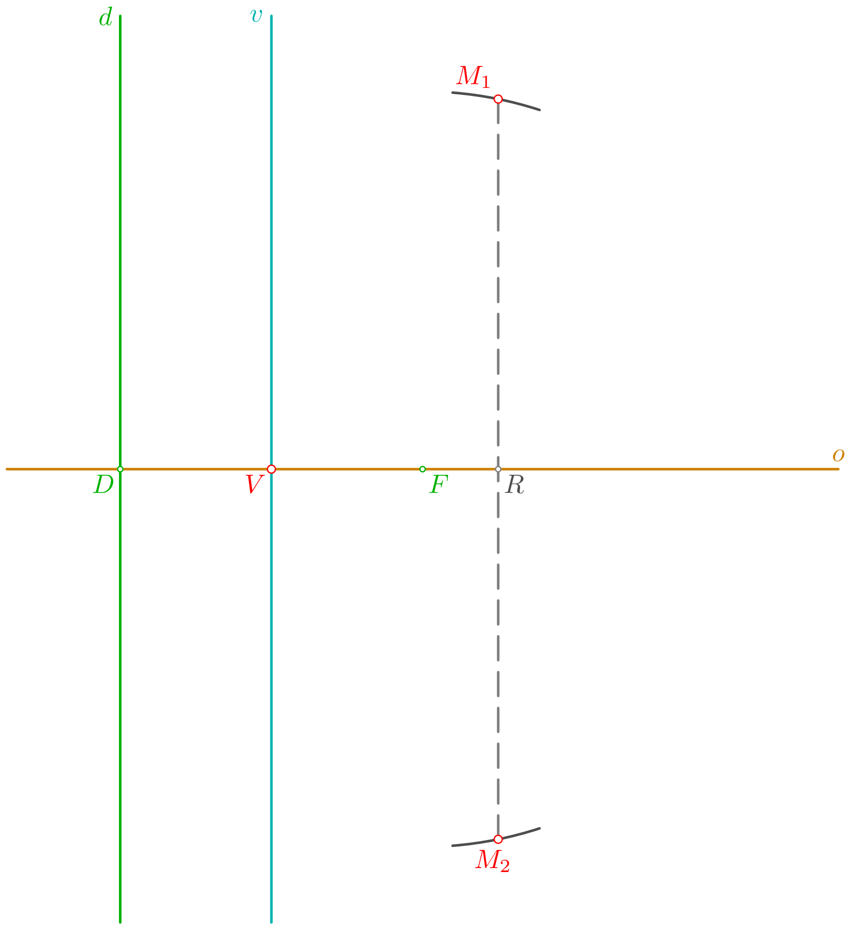
- na vodorovné přímce o zvolme dva různé body D, F a bodem D veďme svislou přímku $d \perp o$; bod F nazveme **ohniskem** a přímka d je tzv. **řídicí přímka** paraboly; přímka $o = DF$ je **osa** paraboly a vzdálenost $|Fd| = |FD|$ ohniska od řídicí přímky je tzv. **parametr** paraboly



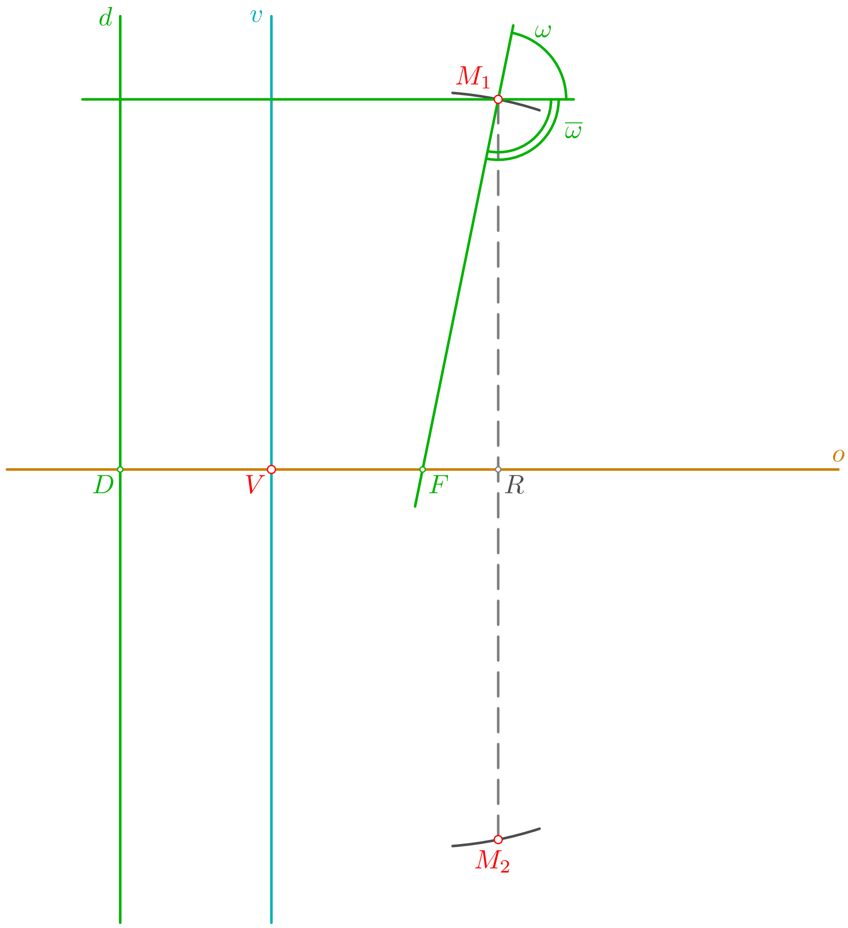
- sestrojme střed V úsečky FD; platí pro něj $|Vd| = |VD| = |VF|$ a podle ohniskové definice je to tedy bod paraboly, říkáme mu **vrchol**; dá se ukázat, že přímka $v \parallel d, V \in v$ je tečna paraboly v bodě V, tedy tzv. **vrcholová tečna**



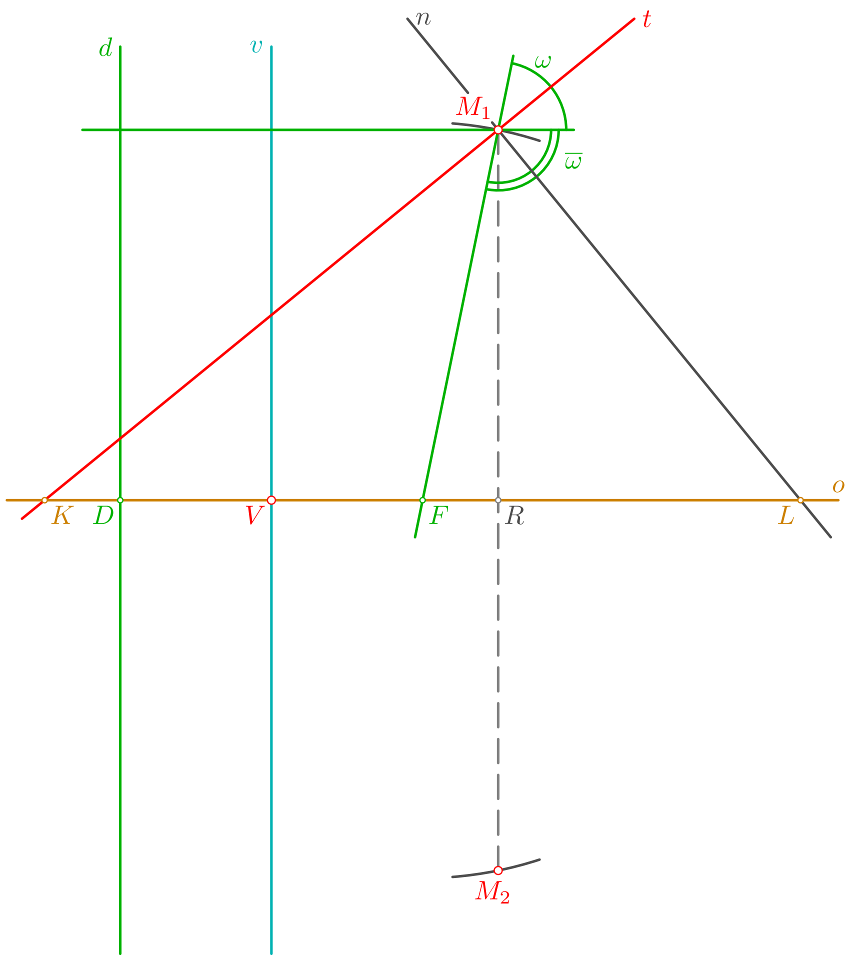
- sestrojme další **obecné body** paraboly: na polopřímce VF zvolme pomocný bod R a veďme jím rovnoběžku s řídicí přímkou d; tuto pomocnou přímku protněme oblouky kružnice opsané kolem ohniska F poloměrem délky $|RD|$; získáme tak dva body M_1, M_2, kde např. pro M_1 platí $|M_1d| = |RD| = |FM_1|$ (analogicky pro M_2); podle ohniskové definice tak snadno můžeme jinou volbou bodu R konstruovat další a další body paraboly p; zvolíme-li bod R ve vnitřním bodě polopřímky VD, pak se pomocná rovnoběžka a kružnice neprotnou a nezískáme tak žádné další body paraboly; z uvedené konstrukce dále vyplývá, že se body paraboly směrem od vrcholu stále více vzdalují od osy o



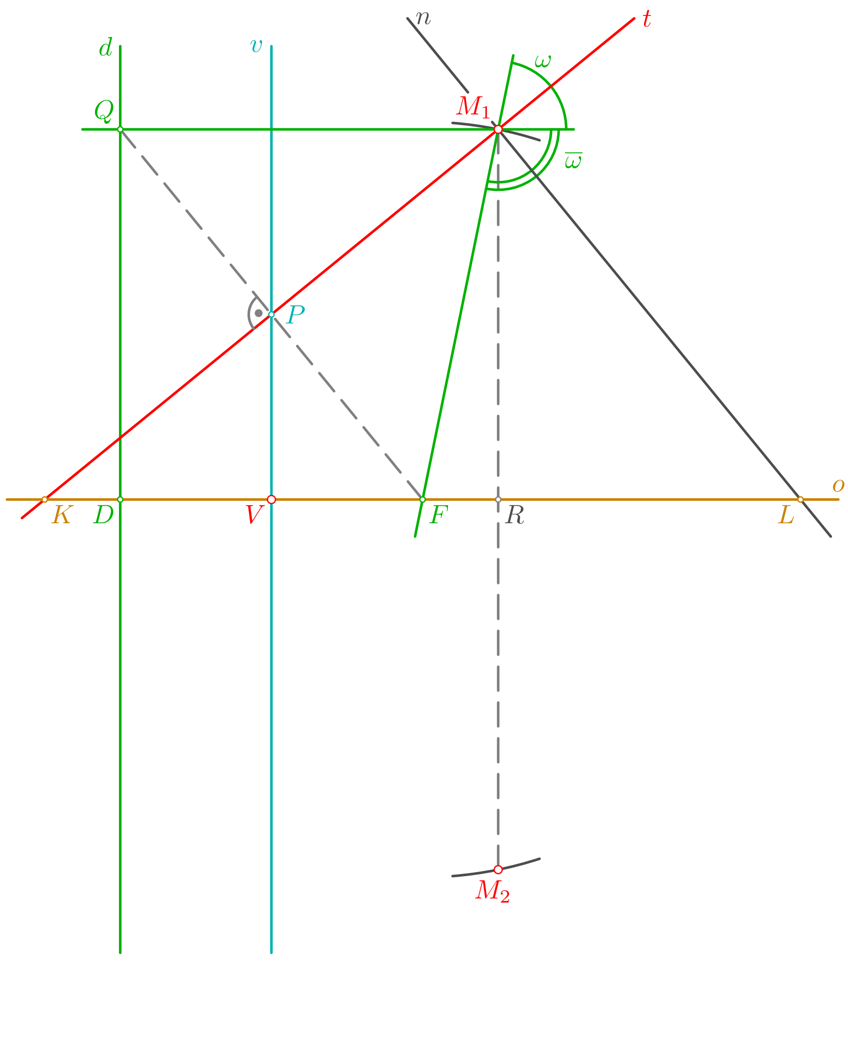
- pro další konstrukce vyberme např. bod M_1, veďme jím rovnoběžku s osou o a přímku FM_1, což jsou tzv. **průvodiče bodu** M_1; ty rozdělí rovinu na čtyři úhly, vždy dva protější vrcholové shodné; úhel, v němž leží bod D (nebo úhel k němu vrcholový) označme ω a nazvěme ho **vnější úhel průvodičů** bodu M_1; některý z úhlů vedlejších k úhlu ω označme $\bar{\omega}$ a říkejme mu **vnitřní úhel průvodičů** bodu M_1



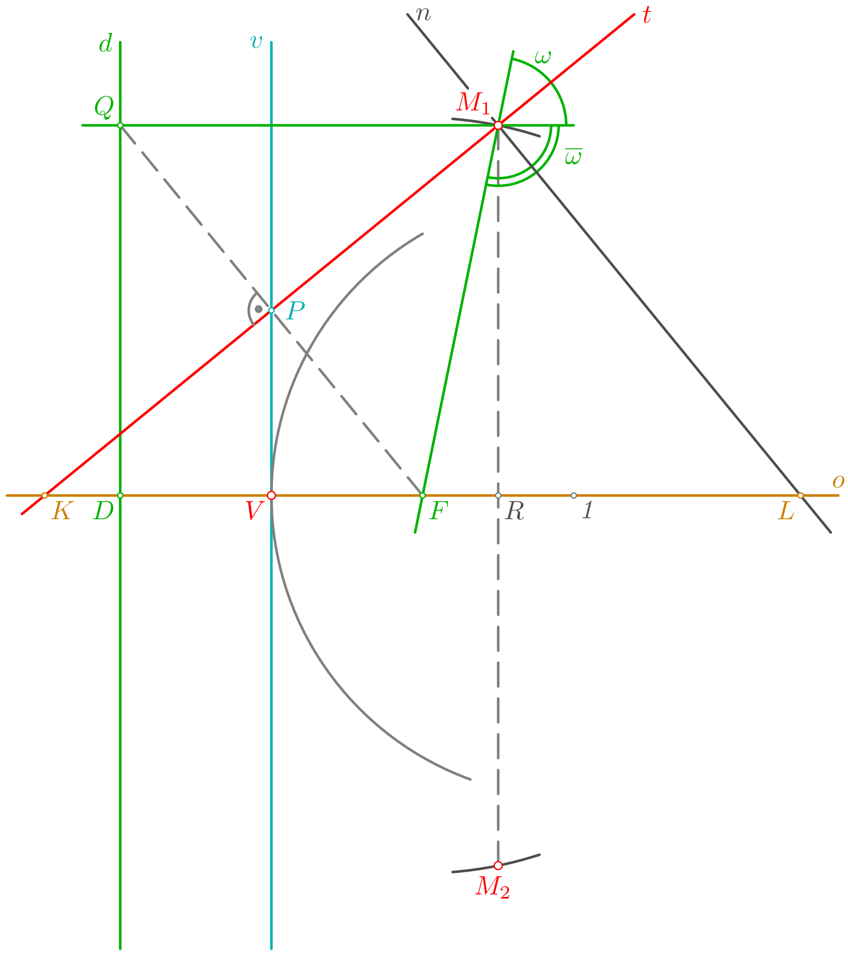
- dá se dokázat, že osa t vnějšího úhlu ω průvodičů bodu M_1 je současně **tečnou** paraboly v bodě M_1; přímka $n \perp t$ je pak **normálou** paraboly v bodě M_1 a současně osou vnitřního úhlu $\bar{\omega}$ průvodičů bodu M_1; to platí v každém bodě paraboly a toto tvrzení je shrnuto v dále uvedené Větě 1; označme ještě body K a L, kde $K = t \cap o$ a $L = n \cap o$; potom úsečka KR je tzv. **subtangenta** bodu M_1 a úsečka LR je jeho **subnormála**; tyto úsečky mají zajímavé vlastnosti, které budou popsány v následujícím kroku a obecně jsou shrnuty ve Větách 4,5,6



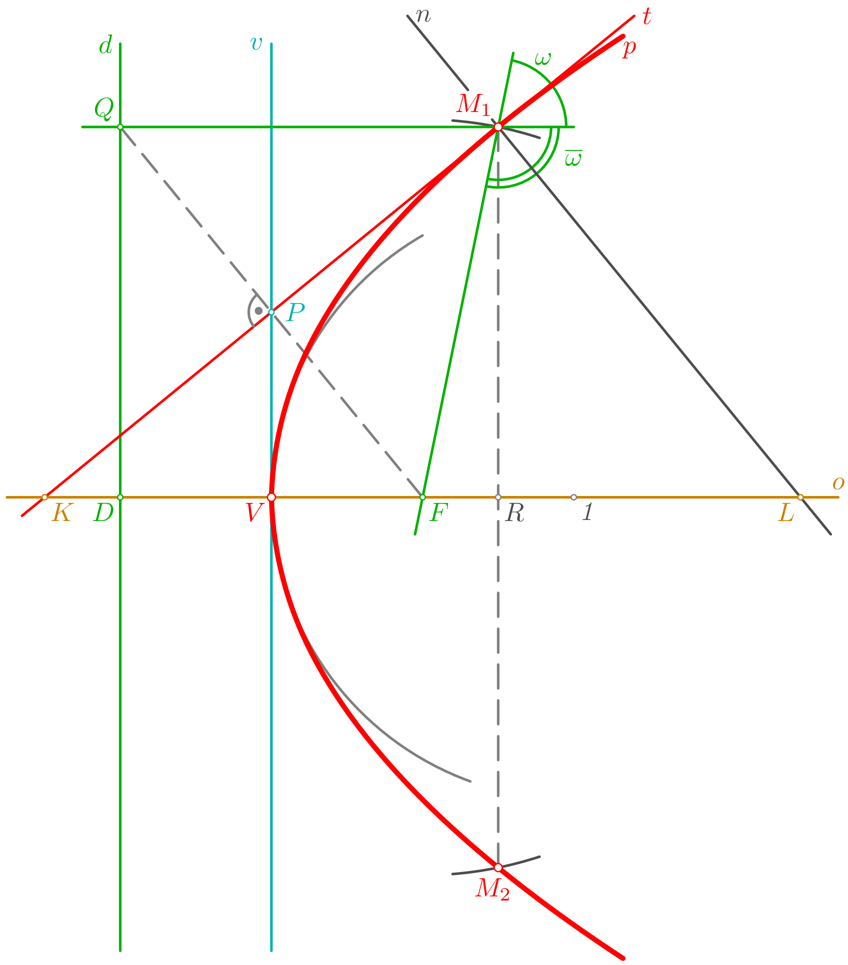
- na základě předchozího odvoďme další vlastnosti paraboly: ohniskem F veďme kolmici k sestrojené tečně t, označme její patu P a sestrojme bod Q souměrně sdružený s ohniskem F podle tečny t; při přesném rýsování musí bod P současně ležet na vrcholové tečně v a bod Q padne na řídicí přímku d a na jeden z průvodičů bodu M_1; totéž platí obecně v každém bodě paraboly (viz Věty 2,3); dále lze odvodit, že bod P je také středem úsečky KM_1, a jestliže body P, M_1 promítneme kolmo na osu o, dostaneme se do vrcholu V a do pomocného bodu R; odtud je tedy vrchol V středem úsečky KR (tu jsme v předchozím kroku nazvali subtangentou bodu M_1), což shrnuje dále uvedená Věta 4; analogicky se body P, M_1 promítnou směrem normály n na osu o do bodů F, L a ohnisko F je tak středem úsečky KL, tj. součtu subtangenty a subnormály bodu M_1, obecně viz Věta 5; trojúhelníky DFQ, RLM_1 jsou shodné, tudíž platí $|LR| = |FD| = |Fd|$, tj. délka subnormály bodu M_1 je rovna parametru paraboly a tuto vlastnost obecně popisuje Věta 6



- pro jednodušší a pěknější vyrýsování paraboly sestrojme v jejím vrcholu V oblouk tzv. **hyperoskulační kružnice**: její poloměr je roven parametru $|Fd|$ paraboly a její střed *1* tedy sestrojíme na polopřímce VF tak, že platí $|1V| = |FD| = |Fd|$; oblouk hyperoskulační kružnice přibližně nahrazuje průběh paraboly v blízkém okolí vrcholu V, ale podobně jako u hyperboly není jeho konstrukce tak významná jako u elipsy



- na závěr je vytažena parabola p, což lze provést od ruky, nebo pomocí vhodného křivítka; parabola je také, stejně jako elipsa a hyperbola, uzavřená křivka, která se v nevlastním bodě osy o dotýká nekonečna, tj. nevlastní přímky dané roviny ρ, v níž leží. . .



□

Věta 1
Tečna (normála) v bodě paraboly půlí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů.

Věta 2
Množina všech bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle jejích tečen je řídicí přímka paraboly.

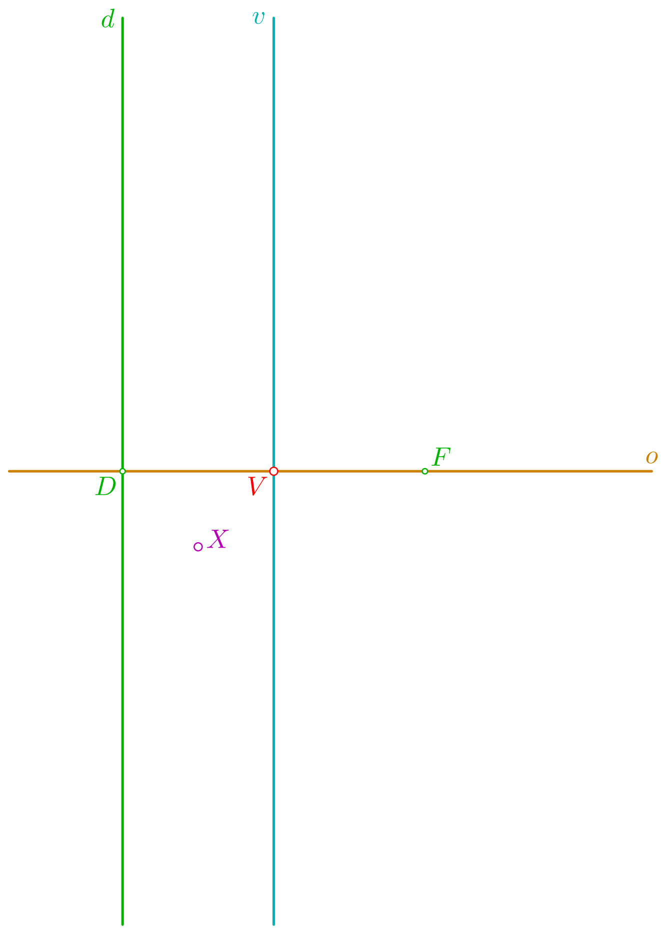
Věta 3
Množina všech pat kolmic spuštěných z ohniska paraboly na její tečny je vrcholová tečna paraboly.
Věta 4
Subtangenta bodu paraboly (vyjma vrcholu) je půlena jejím vrcholem.
Věta 5
Součet subtangenty a subnormály bodu paraboly (vyjma vrcholu) je půlen jejím ohniskem.
Věta 6
Délka subnormály libovolného bodu paraboly (vyjma jejího vrcholu) je rovna parametru paraboly.

Řešené úlohy

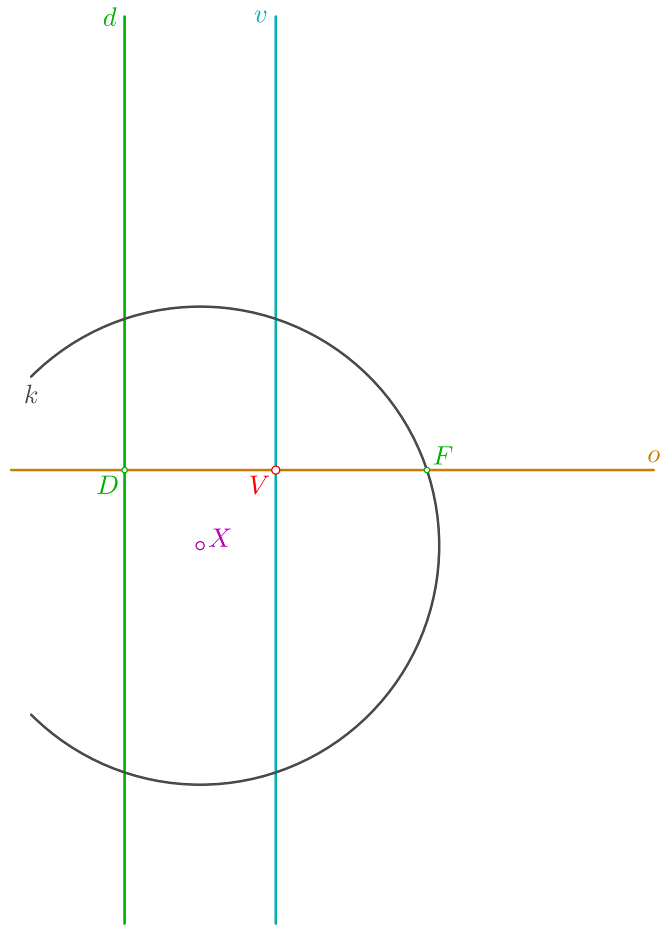
Tečny k parabole daným bodem

Příklad: Bodem X veďte tečny k nenarýsované parabole p, která je dána ohniskem a řídicí přímkou.

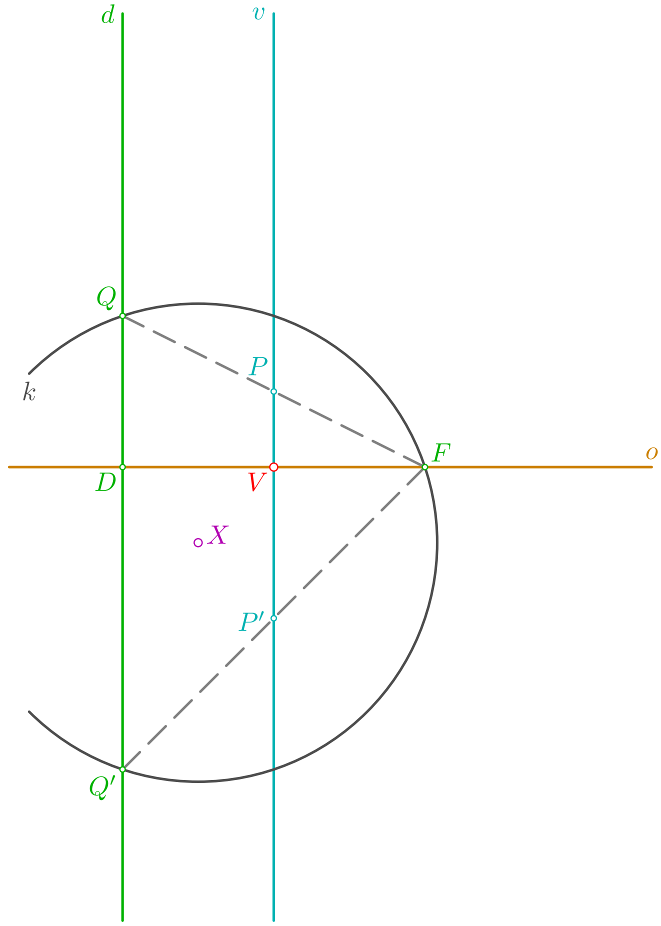
- vodorovně zvolme osu o, na ní ohnisko F a pomocný bod D, kterým jde svisle řídicí přímka $d \perp o$; doplňme vrchol V jako střed úsečky FD a v něm sestrojme vrcholovou tečnu $v \parallel d$; rovněž zvolme bod X, z něhož pomocí výše uvedených vět povedeme tečny k zadané parabole



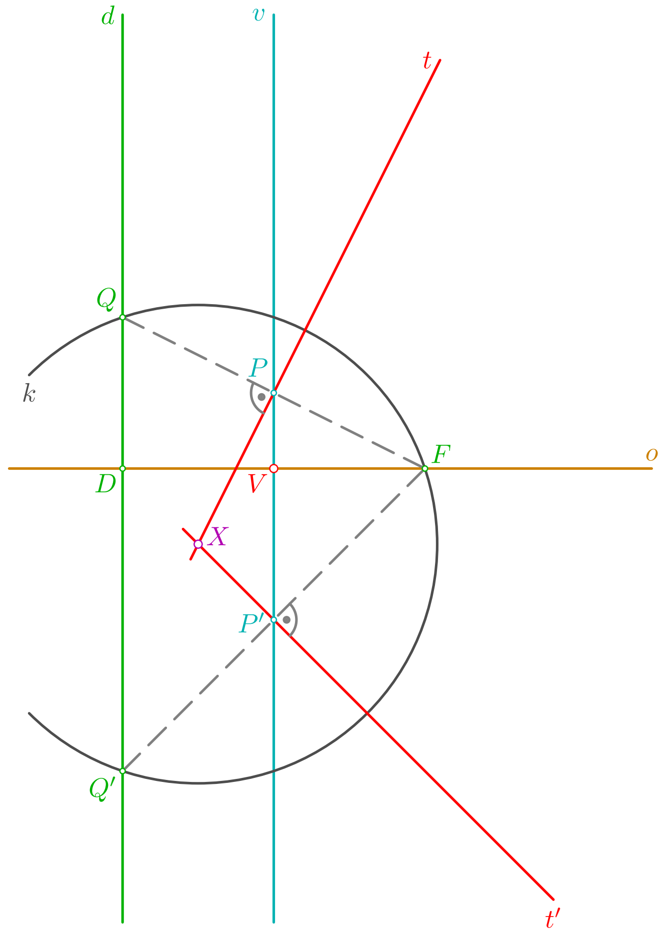
- podle Věty 2 leží body souměrně sdružené s ohniskem F podle hledaných tečen na řídicí přímce d a současně musí mít od bodu X vzdálenost $|FX|$, tj. leží také na kružnici $k(X, |FX|)$



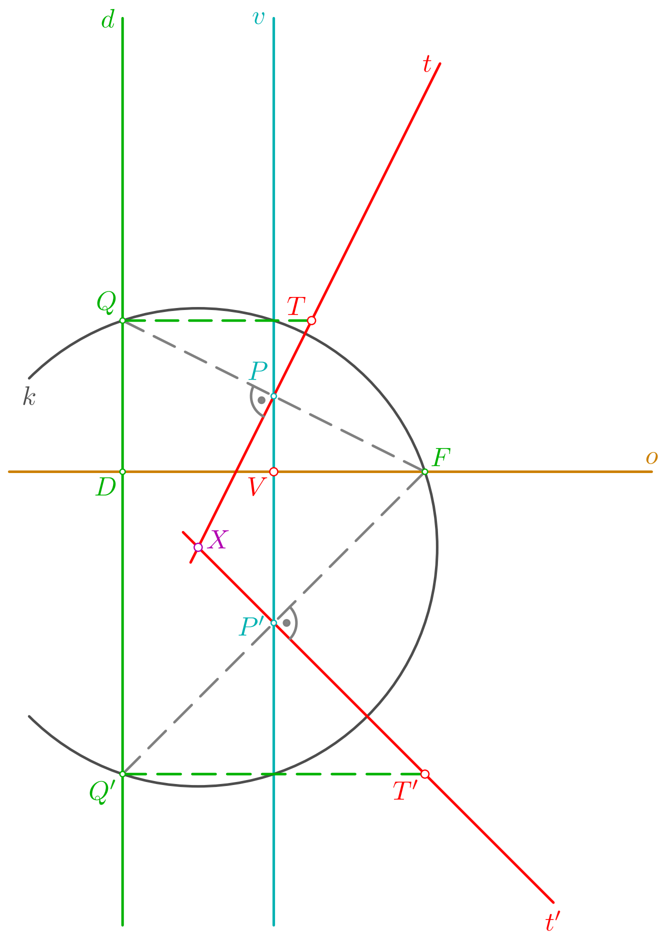
- kružnice k protíná řídicí přímku d v bodech Q, Q'; středy P, P' úseček FQ, FQ' jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F na hledané tečny a podle Věty 3 leží také na vrcholové tečně v



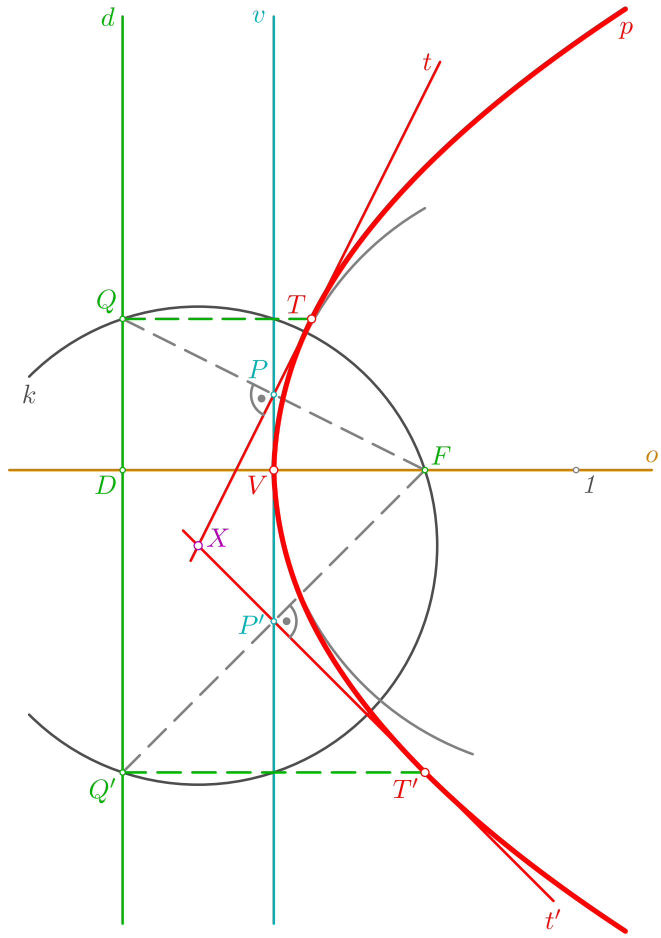
- nyní již můžeme sestrojit tečny $t = XP, t' = XP'$, pro které platí: $t \perp FQ, t' \perp FQ'$; za povšimnutí stojí skutečnost, že paty P, P' musí ležet také na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem XF, čehož lze využít k alternativnímu postupu řešení (konstrukce není v obrázku provedena a je přenechána čtenáři jako cvičení)



- pro body T, T' dotyku tečen t, t' s parabolou platí: $T \in t, TQ \parallel o$ a $T' \in t', T'Q' \parallel o$; přímka TQ, resp. přímka $T'Q'$, je vlastně jedním z průvodičů bodu T, resp. bodu T'; při alternativním způsobu řešení můžeme pro konstrukci bodů T, T' dotyku využít také vlastnosti příslušné subtangenty nebo subnormály, tj. Věty 4,5,6 – konkrétně nechť si to čtenář promyslí a případně provede jako cvičení. . .



- nyní již můžeme doplnit oblouk hyperoskulační kružnice ve vrcholu V a vyrýsovat parabolu p, která se v bodech T, T' dotýká tečen t, t' vedených z daného bodu X



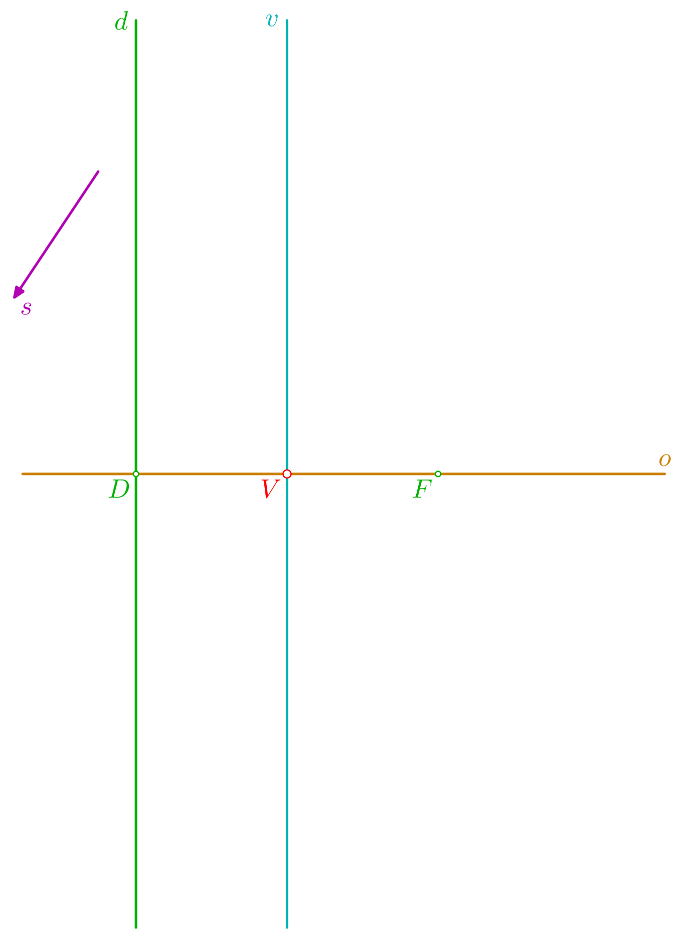
□

Diskuze: pokud kružnice $k(X, |XF|)$ protíná řídicí přímku d ve dvou bodech, resp. se jí dotýká v jednom bodě, resp. nemají žádný společný bod, pak bod X leží ve vnější oblasti paraboly p, resp. bod X je bodem paraboly p, resp. bod X leží ve vnitřní oblasti paraboly p, a lze jím vést dvě různé tečny, resp. jedinou (dvojnásobnou) tečnu, resp. jím nelze vést žádnou tečnu k dané parabole p. Při alternativním způsobu řešení rozhoduje o počtu tečen vzájemná poloha vrcholové tečny v a Thaletovy kružnice nad průměrem FX.

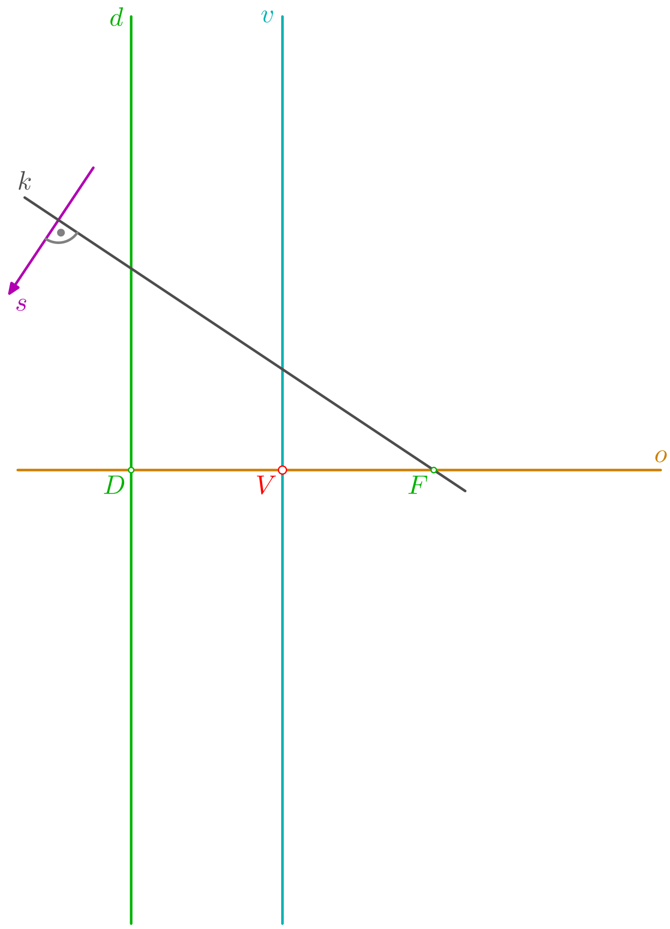
Tečny k parabole daného směru

Příklad: K nenarýsované parabole p, která je dána ohniskem a řídicí přímkou, veďte tečny směru s (tj. rovnoběžné s přímkou s).

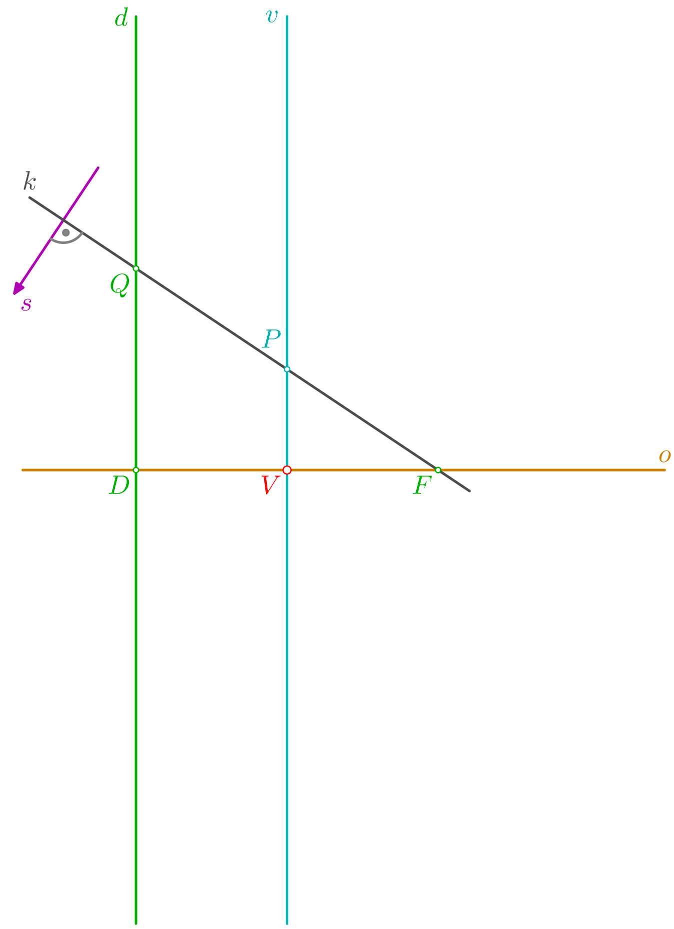
- vodorovně zvolme osu o, na ní ohnisko F a pomocný bod D, kterým jde svisle řídicí přímka $d \perp o$; doplňme vrchol V jako střed úsečky FD a v něm sestrojme vrcholovou tečnu $v \parallel d$; rovněž zvolme směr s, s nímž mají být hledané tečny rovnoběžné



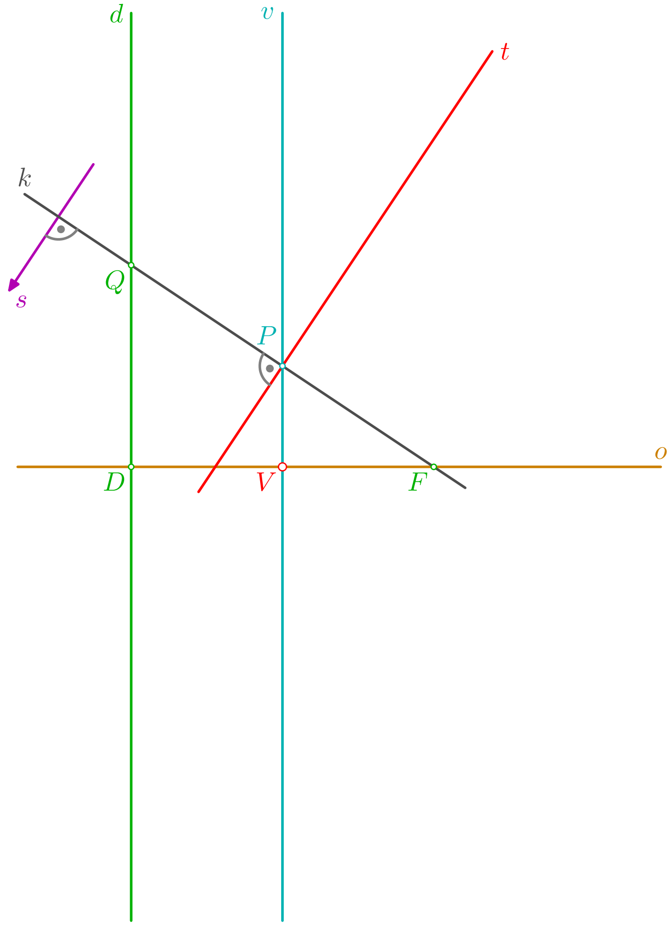
- podle Věty 2 leží body souměrně sdružené s ohniskem F podle hledaných tečen na řídicí přímce d a současně musí ležet na kolmici k vedené ohniskem F kolmo k danému směru s



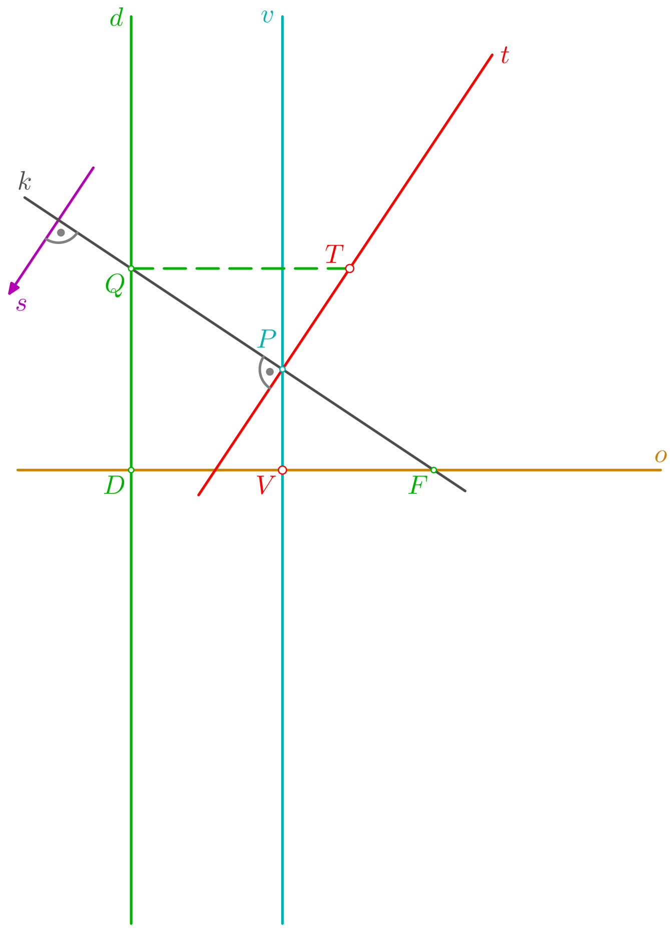
- přímky k, d se protínají v bodě Q; střed P úsečky FQ je pata kolmice spuštěné z ohniska F na hledanou tečnu a podle Věty 3 leží také na vrcholové tečně v



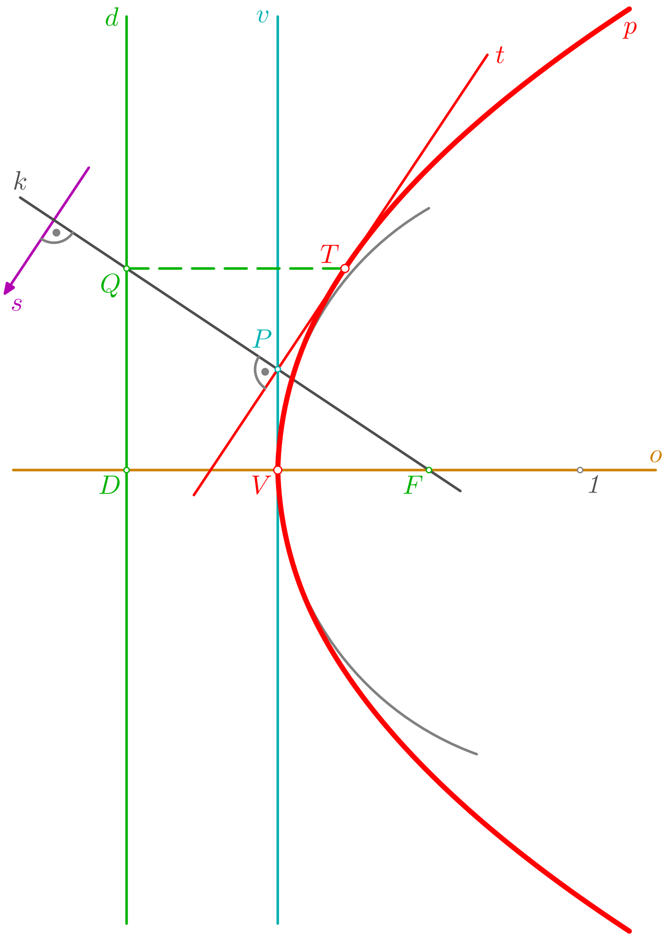
- nyní již můžeme sestrojit hledanou tečnu t, kde $t \parallel s$ (tj. $t \perp k$) a $P \in t$



- pro bod T dotyku tečny t s parabolou platí: $T \in t, TQ \parallel o$; přímka TQ je vlastně jedním z průvodičů bodu T; alternativní způsob konstrukce bodu T pomocí vlastností jeho subtangenty nebo subnormály (viz Věty 4,5,6) jsou přenechány čtenáři jako cvičení...



- nyní již můžeme doplnit oblouk hyperoskulační kružnice ve vrcholu V a vyrýsovat parabolu p, která se v bodě T dotýká tečny t rovnoběžné s daným směrem s



$\square$

Diskuze: Jsou-li řídicí přímka d a přímka k vedená ohniskem F kolmo k danému směru s různoběžné (tj. směr s je různoběžný s osou o), resp. rovnoběžné (tj. $s \parallel o$), pak lze sestrojit právě jednu tečnu, resp. nelze sestrojit žádnou tečnu paraboly p daného směru s.