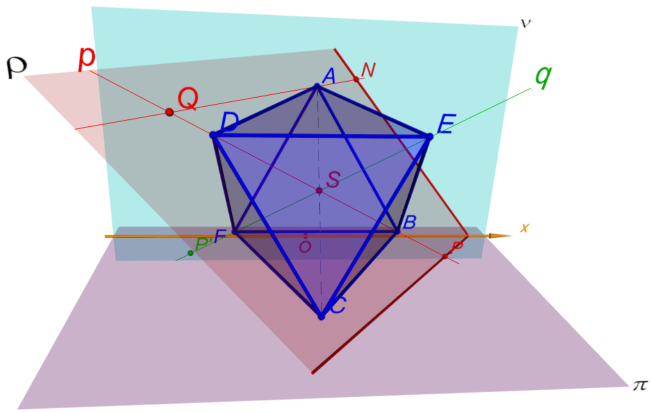
Konstrukční úlohy v Mongeově promítání

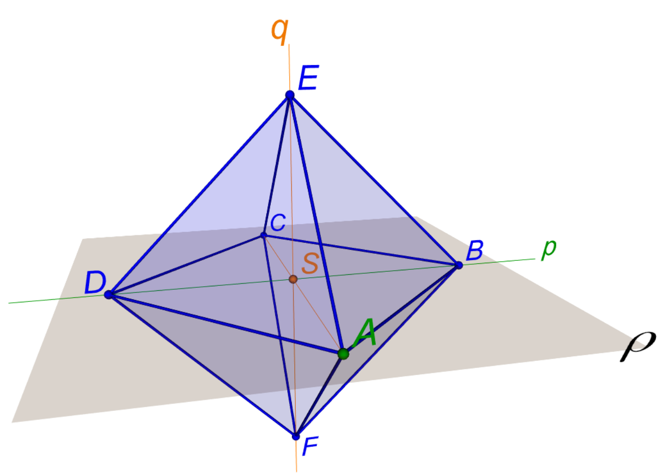
Pravidelný osmistěn



Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte pravidelný osmistěn, je-li dán jeho vrchol A a úhlopříčka BD leží na přímce $p{=}PQ$; $A[0;2;6], P[5;2;0], Q[-4;7;6]$.

Rozbor úlohy

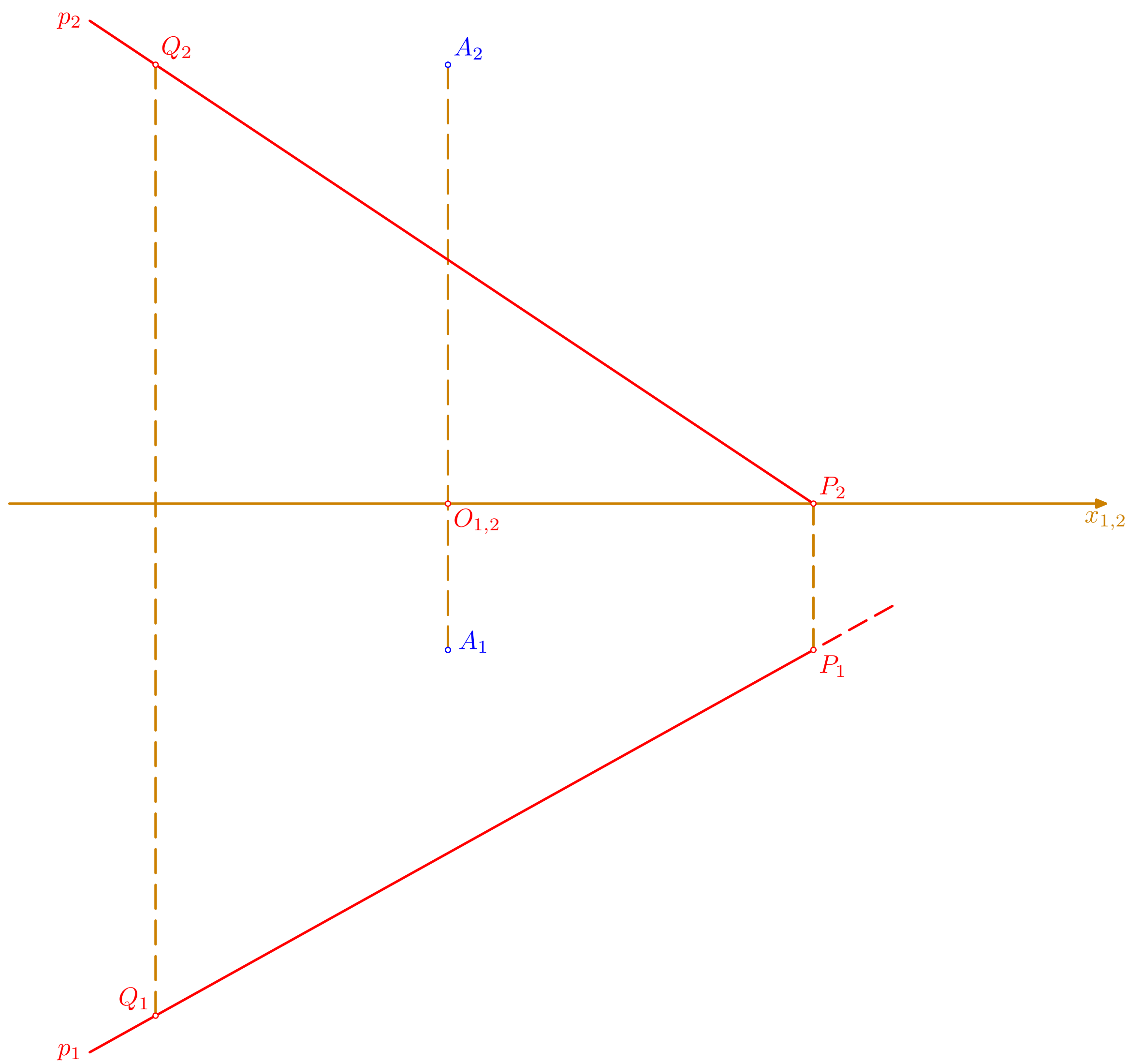


Prostorový princip řešení

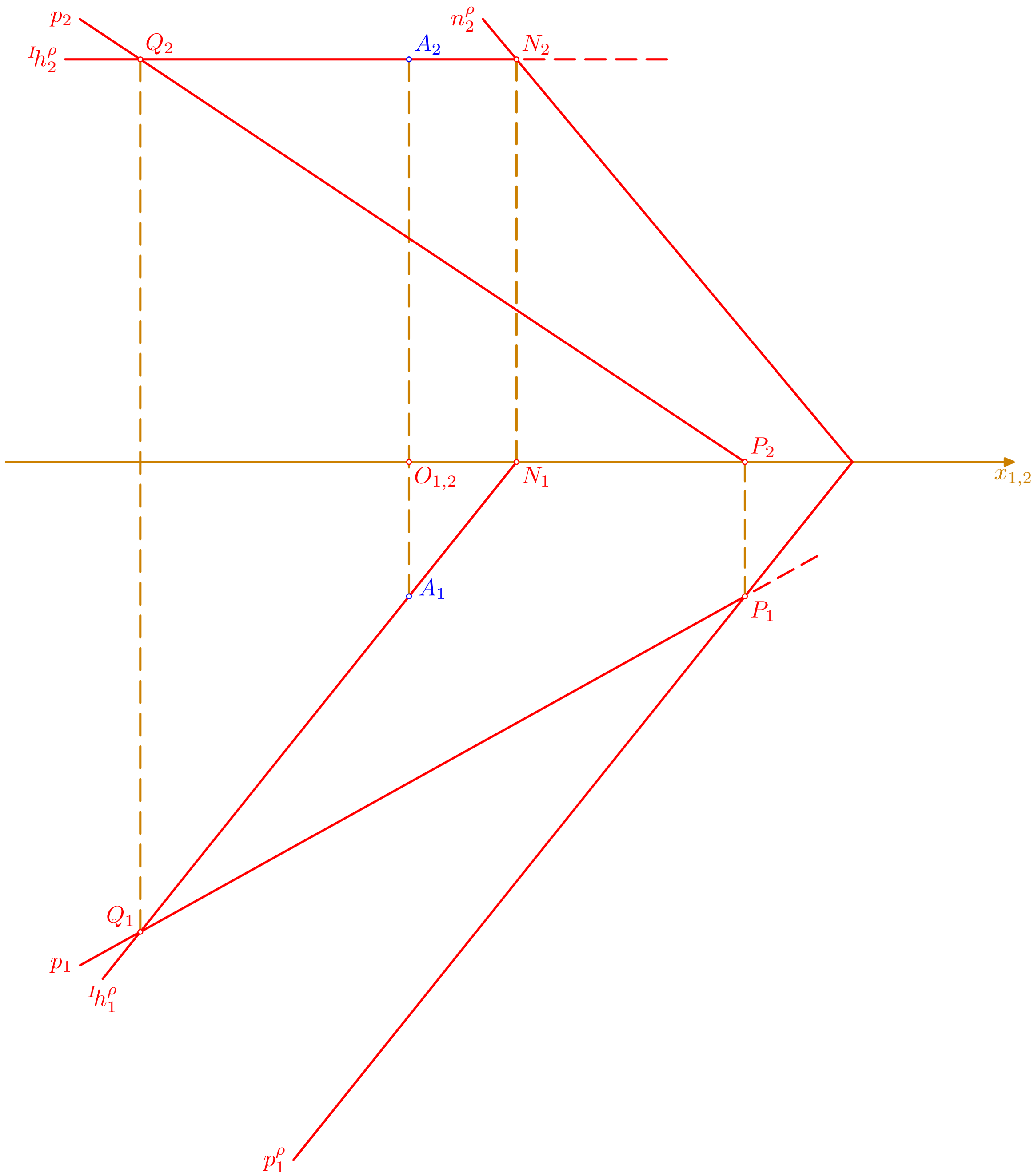
1. $\rho; \rho = Ap$
2. $\square ABCD$; leží v ρ, má vrchol A a úhlopříčku BD na přímce p, jeho střed S je středem osmistěnu
3. $q; S \in q, q \perp \rho$
4. $E, F; E, F \in q, |ES| = |FS| = |AS|$
5. pravidelný osmistěn $ABCDEF$

Konstrukce

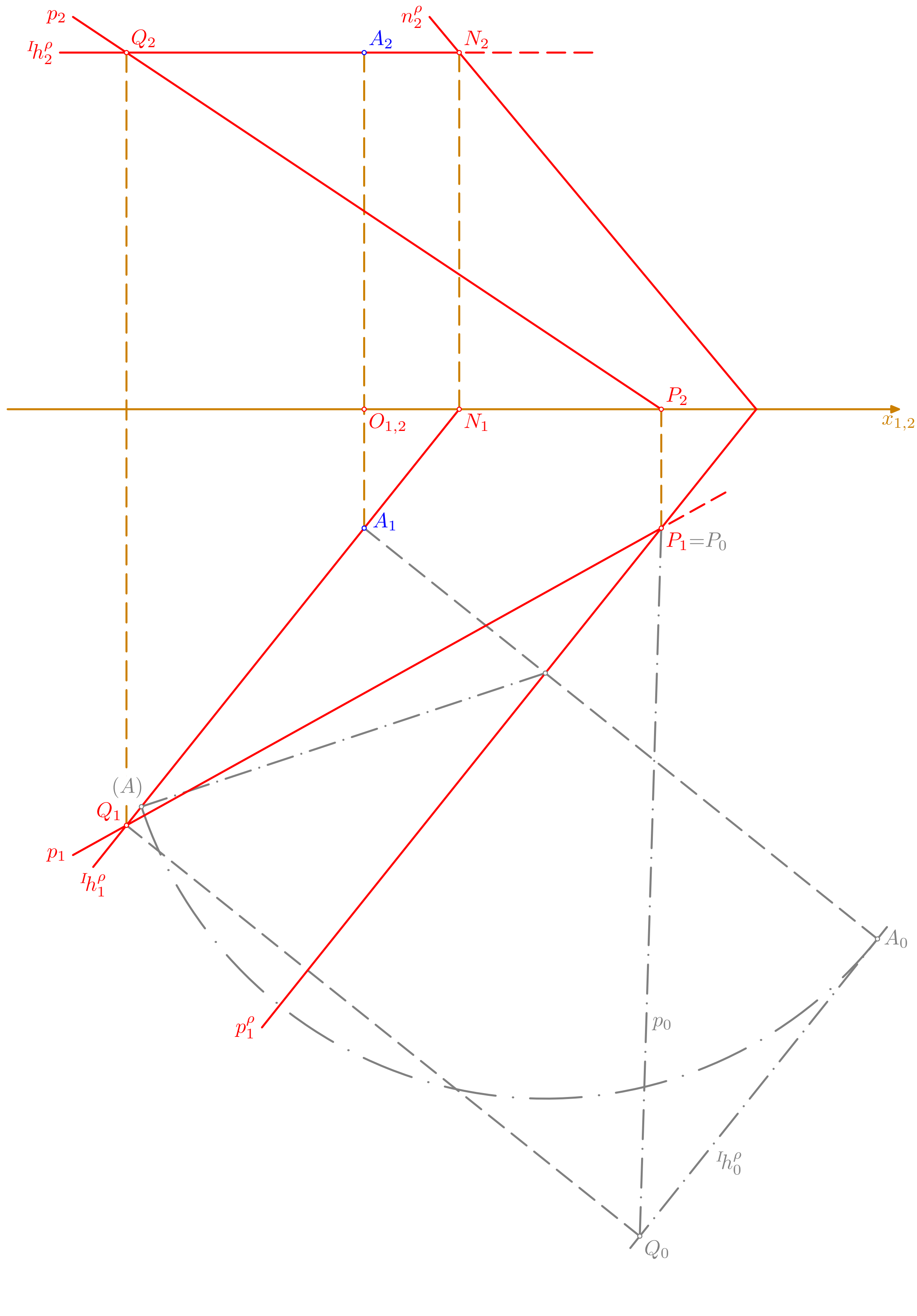
- podle zadání sestrojme sdružené průměty $A_1, A_2, p_1{=}P_1Q_1, p_2{=}P_2Q_2$ bodu A a přímky $p{=}PQ$


p_2
Q_2
A_2
P_2
$x_{1,2}$
$O_{1,2}$
A_1
P_1
Q_1
p_1

- ze zadání bodů A, Q ($z_A{=}z_Q{=}6$) vyplývá, že přímka ${}^Ih^\rho{=}AQ$ je hlavní přímkou I. osnovy roviny $\rho{=}Ap$; pro její půdorysnou stopu p^ρ tudíž platí $p_1^\rho \parallel {}^Ih_1^\rho, P_1 \in p_1^\rho$; nárysná stopa n^ρ prochází nárysným stopníkem N hlavní přímky ${}^Ih^\rho$ ($N_1{=}{}^Ih_1^\rho \cap x$, N_2 leží na ordinále a na přímce ${}^Ih_2^\rho$) a protíná se s půdorysnou stopou na ose x

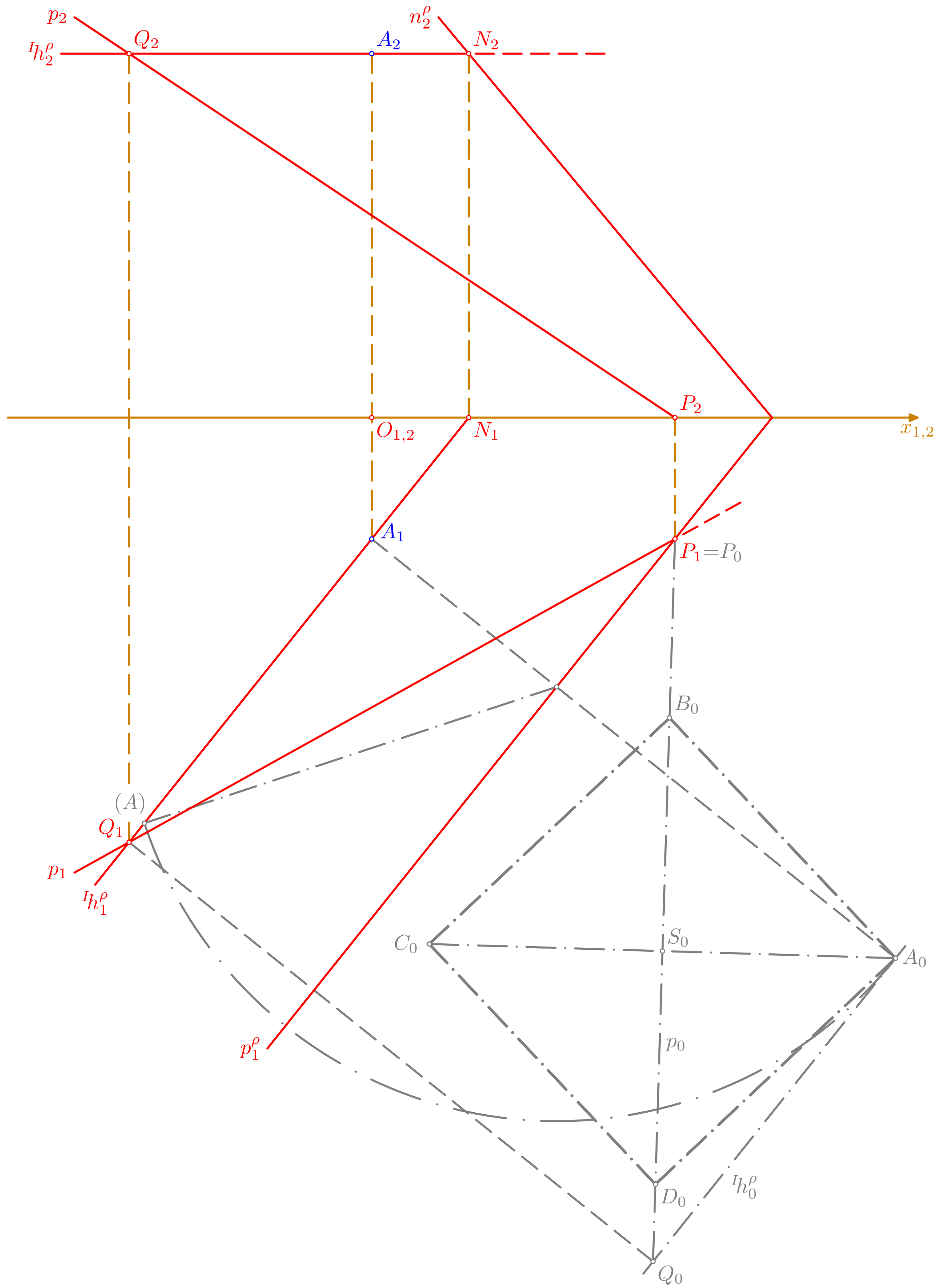

p_2
Q_2
A_2
n_2^ρ
N_2
${}^Ih_2^\rho$
P_2
$O_{1,2}$
N_1
$x_{1,2}$
A_1
P_1
Q_1
p_1
${}^Ih_1^\rho$
p_1^ρ

- sestrojme otočené polohy $A_0, p_0{=}P_0Q_0$ bodu A a přímky $p{=}PQ$ ležících v rovině ρ kolem stopy p^ρ do půdorysny π; bod A je otočen ve sklopení půdorysně promítací roviny příslušné spádové přímky, bod $P \in \pi$ zůstává při otáčení na místě (tj. $P_0{=}P_1$) a poloměr otáčení bodu Q je stejný jako u bodu A (je tudíž přímka ${}^I h_0^\rho{=}A_0Q_0$ rovnoběžná se stopou p_1^ρ a body Q_1, A_1, A_0, Q_0 tvoří obdélník)



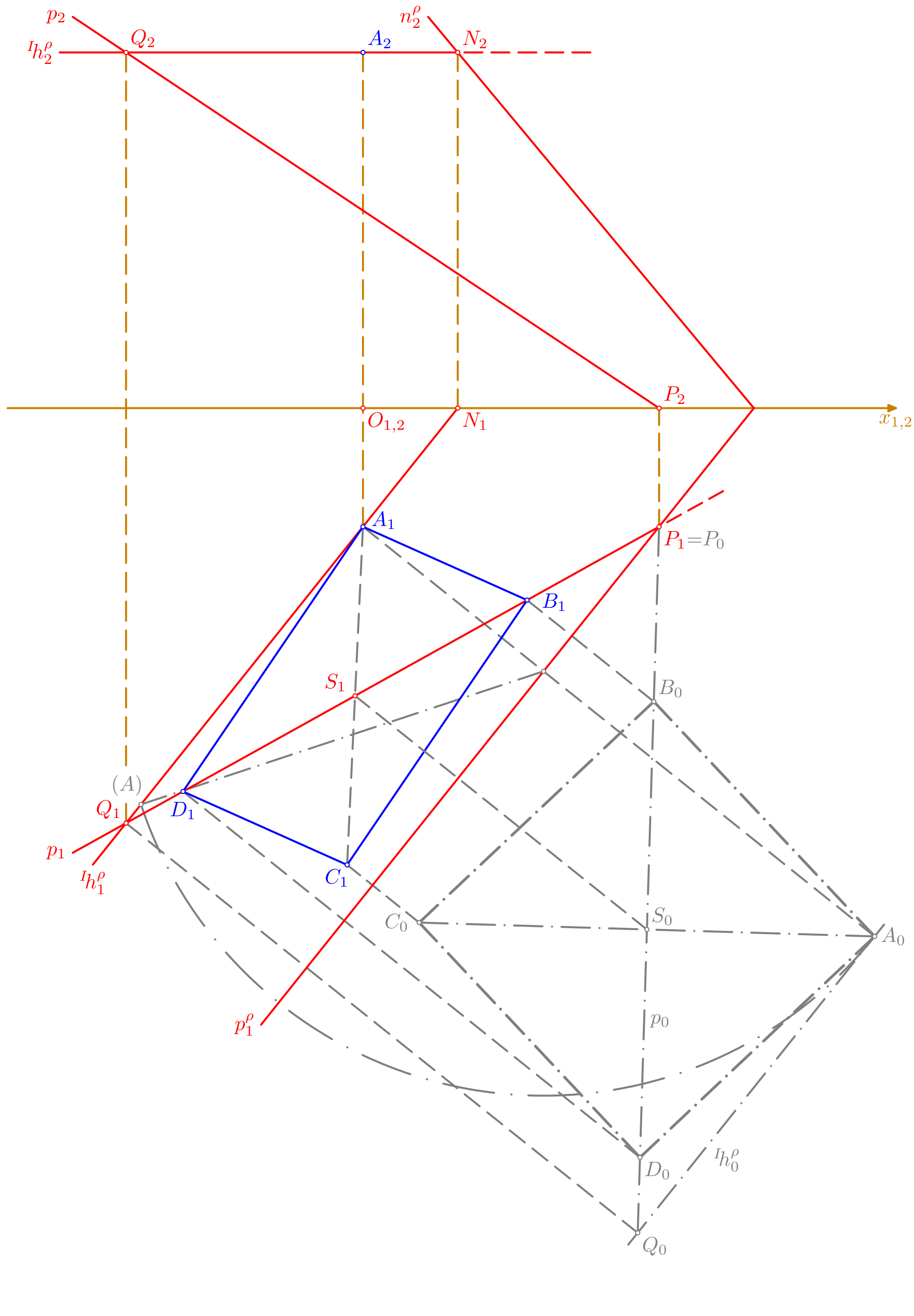
p_2
Q_2
${}^{I}h_2^{\rho}$
A_2
n_2^{ρ}
N_2
P_2
$O_{1,2}$
N_1
$x_{1,2}$
A_1
$P_1 = P_0$
(A)
Q_1
p_1
${}^{I}h_1^{\rho}$
A_0
p_1^{ρ}
p_0
${}^{I}h_0^{\rho}$
Q_0

- v otočení je sestrojen čtverec $A_0B_0C_0D_0$, který má vrchol v bodě A_0 a jehož úhlopříčka B_0D_0 (a tedy i střed S_0) leží na přímce $p_0 = P_0Q_0$; úloha má jediné řešení (útvary v otočení je zvykem podobně jako ve sklopení rýsovat *čerchovaně*)

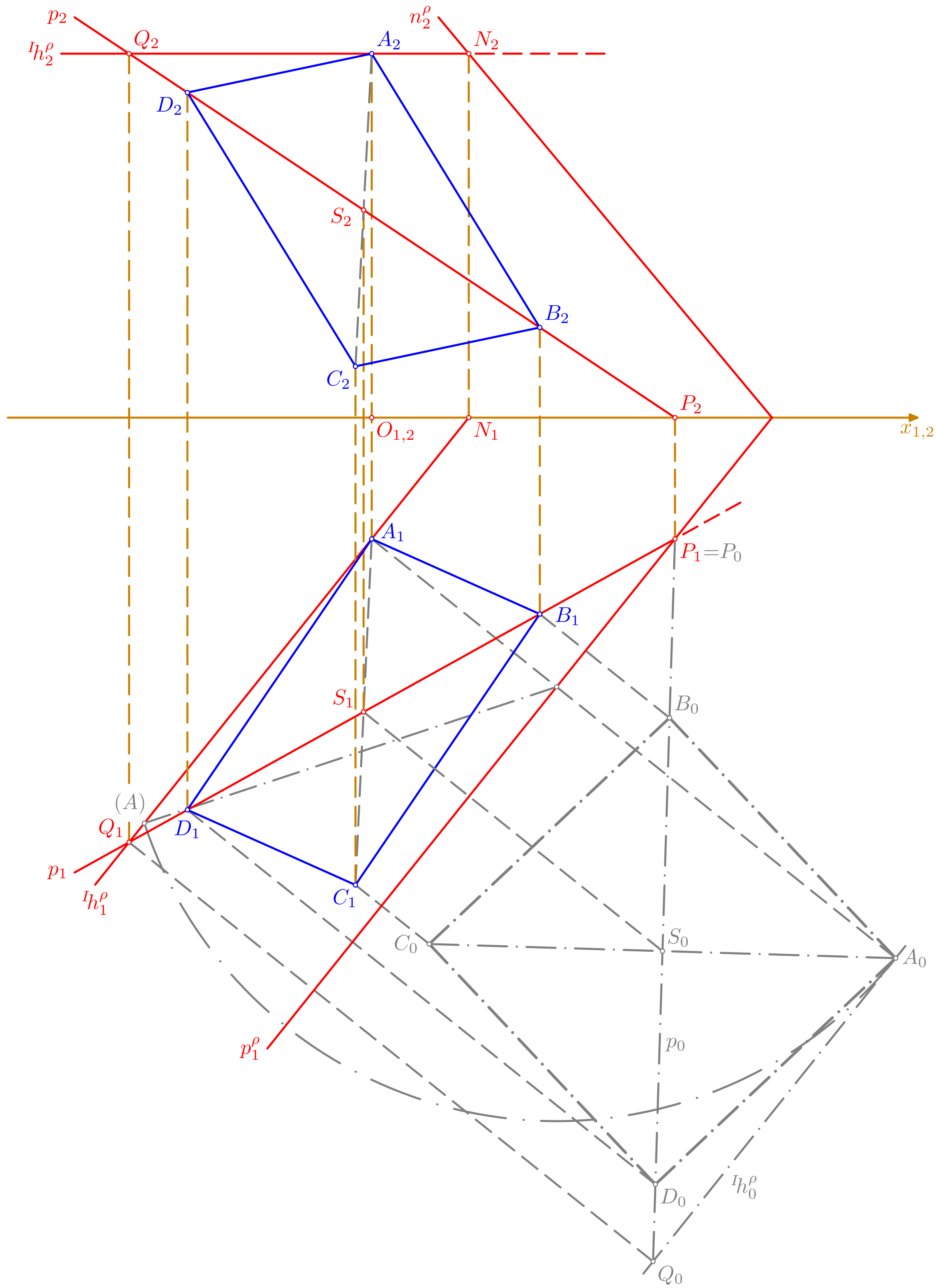


p_2
$^{I}h_2^{\rho}$
Q_2
A_2
n_2^{ρ}
N_2
P_2
$O_{1,2}$
N_1
$x_{1,2}$
A_1
$P_1 = P_0$
B_0
(A)
Q_1
p_1
$^{I}h_1^{\rho}$
S_0
C_0
A_0
p_0
p_1^{ρ}
D_0
$^{I}h_0^{\rho}$
Q_0

- z otočení se vraťme do půdorysu; funguje zde *pravoúhlá osová afinita*, jejíž osou je stopa p_1^ρ a v níž si odpovídají např. body A_0 a A_1; její užití je při ručním rýsování ovšem často dosti nepřesné, proto se jí budeme snažit vyhnout; půdorysy B_1, S_1, D_1 bodů $B, S, D \in p$ najdeme snadno na přímce p_1 a na kolmicích vedených ke stopě p_1^ρ body B_0, S_0, D_0; bod C_1 je středově souměrný s bodem A_1 podle bodu S_1 (tím také zajistíme, že nám v průmětu určitě vyjde rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$ o středu v bodě S_1); pro zajímavost zkontrolujme přesnost rýsování – úsečka C_1C_0 by měla být kolmá ke stopě p_1^ρ a přímky A_0C_0 a A_1C_1 by se měly protínat v samodružném bodě na ose p_1^ρ afinity

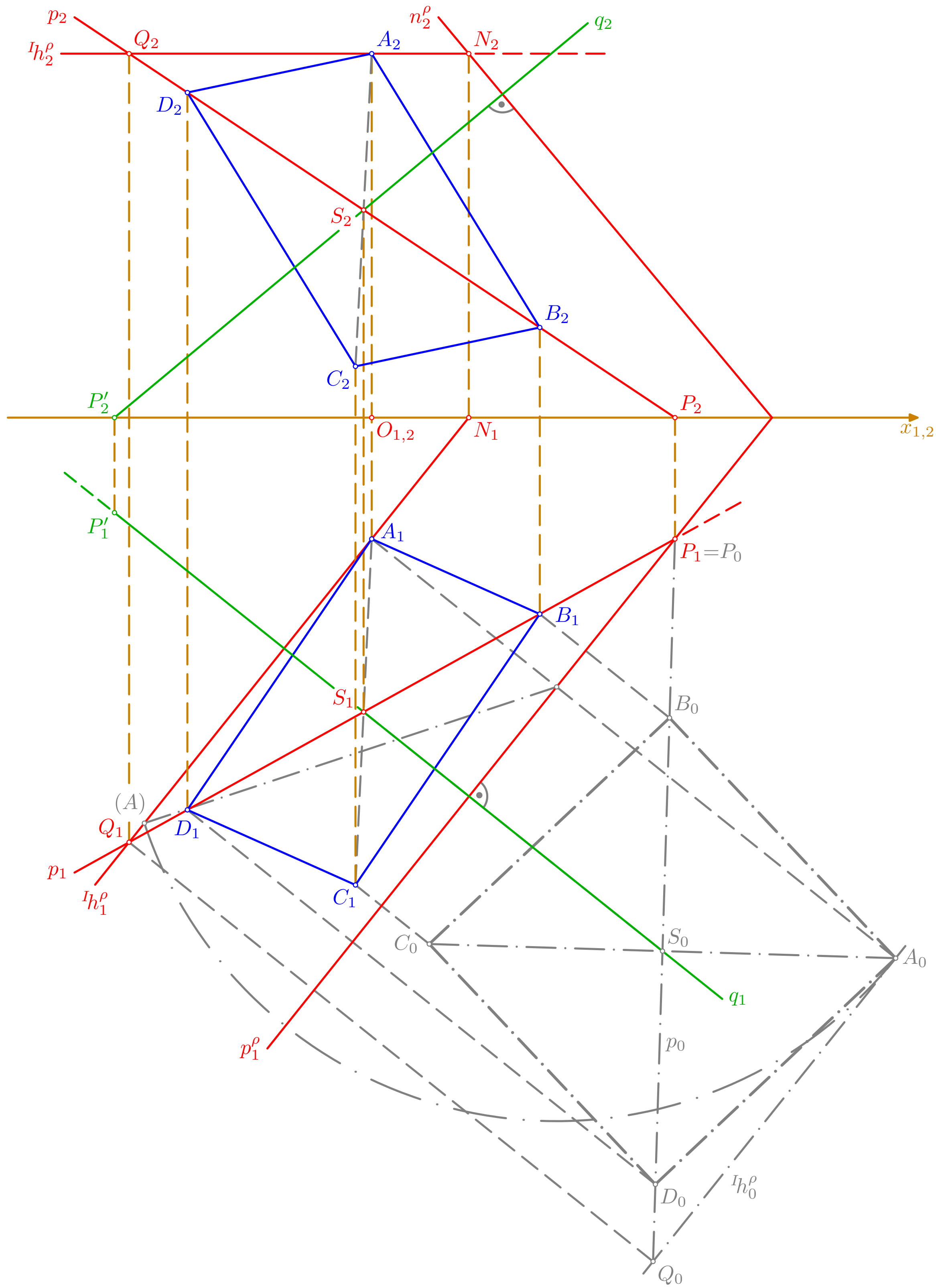

p_2
$^{I}h_2^{\rho}$
Q_2
A_2
n_2^{ρ}
N_2
P_2
$O_{1,2}$
N_1
$x_{1,2}$
A_1
$P_1 = P_0$
B_1
S_1
B_0
(A)
Q_1
D_1
p_1
$^{I}h_1^{\rho}$
C_1
C_0
S_0
A_0
p_0
p_1^{ρ}
D_0
$^{I}h_0^{\rho}$
Q_0

- po ordinálách vytáhneme nahoru nárysy bodů B_2, S_2, D_2 na přímku p_2, bod C_2 je opět souměrný s A_2 podle S_2 (nárysem čtverce $ABCD$ je tedy opět rovnoběžník)



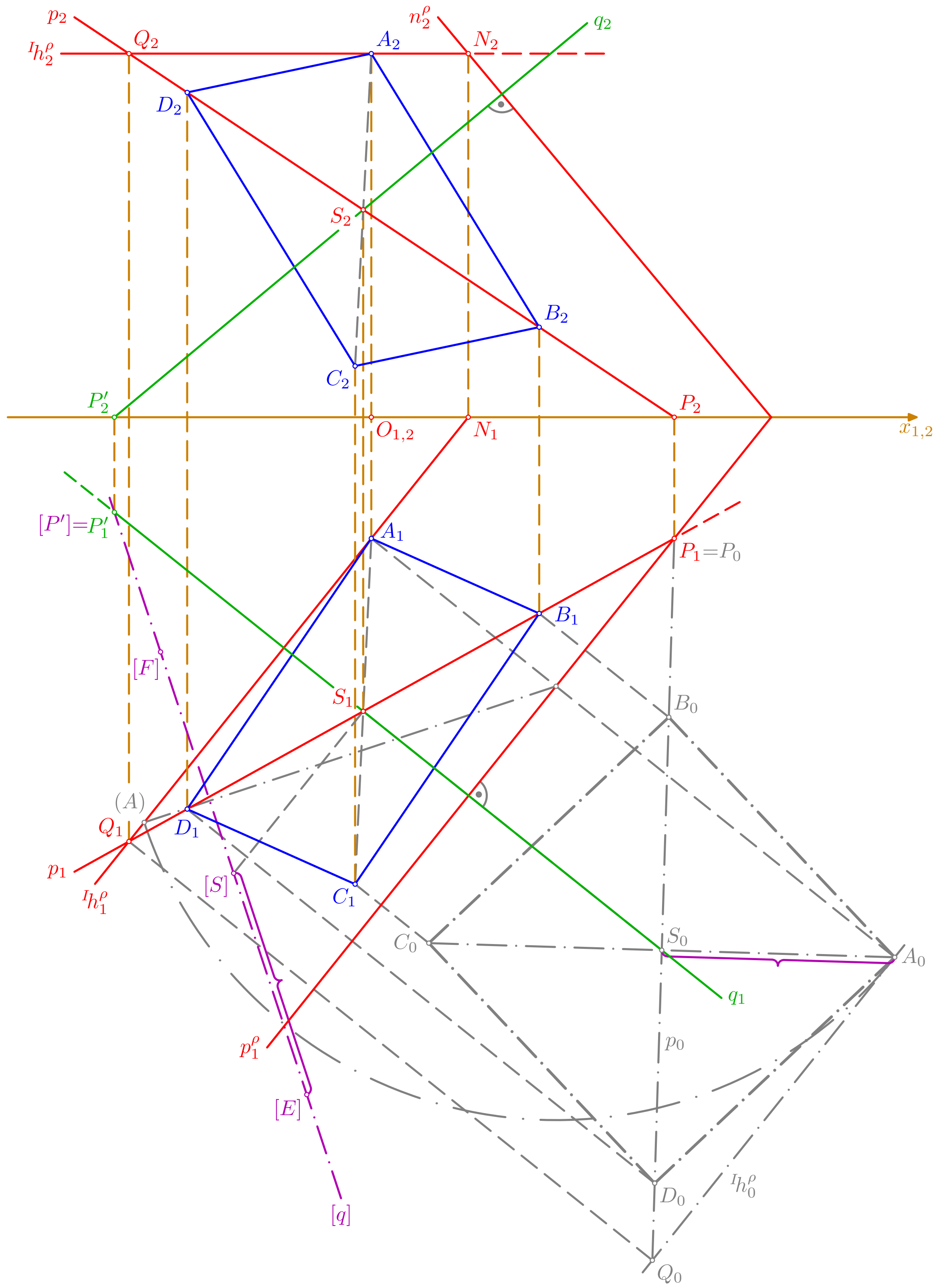
p_2
$^{I}h_2^{\rho}$
Q_2
A_2
n_2^{ρ}
N_2
D_2
S_2
B_2
C_2
P_2
$O_{1,2}$
N_1
$x_{1,2}$
A_1
$P_1 = P_0$
B_1
B_0
S_1
(A)
Q_1
D_1
p_1
$^{I}h_1^{\rho}$
C_1
C_0
S_0
A_0
p_0
p_1^{ρ}
D_0
$^{I}h_0^{\rho}$
Q_0

- středem S čtverce $ABCD$ veďme přímku $q \perp \rho$: pro její půdorys platí $q_1 \perp p_1^\rho, S_1 \in q_1$, podobně v nárysu je $q_2 \perp n_2^\rho, S_2 \in q_2$; pro další konstrukci bude ještě užitečné sestrojit půdorysný stopník P' přímky q: $P_2'=q_2 \cap x$ a půdorys P_1' leží na ordinále a na přímce q_1



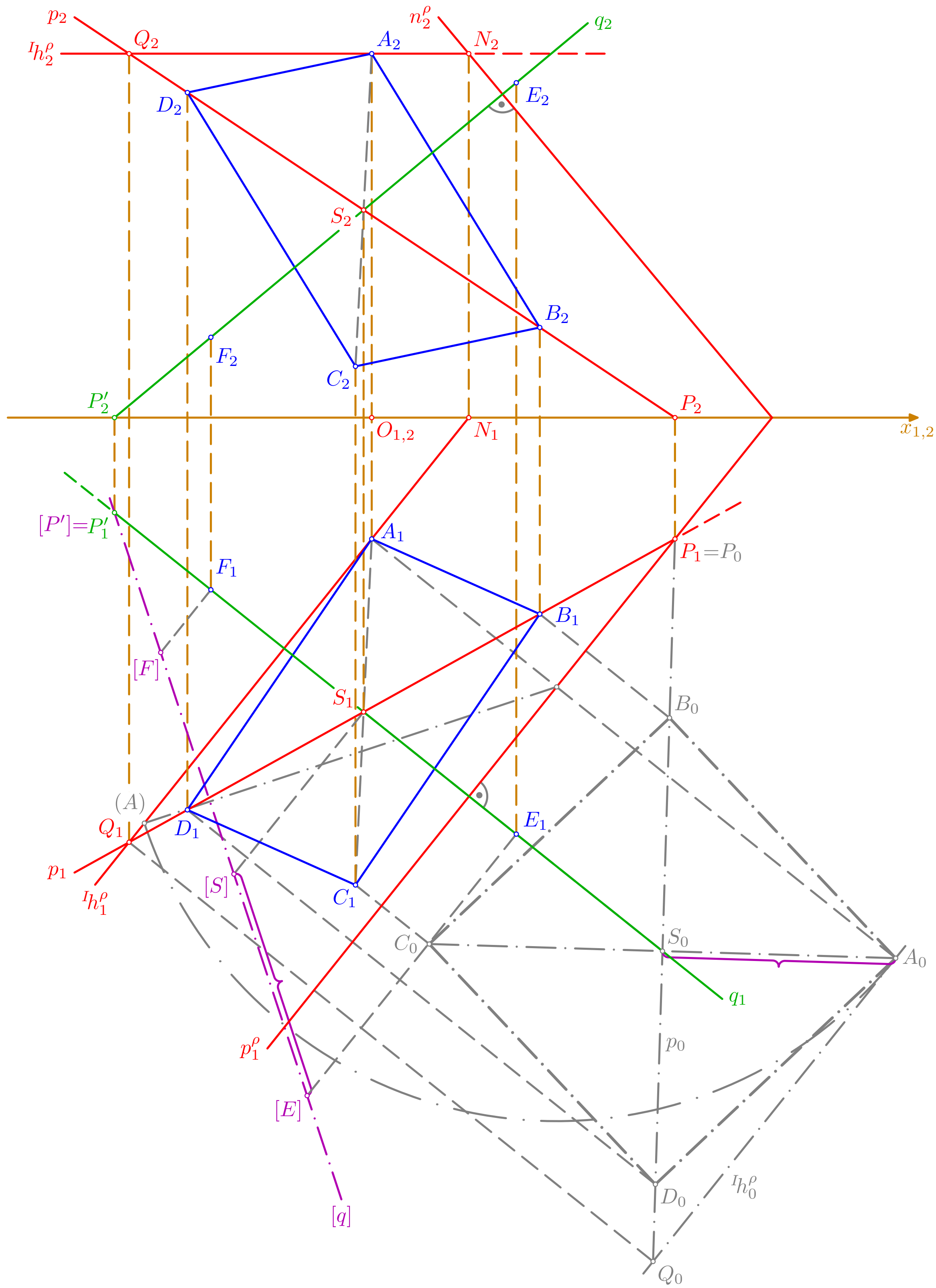
p_2
Q_2
$^{I}h_2^{\rho}$
A_2
n_2^{ρ}
N_2
q_2
D_2
S_2
B_2
C_2
P_2'
$O_{1,2}$
N_1
P_2
$x_{1,2}$
P_1'
A_1
$P_1{=}P_0$
B_1
B_0
S_1
(A)
Q_1
D_1
p_1
$^{I}h_1^{\rho}$
C_1
C_0
S_0
A_0
q_1
p_1^{ρ}
p_0
D_0
$^{I}h_0^{\rho}$
Q_0

- dále sklopme půdorysně promítací rovinu přímky q, abychom na její sklopené poloze $[q]$ mohli od bodu $[S]$ nanést skutečnou velikost úsečky AS (odměříme ji v otočení, $|AS|$=$|A_0S_0|$) a získat tak sklopené polohy $[E],[F]$ zbývajících vrcholů $E,F \in q$



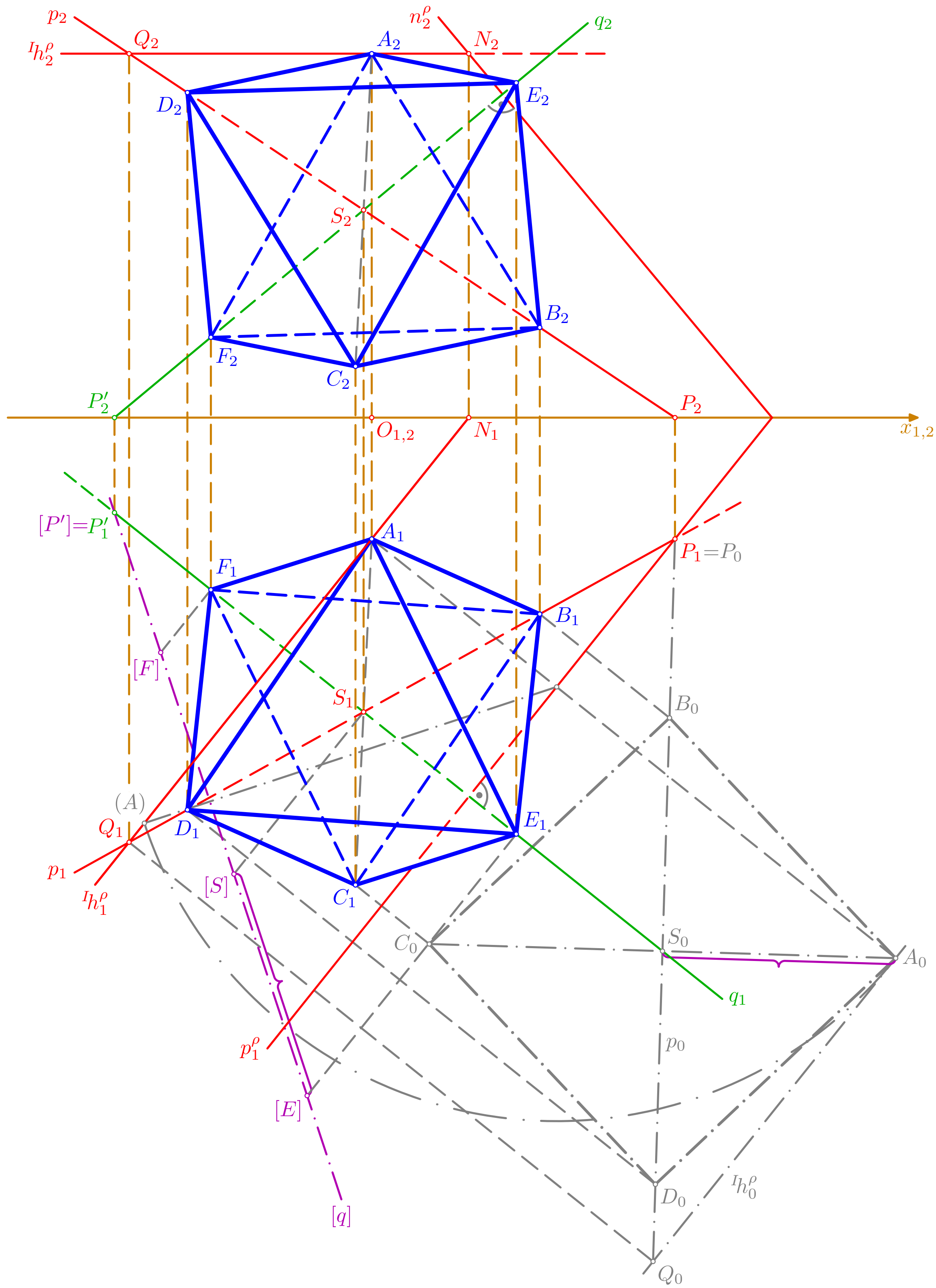
p_2
$^Ih_2^\rho$
Q_2
A_2
n_2^ρ
N_2
q_2
D_2
S_2
B_2
C_2
P_2'
P_2
$O_{1,2}$
N_1
$x_{1,2}$
$[P']=P_1'$
A_1
$P_1=P_0$
B_1
$[F]$
S_1
B_0
(A)
Q_1
D_1
p_1
$^Ih_1^\rho$
$[S]$
C_1
C_0
S_0
A_0
q_1
p_1^ρ
p_0
$[E]$
$^Ih_0^\rho$
D_0
$[q]$
Q_0

- vraťme body E, F ze sklopených poloh $[E], [F]$ po kolmicích do půdorysů E_1, F_1 na přímce q_1 a z nich po ordinálách vytáhněme nahoru nárysy E_2, F_2 na přímku q_2



p_2
Q_2
A_2
n_2^ρ
N_2
q_2
${}^Ih_2^\rho$
D_2
E_2
S_2
B_2
F_2
C_2
P_2'
P_2
$O_{1,2}$
N_1
$x_{1,2}$
$[P']=P_1'$
A_1
$P_1=P_0$
F_1
B_1
$[F]$
S_1
B_0
(A)
E_1
Q_1
D_1
p_1
${}^Ih_1^\rho$
$[S]$
C_1
C_0
S_0
A_0
q_1
p_0
p_1^ρ
$[E]$
D_0
${}^Ih_0^\rho$
$[q]$
Q_0

- na závěr doplňme zbývající hrany a určeme viditelnost v obou průmětech: v půdorysu vytáhneme obrysový rovnoběžník $A_1B_1E_1C_1D_1F_1$ a z nárysu zjistíme, že vrcholy A, D, E leží výše než vrcholy B, C, F, strany $\triangle ADE$ budou tedy v půdorysu vidět, naopak půdorysy stran $\triangle BCF$ vytáhneme čárkovaně; podobně je v nárysu obrysovým rovnoběžníkem šestiúhelník $A_2E_2B_2C_2F_2D_2$ a neviditelné jsou strany, které leží ve stěně ABF (vrcholy A, B, F leží k nárysně blíže než ostatní vrcholy C, D, E)



p_2
$^Ih_2^\rho$
Q_2
A_2
n_2^ρ
N_2
q_2
D_2
E_2
S_2
B_2
F_2
C_2
P_2'
P_2
$O_{1,2}$
N_1
$x_{1,2}$
$[P']=P_1'$
A_1
$P_1=P_0$
F_1
B_1
$[F]$
S_1
B_0
(A)
Q_1
D_1
E_1
p_1
$^Ih_1^\rho$
$[S]$
C_1
C_0
S_0
A_0
q_1
p_0
p_1^ρ
$[E]$
$^Ih_0^\rho$
D_0
$[q]$
Q_0

□