Zobrazení základních útvarů v Mongeově promítání

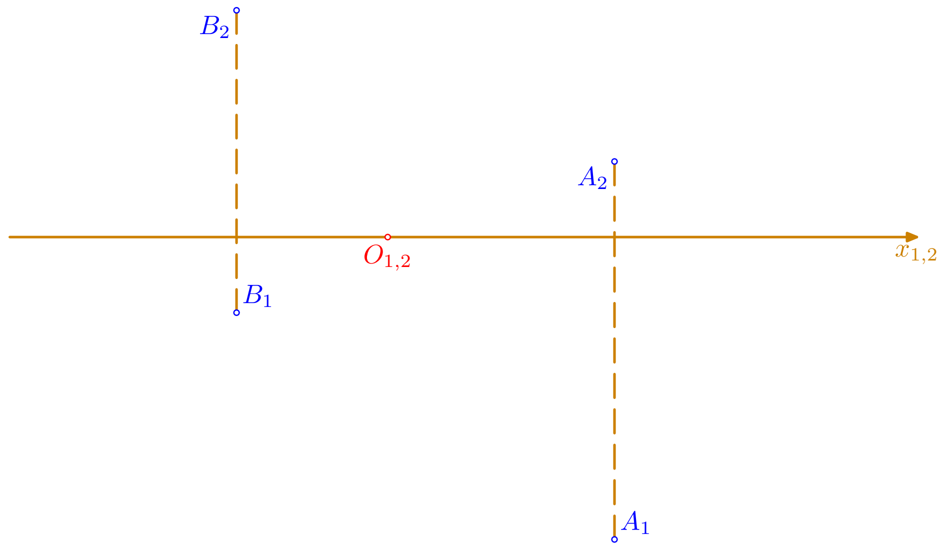
Zobrazení přímky

Výklad

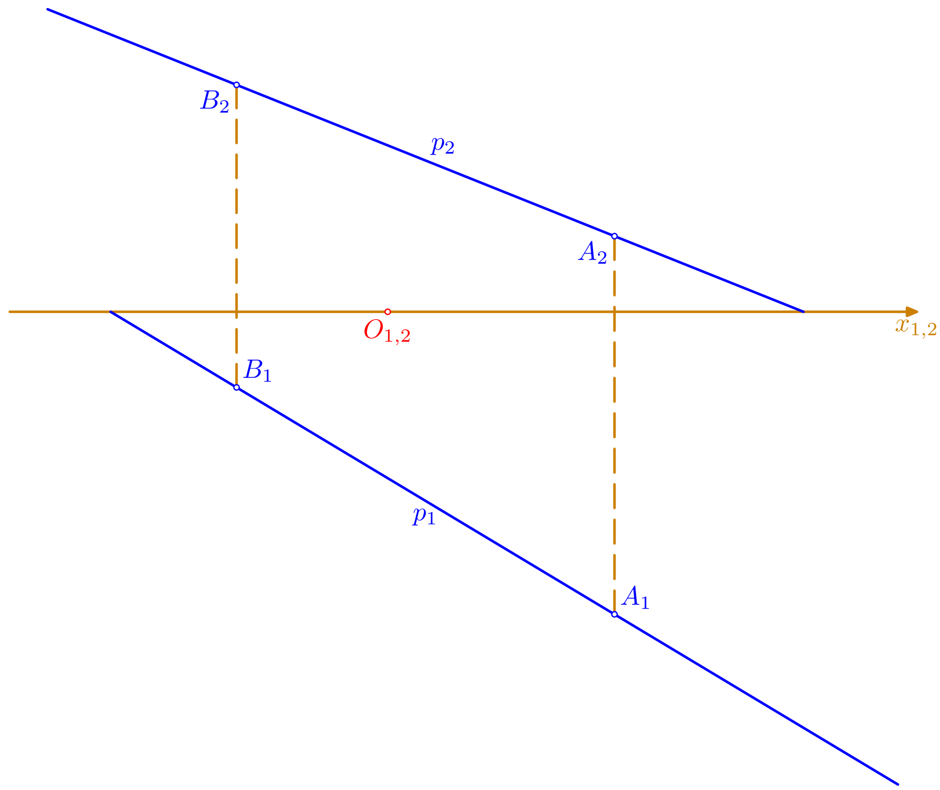
- sdruženými průměty přímky p, která má k oběma průmětnám obecnou polohu, je dvojice navzájem různých přímek – půdorys p_1 a nárys p_2
- pro lepší rekonstrukci přímky z průmětu do prostoru je užitečné najít její průsečíky s oběma průmětnami – tzv. **stopníky** přímky
- **půdorysný stopník** P je průsečíkem přímky p s půdorysnou π; protože bod P leží v půdorysně, splývá se svým půdorysem $P_1{=}P$ a jeho nárys P_2 leží na ose x – z této podmínky lze také půdorysný stopník v průmětu nejlépe najít: průsečík přímky p_2 s osou x je jeho nárys P_2 a na ordinále a přímce p_1 najdeme půdorys P_1 bodu P
- podobně je **nárysný stopník** N průsečíkem přímky p s nárysnou ν; splývá se svým nárysem $N_2{=}N$ a jeho půdorys N_1 leží na ose x – jeho konstrukce v průmětu je tudíž obdobná: průsečík přímky p_1 s osou x je půdorys N_1 a na ordinále a přímce p_2 najdeme nárys N_2 bodu N
- další často užívanou konstrukcí je tzv. **sklápění promítací roviny přímky do průmětny** - obecně jde o otočení roviny určené přímkou a jejím průmětem do průmětny (tedy o 90°); sklápět lze vždy na dvě různé strany - výběr záleží na konkrétním zadání a situaci v průmětně; sklopením lze zjistit **vzdálenost dvou bodů**, **nanést určitou vzdálenost** nebo určit **odchylku přímky od průmětny**
- v Mongeově promítání lze sklopit **půdorysně promítací rovinu přímky** p, tj. rovinu určenou přímkami p, p_1 do π; v následujícím příkladě jsou tak sklopeny body A, B – jejich výška nad půdorysnou π je dána příslušnou z-ovou souřadnicí a objevuje se v nárysu jako vzdálenost bodů A_2, B_2 od osy x; sklopené útvary se v průmětu obvykle vyznačují **čerchovaně** a značí se **v závorkách**
- podobně je možno sklopit **nárysně promítací rovinu přímky** p, tedy rovinu určenou přímkami p, p_2 do ν

Řešené úlohy

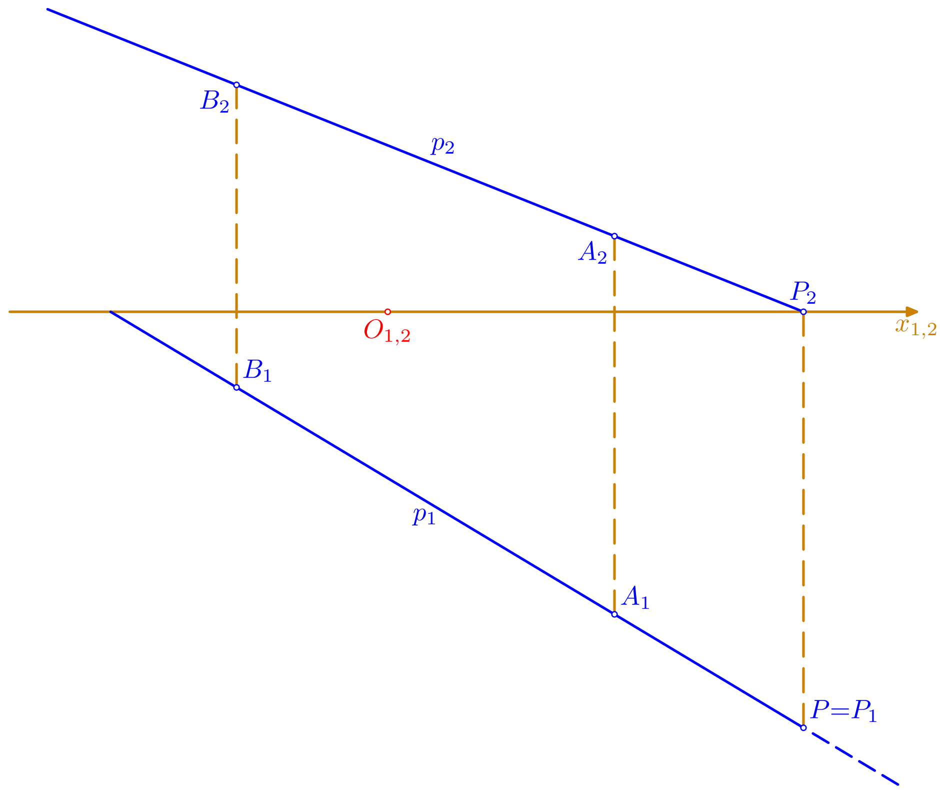
Příklad: Sestrojte sdružené průměty přímky $p{=}AB$; $A[3;4;1]$, $B[-2;1;3]$.



- podle zadání vynesme souřadnice a sestrojme sdružené průměty A_1, A_2, B_1, B_2 bodů A, B



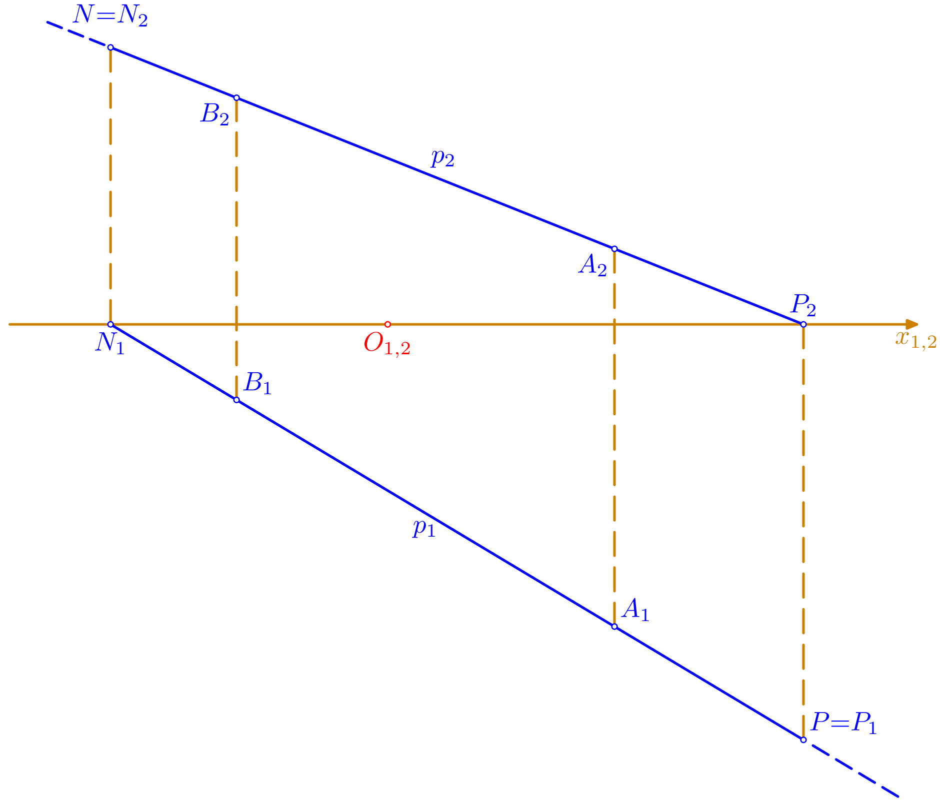
- půdorysem přímky p=AB je přímka p_1=A_1B_1 a jejím nárysem je přímka p_2=A_2B_2



- pro nárys P_2 půdorysného stopníku $P{=}p \cap \pi$ platí $P_2{=}p_2 \cap x$ a půdorys P_1 najdeme na přímce p_1 a na ordinále; zkusme vypočítat souřadnice bodu P; přímku $p = AB$ vyjádřeme parametricky ve tvaru $p : X = A + t(A - B)$, přepsáno v souřadnicích do parametrických rovnic (pro připomenutí je zadáno $A[3; 4; 1]$, $B[-2; 1; 3]$)

$$\begin{aligned} x &= 3 + 5t \\ y &= 4 + 3t \\ z &= 1 - 2t; \end{aligned}$$

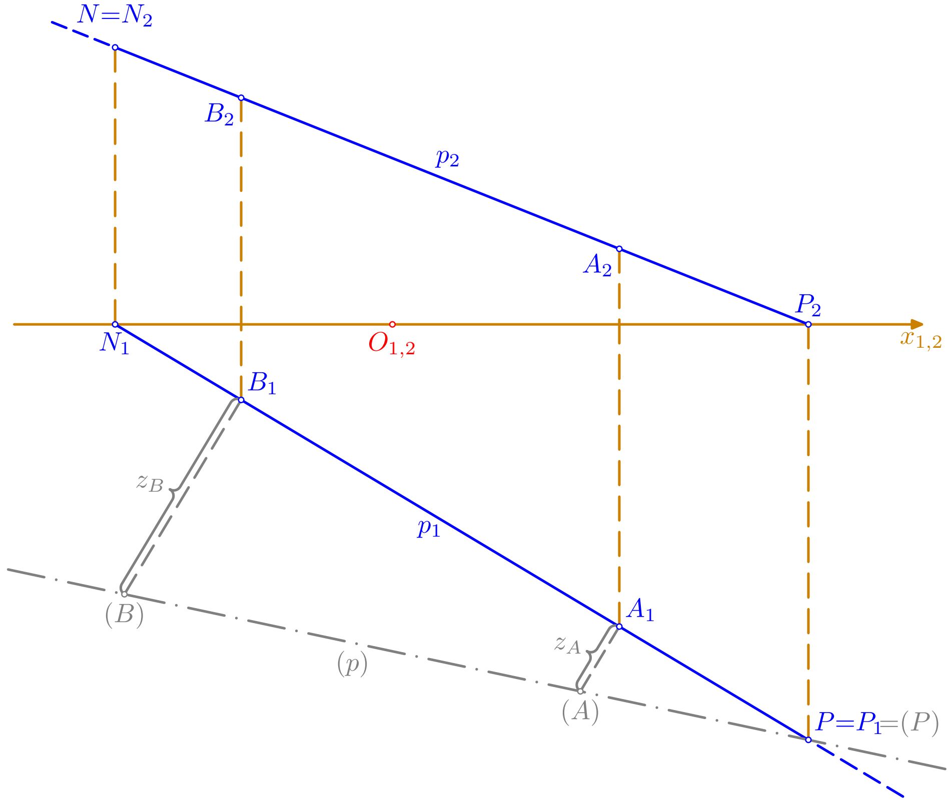
bod $P = p \cap \pi$ má z-ovou souřadnici rovnu 0, tj. $z_P = 0$, a z rovnice $0 = 1 - 2t$ dostáváme $t = \frac{1}{2}$; zpětným dosazením pak dopočítáme $x_P = y_P = \frac{11}{2}$ a výsledek zapíšeme ve tvaru desetinných čísel, tedy $P[5{,}5; 5{,}5; 0]$; v obrázku můžeme zkontrolovat, zda je skutečně $|P_2O_{1,2}| = x_P = 5{,}5$ a také $|P_1P_2| = y_P = 5{,}5$; mělo by být...



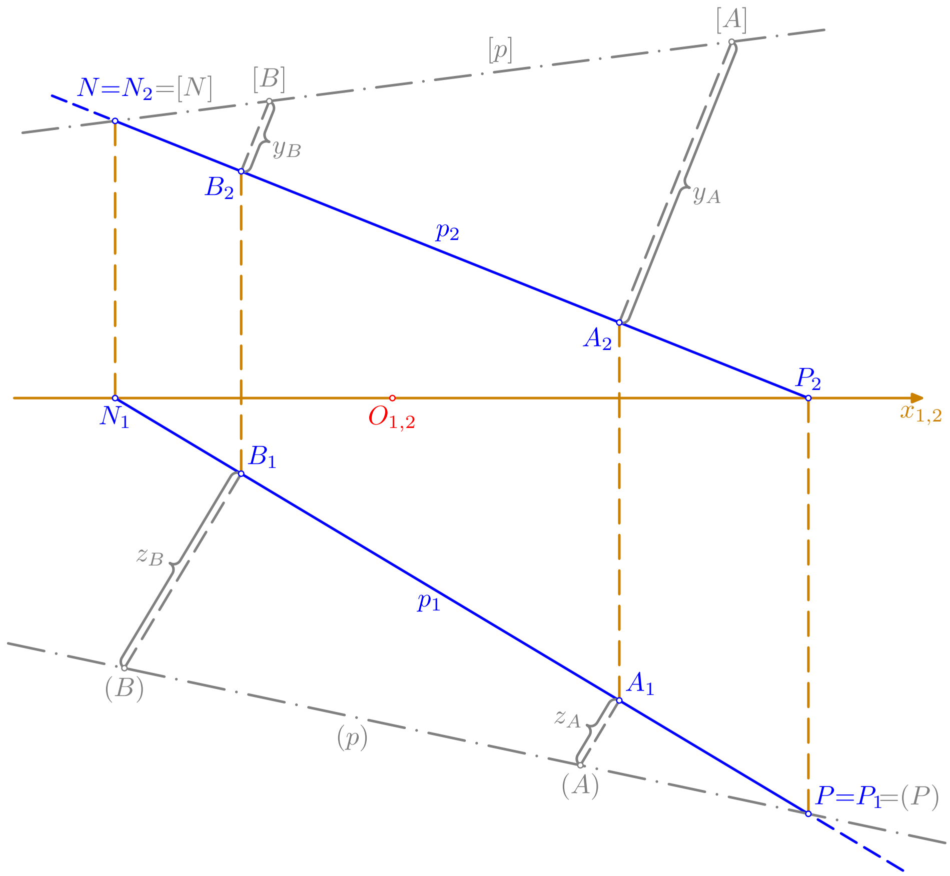
- podobně sestrojíme sdružené průměty nárysného stopníku $N{=}p \cap \nu$: platí $N_1{=}p_1 \cap x$ a N_2 leží na p_2 a na ordinále; z předchozího kroku přepišme parametrické rovnice přímky $p = AB$, ať je máme na očích pro analogický výpočet souřadnic bodu N:

$$\begin{aligned} x &= 3 + 5t \\ y &= 4 + 3t \\ z &= 1 - 2t; \end{aligned}$$

pro bod $N = p \cap \nu$ je $y_N = 0$, a z rovnice $0 = 4 + 3t$ dostáváme $t = -\frac{4}{3}$; zpětným dosazením pak dopočítáme $x_N = -\frac{11}{3} = -3{,}\bar{6}$ a $z_N = \frac{11}{3} = 3{,}\bar{6}$, tedy $N[-3{,}\bar{6}; 0; 3{,}\bar{6}]$; v obrázku opět můžeme přibližně přeměřit, že $|N_1O_{1,2}| = |x_N| = 3{,}\bar{6}$ a také $|N_2N_1| = = z_N = 3{,}\bar{6}$



- skutečnou délku úsečky AB můžeme zjistit sklopením půdorysně promítací roviny přímky p do π: sklopená poloha (A) bodu A leží na kolmici k přímce p_1 vedené bodem A_1 a platí $|(A)A_1|$=z_A=1 (výška bodu A nad π), podobně se sestrojí sklopená poloha (B) bodu B ($|(B)B_1|$=z_B=3); tím získáme sklopenou polohu (p)=$(A)(B)$ přímky p, skutečnou velikost úsečky AB ($|AB|$=$|(A)(B)|$) a také odchylku přímky p od půdorysny jako velikost úhlu, který svírají přímky $p_1, (p)$ (vrcholem tohoto úhlu je již sestrojený bod P=P_1=(P), který při sklápění zřejmě zůstane na místě); pro možnost přibližného ověření měřením v obrázku doplňme i zde příslušný výpočet (opět připomeňme, že je dáno $A[3;4;1]$ a $B[-2;1;3]$): $|AB| = |(A)(B)| = \sqrt{25+9+4} = \sqrt{38} \doteq 6{,}16$



- analogicky lze sestrojit sklopenou polohu $[p]$=$[A][B]$ přímky p do nárysny ν, tentokrát ovšem nanášíme y-ové souřadnice bodů A, B (tj. jejich vzdálenosti od nárysny); i zde ovšem musí vycházet $|[A][B]| = |AB| = |(A)(B)| = \sqrt{38} \doteq 6{,}16$

□