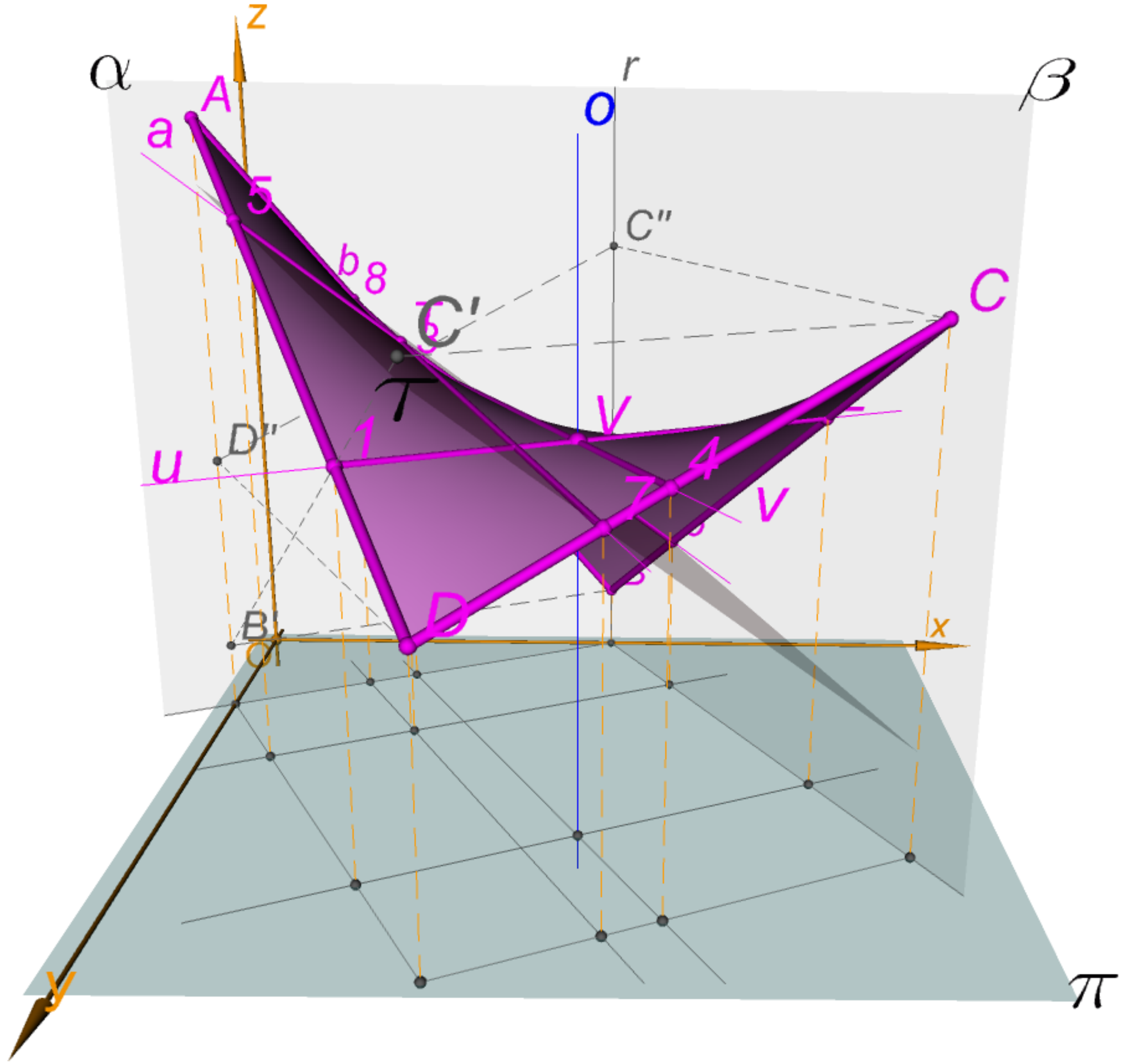
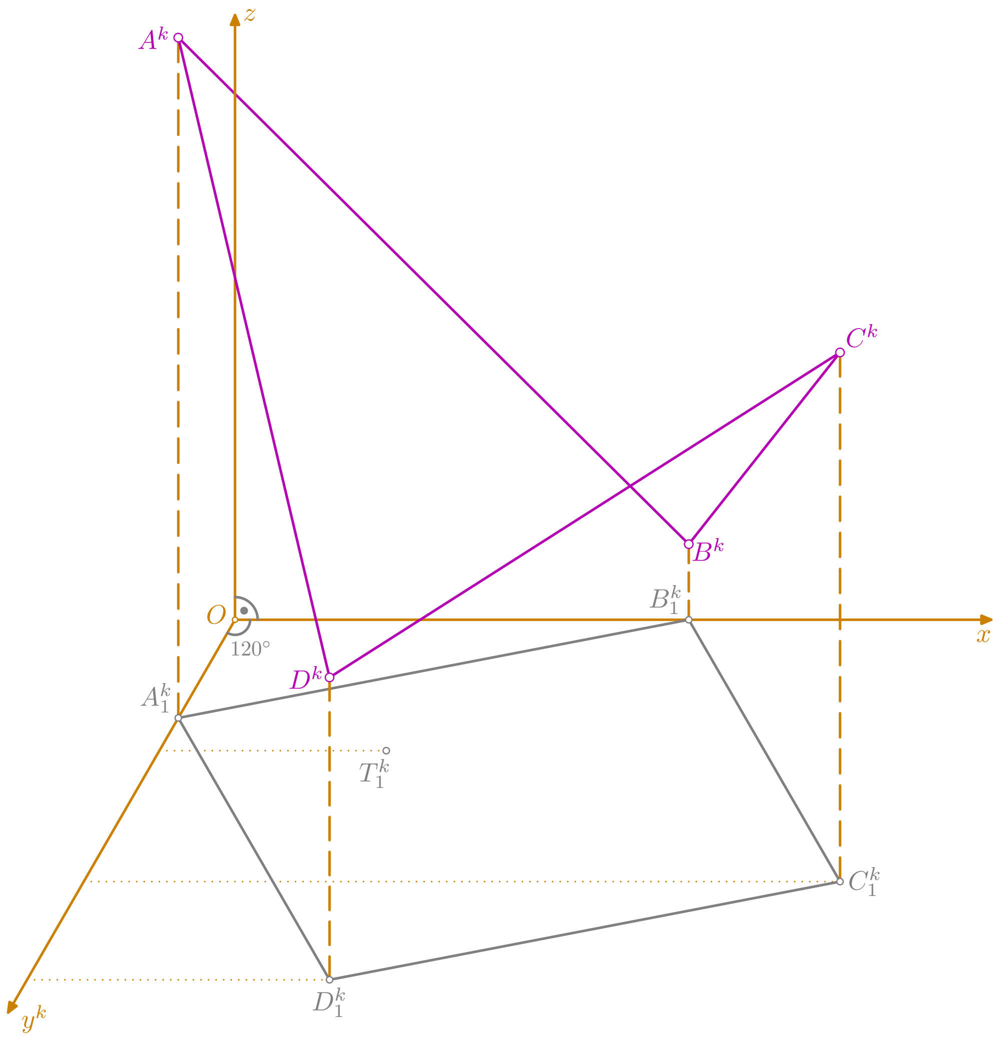


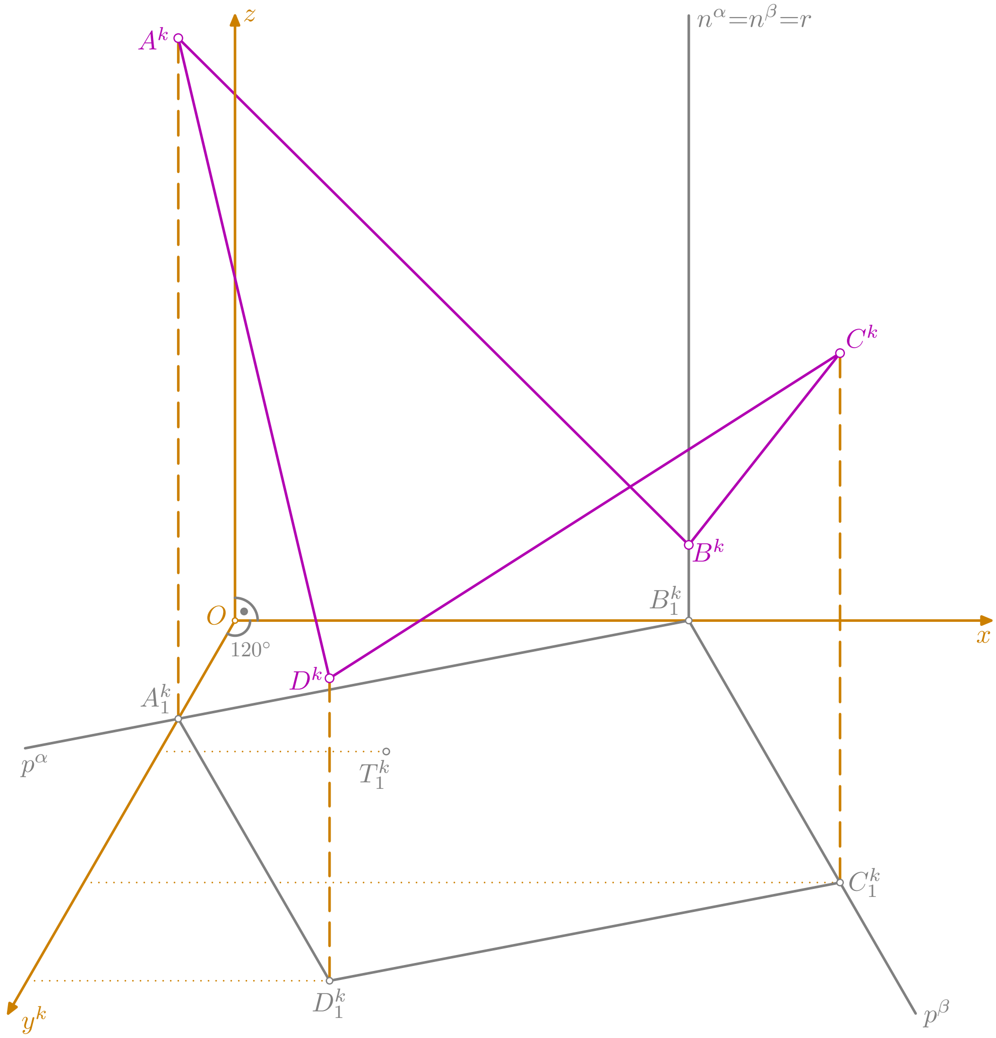
Sedlová plocha (hyperbolický paraboloid) v kosoúhlém promítání do nárysny

Řešené úlohy

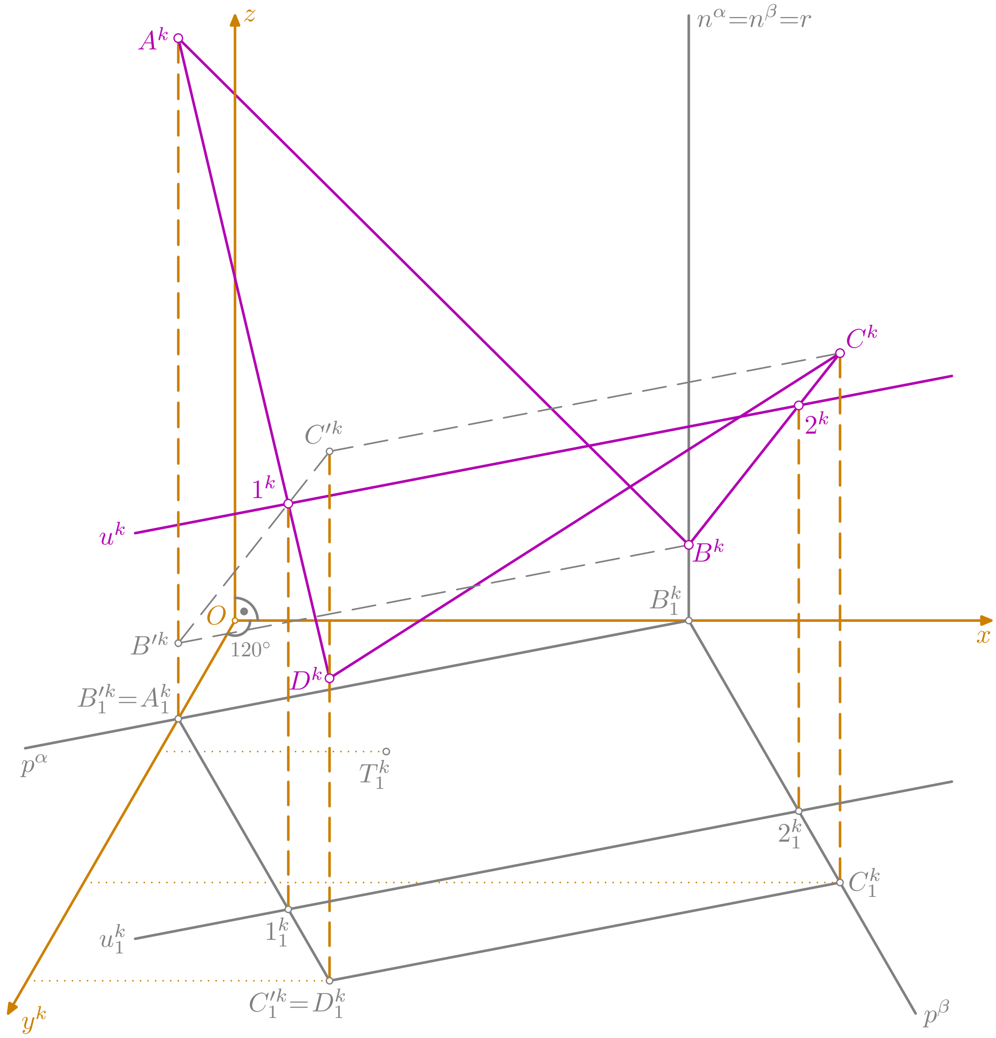
Příklad: V kosoúhlém promítání do nárysny ν $(\omega = 120°, q = 1/2)$ sestrojte vrchol V, osu o a tečnou rovinu τ v bodě T hyperbolického paraboloidu, který je dán zborceným čtyřúhelníkem $ABCD$; $A[0;3;9], B[6;0;1], C[10;8;7], D[4;11;4], T[3;4;?]$. (Počátek O zvolte 7 cm zleva a 13 cm zdola.)



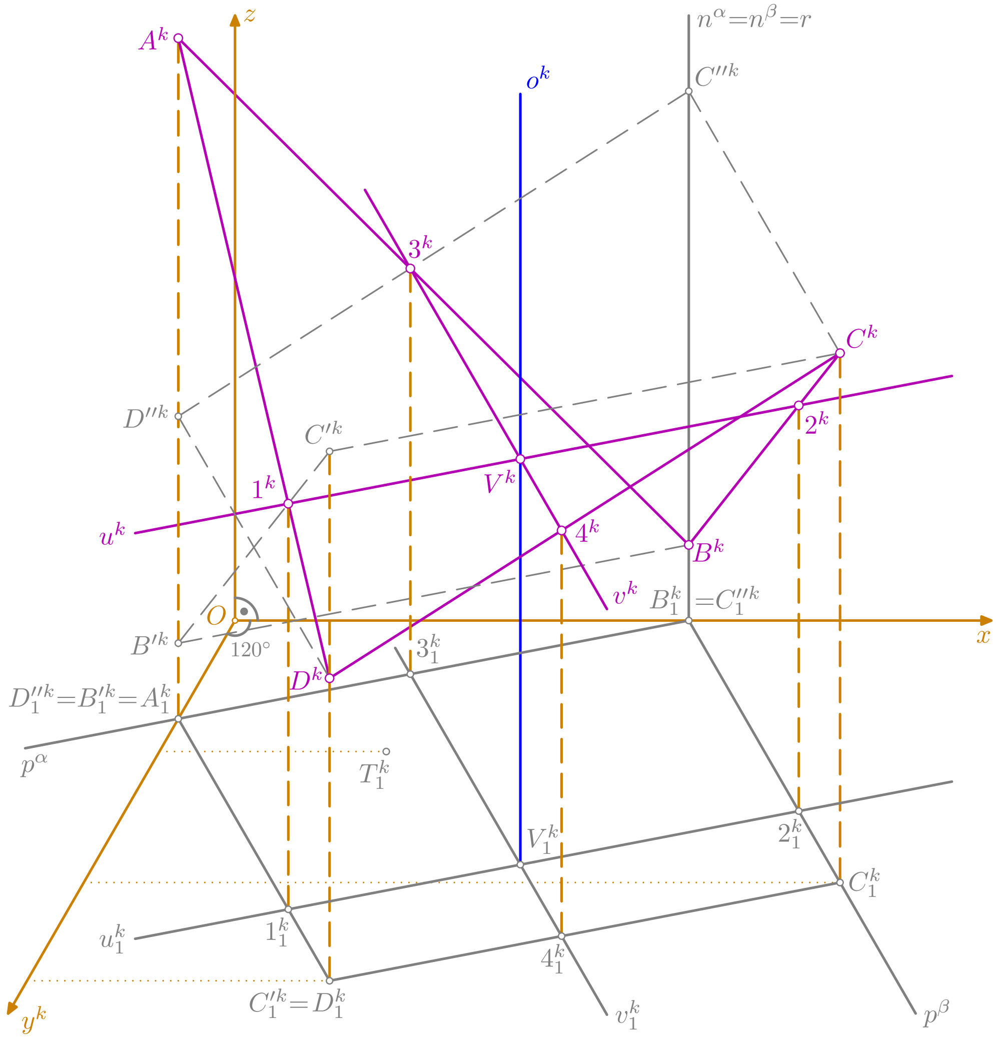
- v kosoúhlém promítání do nárysny se zachová pravý úhel mezi osami x, z, osa y se zkosí pod úhlem $\omega = 120°$; při výnášení souřadnic jednotlivých bodů postupujeme nejlépe takto: nejprve naneseme na kosoúhlý průmět y^k osy y příslušnou y-ovou souřadnici násobenou zadaným kvocientem $q = 1/2$, poté uděláme rovnoběžku s osou x (v obrázku naznačeno tečkovaně), na ni naneseme x-ovou souřadnici daného bodu ve skutečné délce, čímž dostaneme příslušný kosoúhlý půdorys, nad který již jen naneseme jeho z-ovou souřadnici opět ve skutečné délce; pro bod T můžeme ovšem zatím sestrojit jeho kosoúhlý půdorys T_1^k; máme tak kosoúhlý průmět zborceného čtyřúhelníka $ABCD$ i jeho půdorysu $A_1B_1C_1D_1$ a můžeme se pustit do samotného řešení úlohy



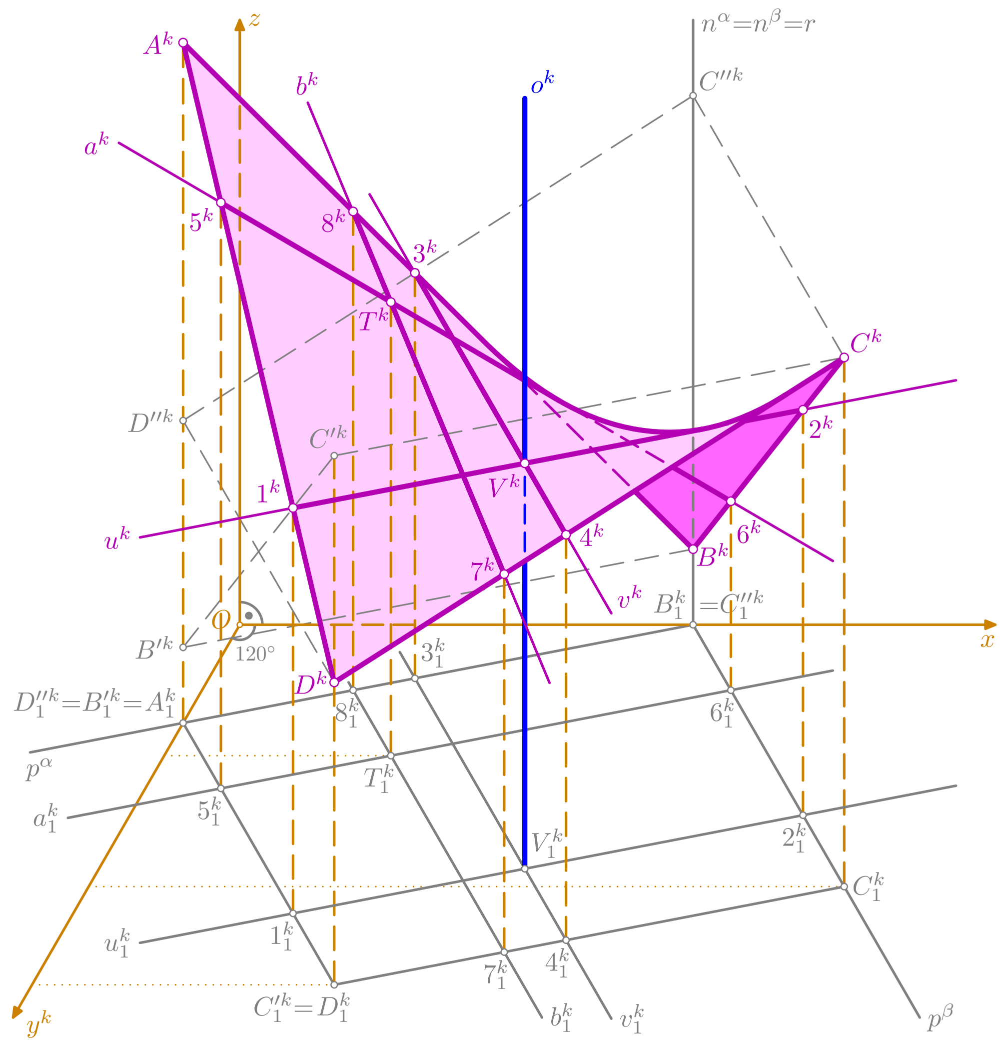
- vektory $D_1 - A_1 = [4;11;0] - [0;3;0] = (4;8;0)$ a $C_1 - B_1 = [10;8;0] - [6;0;0] = (4;8;0)$ jsou rovnoběžné a stejně dlouhé, půdorys $A_1B_1C_1D_1$ je tedy rovnoběžník, což se v průmětu také zachovalo; dokonce pro skalární součin vektorů $D_1 - A_1 = (4;8;0)$ a $B_1 - A_1 = [6;0;0] - [0;3;0] = (6;-3;0)$ platí $(4;8;0)\cdot(6;-3;0) = 0$, tj. tyto vektory jsou kolmé a rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$ je tedy obdélník – to se ovšem už v průmětu nezachová; proložme úsečkou AB svislou rovinu $\alpha = ABA_1$; podle předchozích výpočtů je protější strana CD s rovinou α nutně rovnoběžná, a rovina α je tak jednou tzv. řídicí rovinou paraboloidu, která určuje jeden přímkový regulus plochy; analogicky je rovina $\beta = BCB_1$ druhou řídicí rovinou, která určuje druhý regulus tvořicích přímek; obě roviny roviny se protínají v přímce $r = \alpha \cap \beta$, která splývá s jejich společnou nárysnou stopou $n^{\alpha} = n^{\beta}$



- nejprve se pokusme sestrojit vrchol V plochy; ten leží v průsečíku vrcholových tečen u, v, jež musí být podle teorie plochy kolmé k průsečnici r řídících rovin α, β; sestrojme tedy vrcholovou tečnu u prvního regulu, která musí být rovnoběžná s půdorysnou π (aby byla kolmá k r), současně rovnoběžná s rovinou α (aby patřila prvnímu regulu) a ještě musí protínat přímky AD, BC druhého regulu; souhrnně řečeno, vrcholová tečna u je příčkou mimoběžek AD, BC rovnoběžná s přímkou $p^\alpha = \alpha \cap \pi$; její konstrukci proveďme takto: úsečku BC posuňme rovnoběžně se stopou $p^\alpha = A_1B_1$ do roviny ADA_1, čímž získáme úsečku $B'C'$, a její průsečík 1 s úsečkou AD je jedním bodem hledané přímky u; ta je rovnoběžná s p^α a musí úsečku BC protnout v bodě 2; správnost konstrukce můžeme ověřit sestrojením půdorysu $u_1 = 1_1 2_1$, pro který musí platit $u_1 \parallel u$; tím jsme popsali situaci přímo v prostoru, její kosoúhlý průmět je názorně proveden v obrázku…



- analogicky jako v předchozím kroku se strojíme vrcholovou tečnu v druhého regulu jako příčku mimoběžek AB, CD rovnoběžnou se stopou $p^\beta = \beta \cap \pi$; tentokrát posuňme úsečku CD rovnoběžně s přímkou $p^\beta = B_1C_1$ do roviny α, čímž získáme úsečku $C''D''$, a její průsečík 3 s úsečkou AB je jedním bodem hledané tečny v; ta je rovnoběžná s přímkou p^β a protíná úsečku CD v bodě 4; opět můžeme v půdorysu ověřit, že platí $v_1 \parallel v$; přímky u, v určují tzv. vrcholovou tečnou rovinu, jejímž bodem dotyku je vrchol $V = u \cap v$ plochy; bodem V pak prochází osa o, která je rovnoběžná s průsečnicí r řídicích rovin α, β; tím máme horší část úlohy vyřešenu...



- zbývá dokončit tečnou rovinu τ v bodě T, pro nějž máme zadán jeho půdorys T_1; sestrojme proto přímky a, b obou regulů plochy, které se budou v bodě T protínat a současně tak budou určovat hledanou rovinu τ; pro půdorys a_1 přímky a prvního regulu platí $a_1 \parallel p^\alpha$ a $T_1 \in a_1$; průsečíky $5_1, 6_1$ přímky a_1 se stranami A_1D_1, B_1C_1 jsou půdorysy bodů $5, 6$, které leží na úsečkách AD, BC a určují tedy přímku $a = 56$; analogicky pro půdorys b_1 přímky b druhého regulu platí $b_1 \parallel p^\beta$ a $T_1 \in b_1$; pak je $b = 78$, kde půdorysy $7_1, 8_1$ bodů $7, 8$ leží v průsečících přímky b_1 se stranami C_1D_1, A_1B_1; přímky a, b se protínají v bodě T, který leží nad svým půdorysem T_1; současně platí $\tau = ab$, čímž je úloha vyřešena; na závěr je v obrázku naznačen obrys plochy, určena viditelnost jednotlivých tvořících úseček a různě sytou barvou jsou odlišeny horní a spodní část plochy...

□