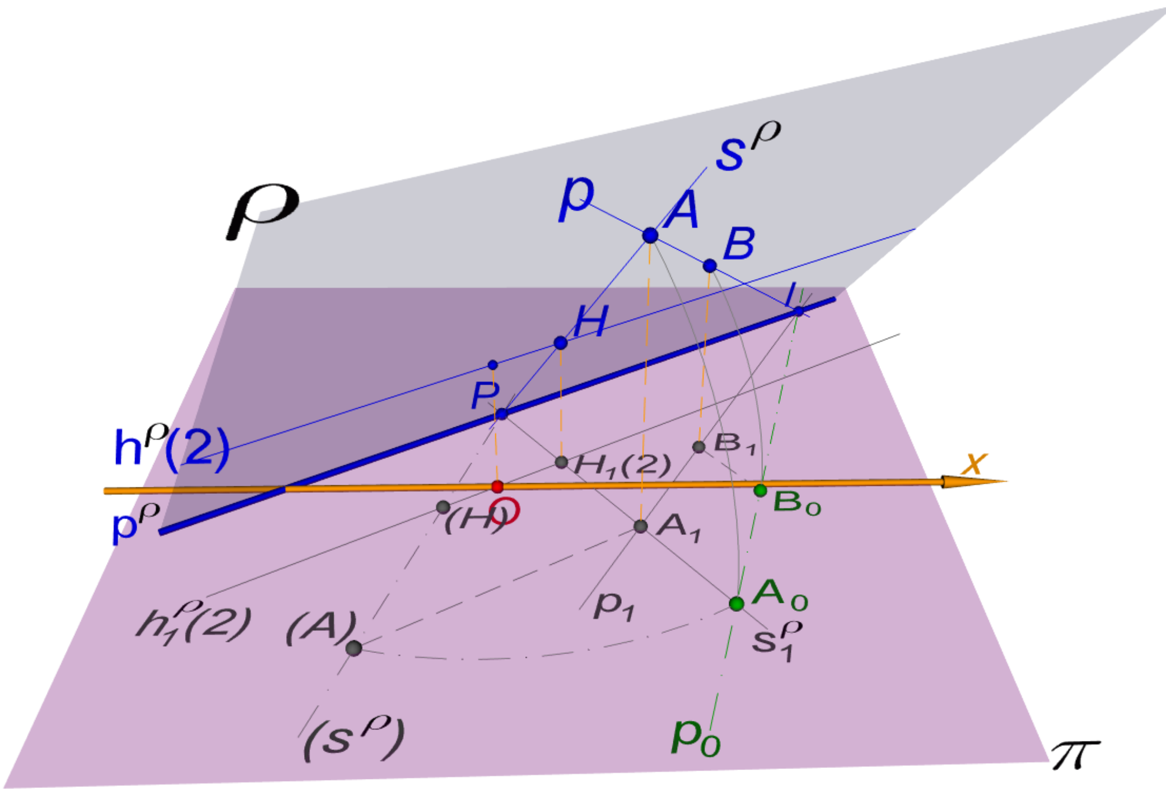
Metrické úlohy v kótovaném promítání

Otáčení roviny

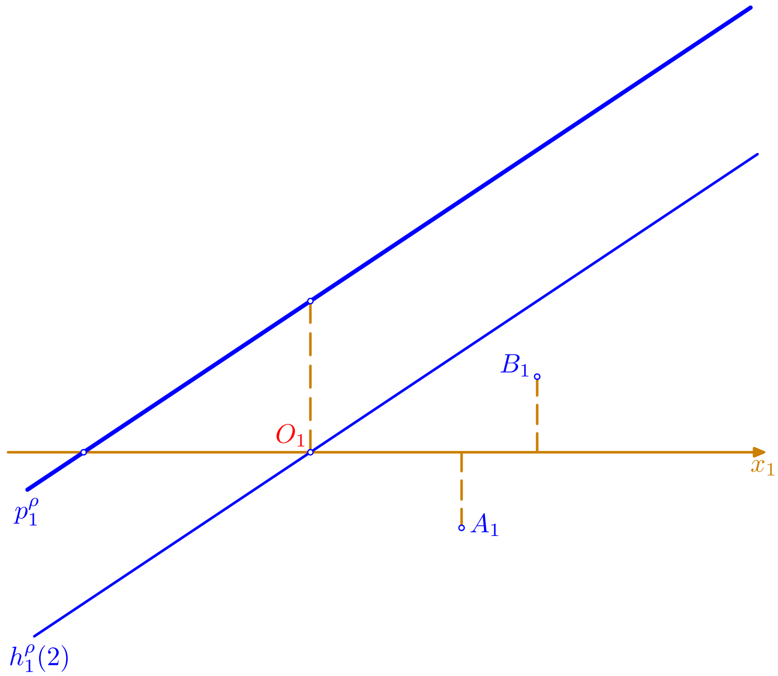


Výklad

- při otáčení obecné roviny ρ do průmětny π kolem stopy p^{ρ} se bod $A \in \rho$ pohybuje po kružnici, jejíž střed P je stopníkem tzv. **spádové přímky** (ta je kolmá k hlavním přímkám) a poloměr otáčení se najde sklopením její promítací roviny

- rovinu lze kolem stopy otáčet na dvě strany – o větší nebo menší úhel (v následujícím příkladě je provedeno pouze otočení o menší úhel)

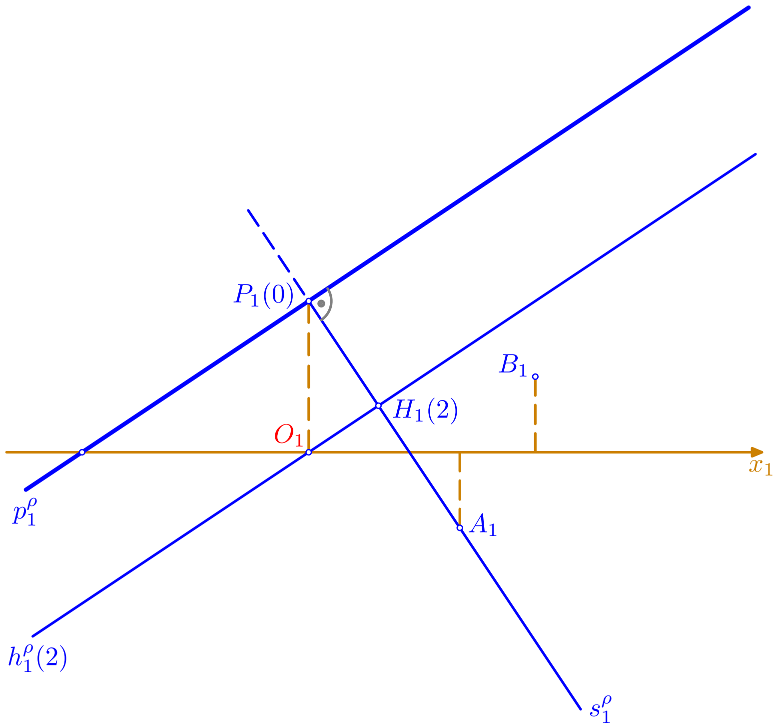
- otáčení roviny do průmětny kolem stopy vždy indukuje **osovou afinitu mezi oběma rovinami** a její kolmý průmět je pak **pravoúhlou afinitou mezi průměty** (vzor A_1) **a otočenými polohami** (obraz A_0) – tuto afinitu lze s výhodou využít při otáčení složitějších útvarů



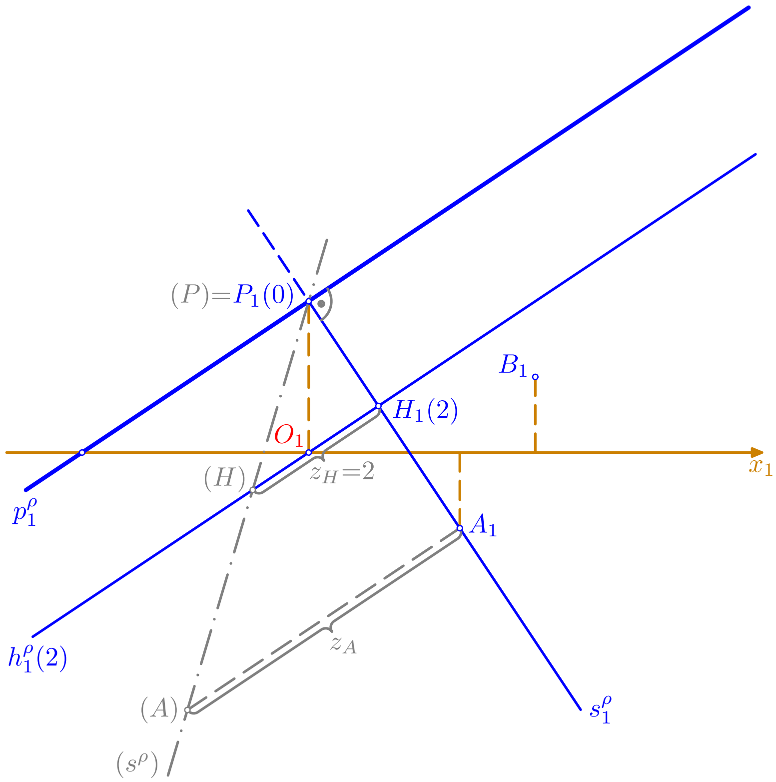
Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte otočené polohy bodů A, B ležících v rovině ρ; $\rho(-3; -2; 2)$, $A[2; 1; ?]$, $B[3; -1; ?]$.

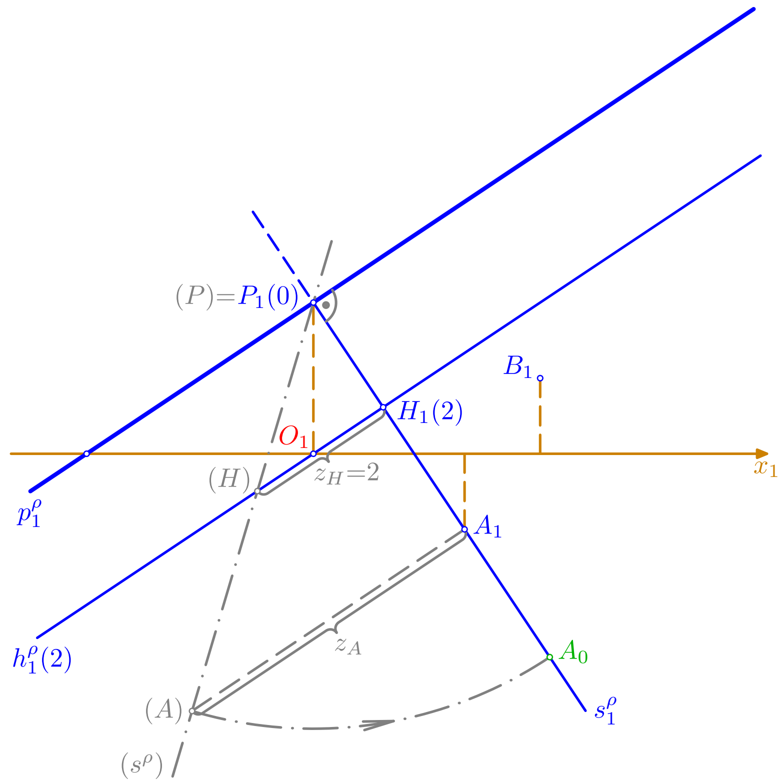
- podle zadání určeme rovinu ρ standardním způsobem – stopou p_1^ρ a průmětem $h_1^\rho(2)$ hlavní přímky, která má kótu 2; pro body $A, B \in \rho$ doplňme podle souřadnic jejich průměty A_1, B_1



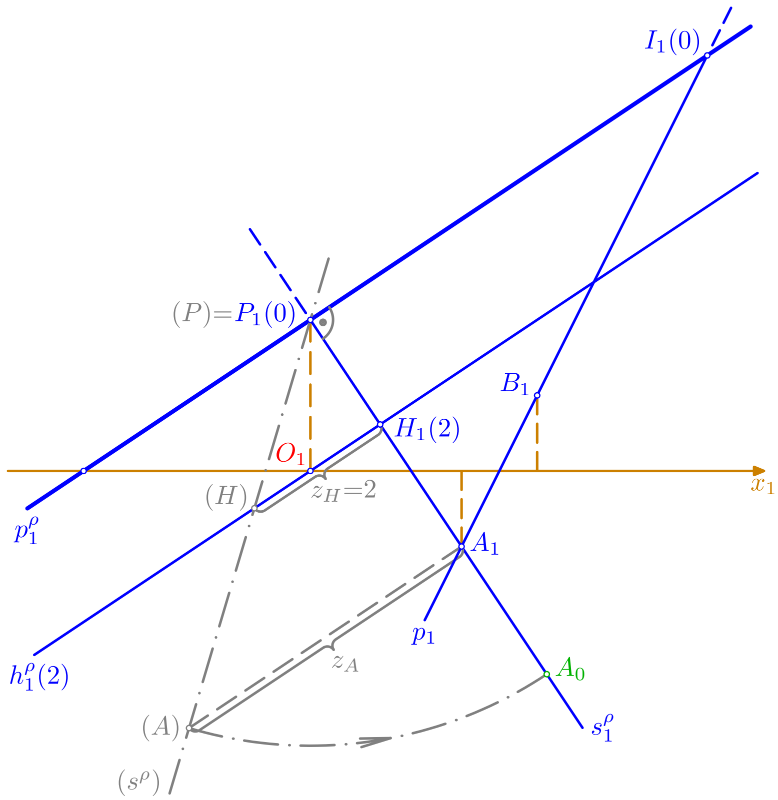
- bodem A veďme spádovou přímku s^ρ roviny ρ, sestrojme její stopník P a průsečík H s hlavní přímkou $h^\rho(2)$; platí $s^\rho \perp p^\rho$ a podle Věty o pravoúhlém průmětu pravého úhlu je také $s_1^\rho \perp p_1^\rho$, $A_1 \in s_1^\rho$; pro stopník $P = s^\rho \cap \pi$ platí $P = P_1(0) = p_1^\rho \cap s_1^\rho$; podobně je bod $H_1(2) = s_1^\rho \cap h_1^\rho(2)$ průmětem výše zmíněného bodu H



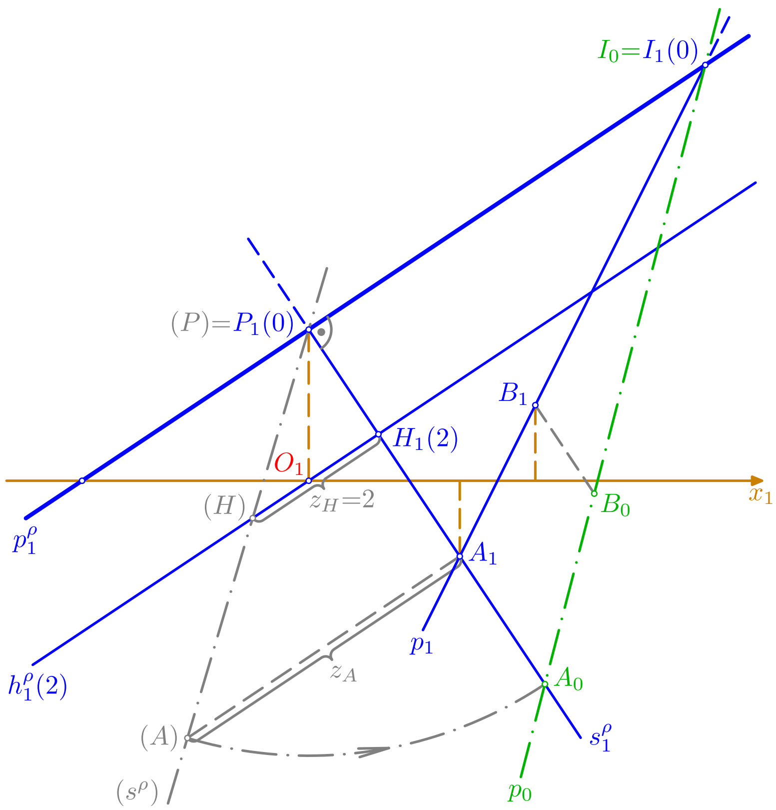
- poloměr otáčení bodu A určíme ve sklopení promítací roviny sestrojené spádové přímky s^ρ; sestrojme sklopené polohy $(P),(H)$ bodů P,H, přičemž $(P)=P_1(0)$ a $|(H)H_1(2)|=$ $=z_H=2$, a doplňme sklopenou polohu (s^ρ) spádové přímky s^ρ; teprve nyní můžeme sestrojit také sklopenou polohu (A) bodu A a určit tak jeho z-ovou souřadnici $z_A{=}|(A)A_1|$; ze zadání roviny $\rho(-3;-2;2)$ lze snadno sestavit tzv. úsekový tvar její rovnice, tj. $\rho:\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1$, a ten pak upravit na rovnici obecnou, $\rho: 2x+3y-3z+6=0$; pro bod $A[2;1;z_A]\in\rho$ tedy dostáváme $4+3-3z_A+6=0$ a odtud $z_A=\frac{14}{3}=4{,}\bar{3}$, což je možné přibližně ověřit měřením přímo v obrázku…



- nyní můžeme provést otočení bodu A tzv. **ve sklopení**; středem otáčení je bod $P_1(0)$ a poloměr otáčení udává délka $|AP| = |(A)(P)|$; otočená poloha A_0 bodu A padne na přímku s_1^ρ, zřejmě jsou dvě možnosti otočení – o menší nebo o větší úhel; v tomto příkladě zvolme první variantu otočení o menší úhel



- při otáčení bodu B můžeme nyní postupovat stejně jako u bodu A, ale můžeme postupovat také jinak: sestrojme přímku $p = AB$ a její stopník $I = p \cap \pi$; v průmětu je $p_1 = A_1B_1$ a $I_1(0) = p_1 \cap p_1^\rho$



- bod $I \in p^\rho$ zůstává při otáčení na místě, tj. platí $I_0 = I_1(0)$, a přímka p se tedy musí otočit do přímky $p_0 = I_0A_0$ (v otočení se útvary rýsují **čerchovaně** podobně jako ve sklopení); otočená poloha B_0 bodu B leží na přímce p_0 a současně je $B_0B_1 \parallel s_1^\rho$, resp. $B_0B_1 \perp p_1^\rho$; jak bylo uvedeno v úvodu, mezi průměty A_1, B_1 bodů A, B a jejich otočenými polohami A_0, B_0 existuje vztah **pravoúhlé osové afinity**, jejíž osou je stopa p_1^ρ a směr určuje přímka s_1^ρ; odpovídající si přímky p_1, p_0 se protínají na ose v samodružném bodě $I_0 = I_1$; a na závěr ještě uveďme několik výpočtů, jejichž výsledek lze opět překontrolovat měřením v obrázku: dosazením známých souřadnic bodu $B[3; -1; z_B] \in \rho$ do rovnice roviny $\rho : 2x+3y-3z+6 = 0$ určíme $z_B = 3$ a následně dopočítáme vzdálenost bodů $A[2; 1; \frac{14}{3}], B[3; -1; 3]$, kde $|AB| = |A_0B_0| = \sqrt{1 + 4 + \frac{16}{9}} = $ $= \sqrt{\frac{61}{9}} = \frac{\sqrt{61}}{3} \doteq 2{,}603$

□