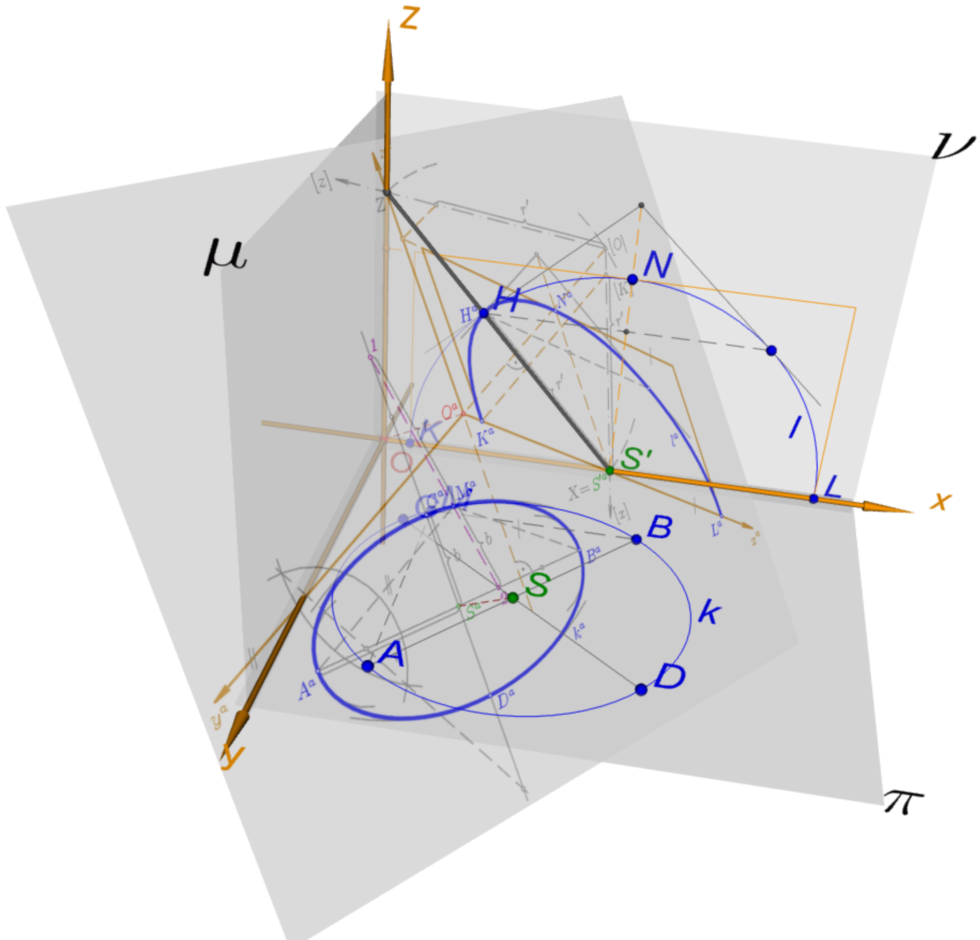
Zobrazení kružnice v pravoúhlé axonometrii

Zobrazení kružnice ležící v souřadnicové rovině

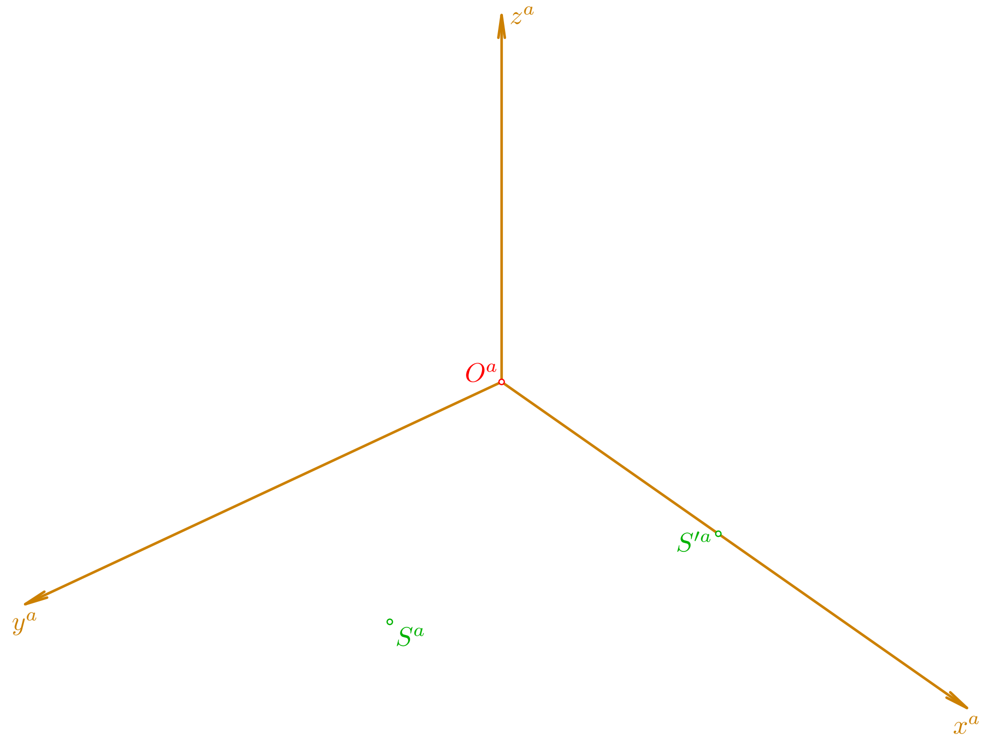


Výklad

- v pravoúhlé axonometrii lze poměrně snadno sestrojit průmět kružnice dané středem a poloměrem, jestliže tato leží v rovině souřadnicové nebo v rovině s ní rovnoběžné
- průmětem takové kružnice je elipsa, jejíž hlavní osa je kolmá k průmětu té souřadnicové osy, která je normálou roviny dané kružnice; délka hlavní poloosy je rovna poloměru kružnice
- pro omezení vedlejší poloosy je možno poměrně snadno najít průmět dalšího bodu dané kružnice a použít některou proužkovou konstrukci
- nebo je možné užít otočení příslušné souřadnicové roviny do axonometrické průmětny
- v následujícím příkladu je ukázáno použití obou naznačených způsobů

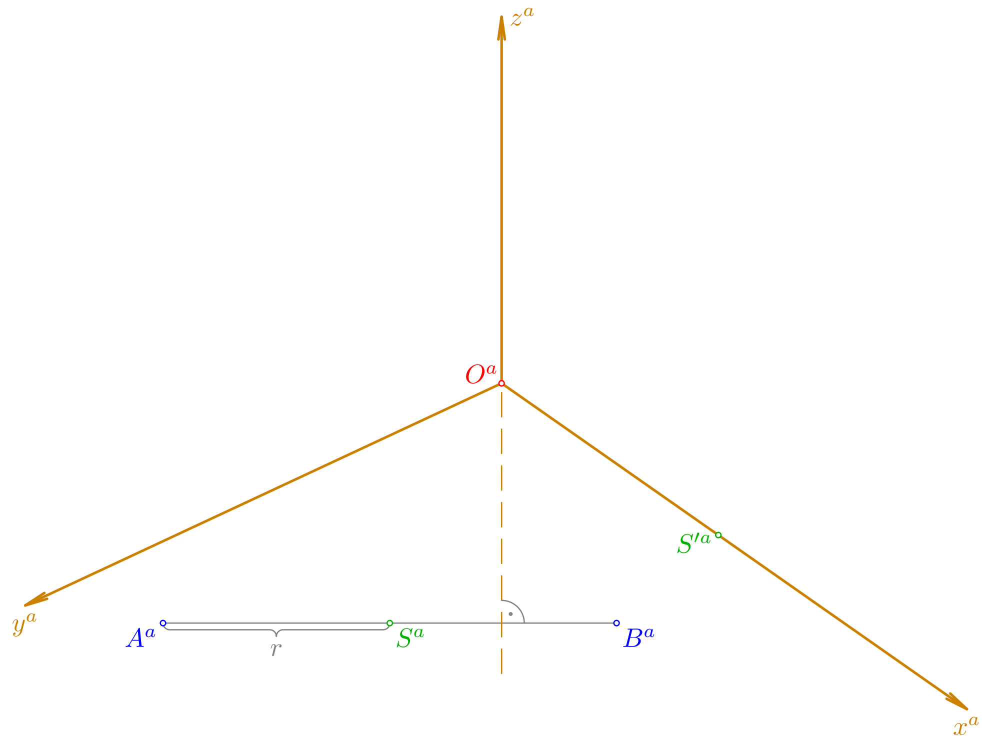
Řešené úlohy

Příklad: V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem zobrazte kružnici $k(S, r{=}3)$ ležící v půdorysně π, a půlkružnici $l(S' \in x, r' = 4)$ ležící v nárysně ν nad osou x; středy S, S' jsou dány svými axonometrickými průměty S^a, S'^a.

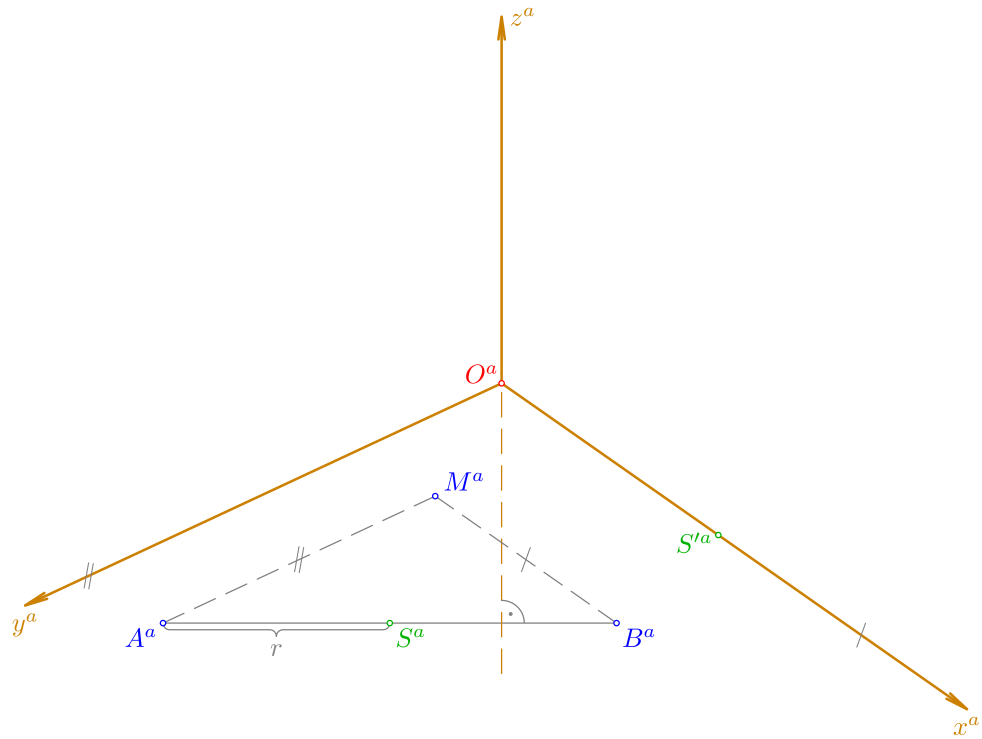


- zadání úlohy – podle něj leží oba body S i S' v půdorysně π, a platí tedy $S = S_1$ a $S' = S'_1$; z důvodu větší přehlednosti popisů je ovšem v obrázku vynecháno příslušné označení $S^a = S^a_1$ a $S'^a = S'^a_1$...

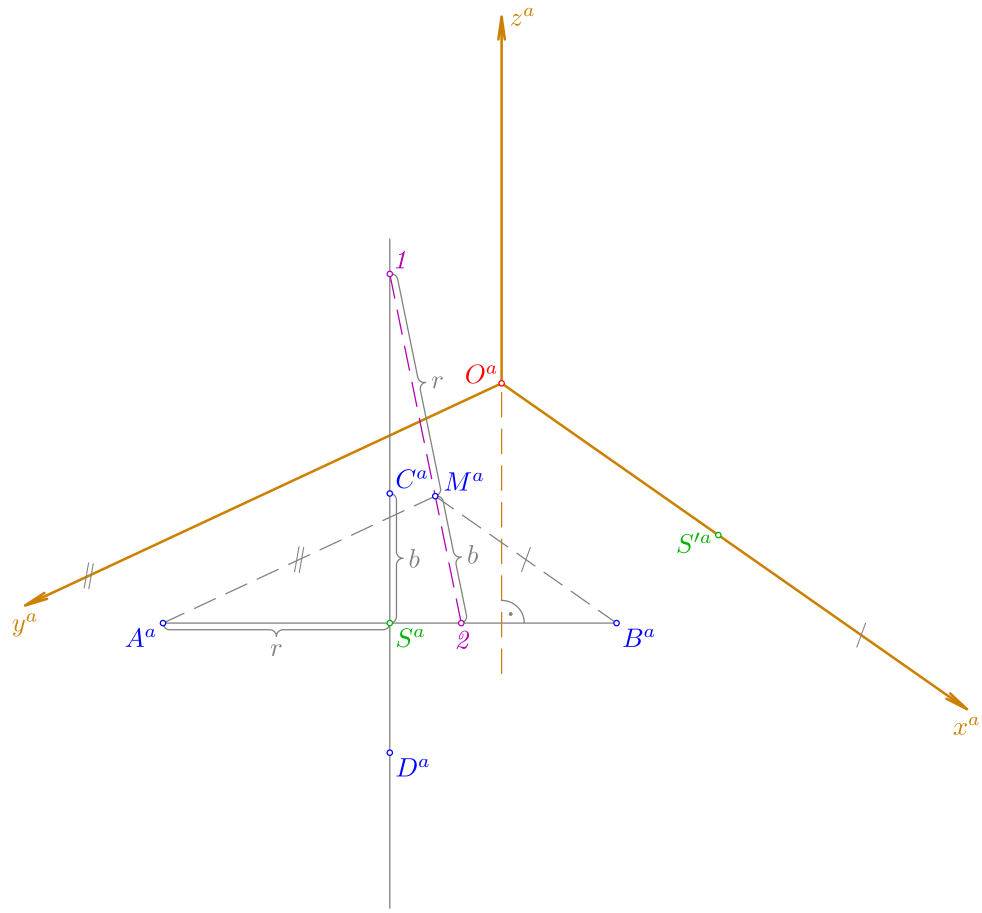
Pozn.: při tomto zadání není (prozatím) axonometrická průmětna určena jednoznačně, a může jí být kterákoliv rovina rovnoběžná s rovinou nákresny (papíru); je zajímavé, že i přesto bude možné danou úlohu, v níž se objevují také metrické vztahy (délka úsečky, kolmost), s úspěchem řešit...



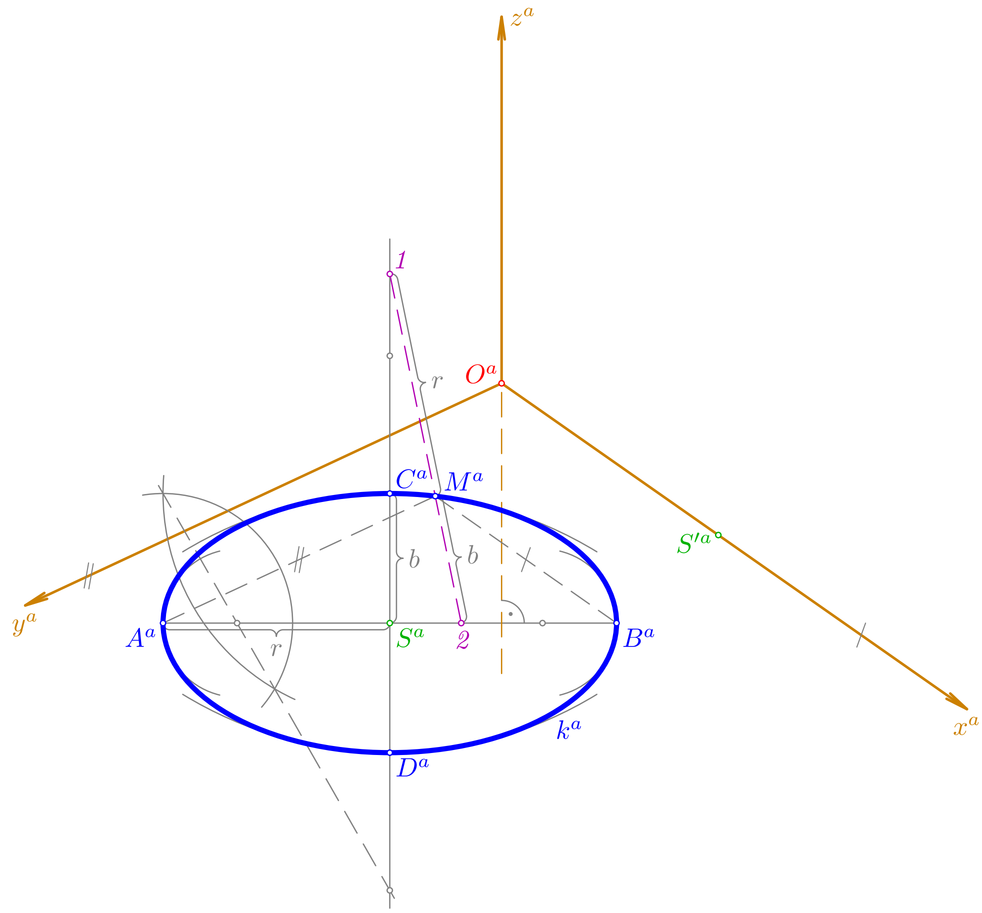
- v půdorysně π veďme středem S průměr AB kružnice k tak, aby přímka AB byla rovnoběžná s axonometrickou průmětnou; průměr AB leží v π, je tedy $AB \perp z$, a na základě **Věty o pravoúhlém průmětu pravého úhlu** musí platit $A^aB^a \perp z^a$; navíc se na průmětu A^aB^a průměru AB zachová délka úsečky a body A^a, B^a ($|A^aB^a|$=2r) jsou tedy hlavními vrcholy elipsy, do níž se promítne daná kružnice $k(S, r = 3) \subset \pi$, protože všechny její ostatní průměry se při pravoúhlém promítání zkrátí



- rovnoběžky s osami y, x vedené po řadě body A, B jsou navzájem kolmé a podle **Thaletovy věty** se protínají v bodě M kružnice k; v průmětu se rovnoběžnost zachová (kolmost obecně nikoliv) a bod M^a je tedy dalším bodem konstruované elipsy k^a (speciálně, půlí-li přímka z^a úhel mezi přímkami x^a a y^a, je takto sestrojený bod M^a vedlejším vrcholem elipsy k^a a následující konstrukční krok je pak možné přeskočit)

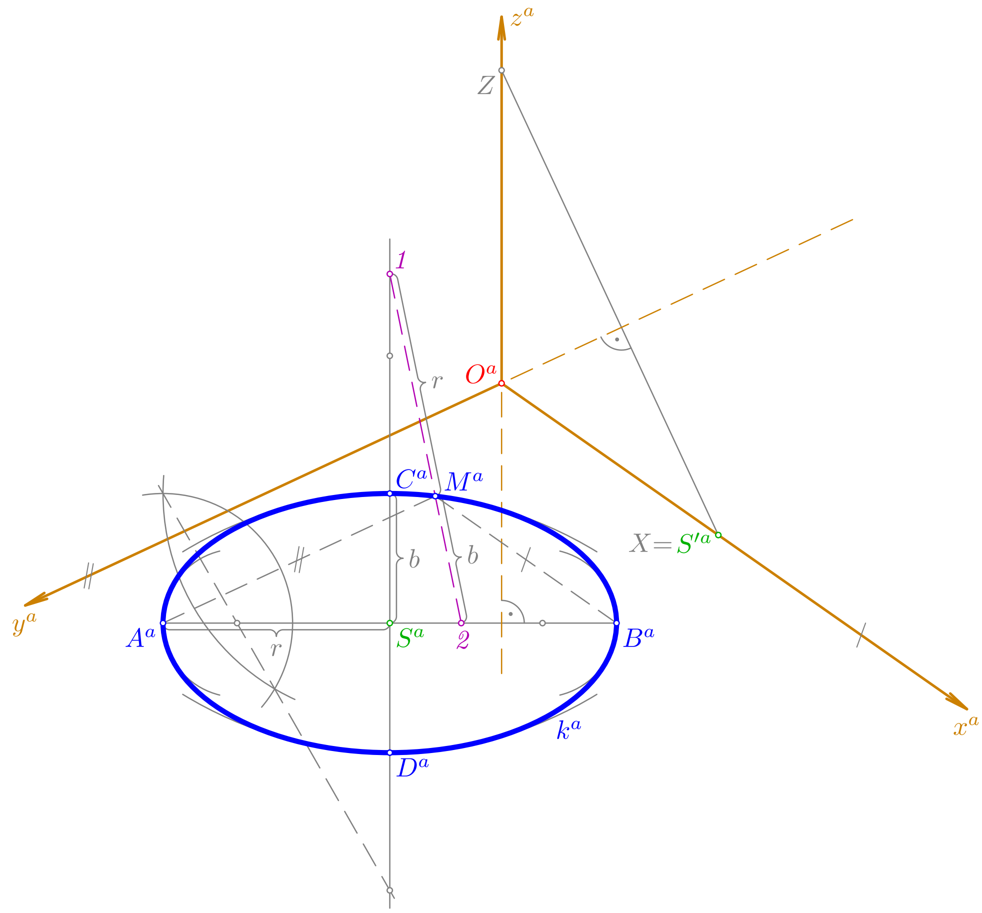


- vedlejší vrcholy C^a, D^a sestrojíme pomocí některé z proužkových konstrukcí – v obrázku je zvolena součtová varianta: pro bod *1* na vedlejší ose elipsy je $|1M^a|=|A^aS^a|=r$, přímka $1M^a$ protíná hlavní osu A^aB^a v bodě *2* a délka b vedlejší poloosy elipsy k^a je rovna délce úsečky $2M^a$, tj. $b = |2M^a| = |S^aC^a| = |S^aD^a|$

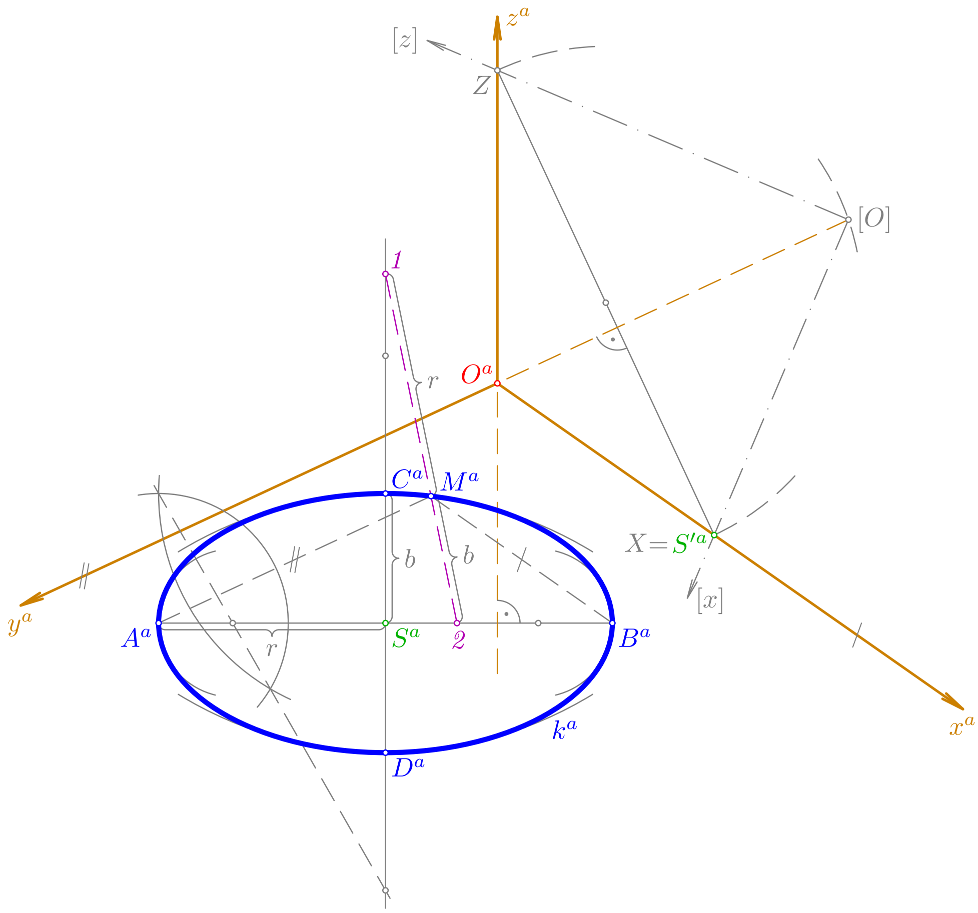


- na závěr této části zadané úlohy je s pomocí oblouků hyperoskulačních kružnic v jejích vrcholech vyrýsována elipsa k^a, která je axonometrickým průmětem dané kružnice $k(S, r{=}3) \subset \pi$; zcela obdobně bychom mohli postupovat, pokud by daná kružnice ležela v nějaké rovině π' rovnoběžné s půdorysnou π

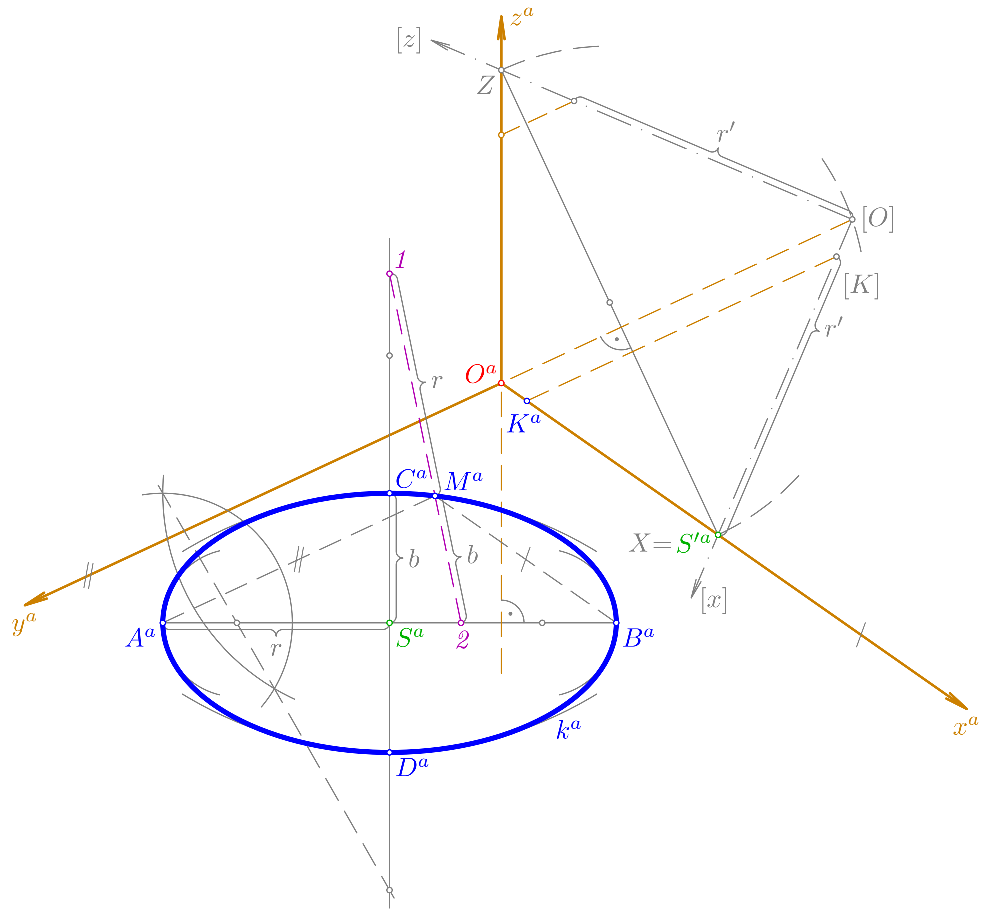
Pozn.: analogický postup, který byl v předchozím použit pro kružnici ležící v půdorysně π, lze odvodit pro sestrojení axonometrického průmětu kružnice, jež leží v nárysně ν nebo v bokorysně μ, či v jiné rovině, která je s některou z nich rovnoběžná...



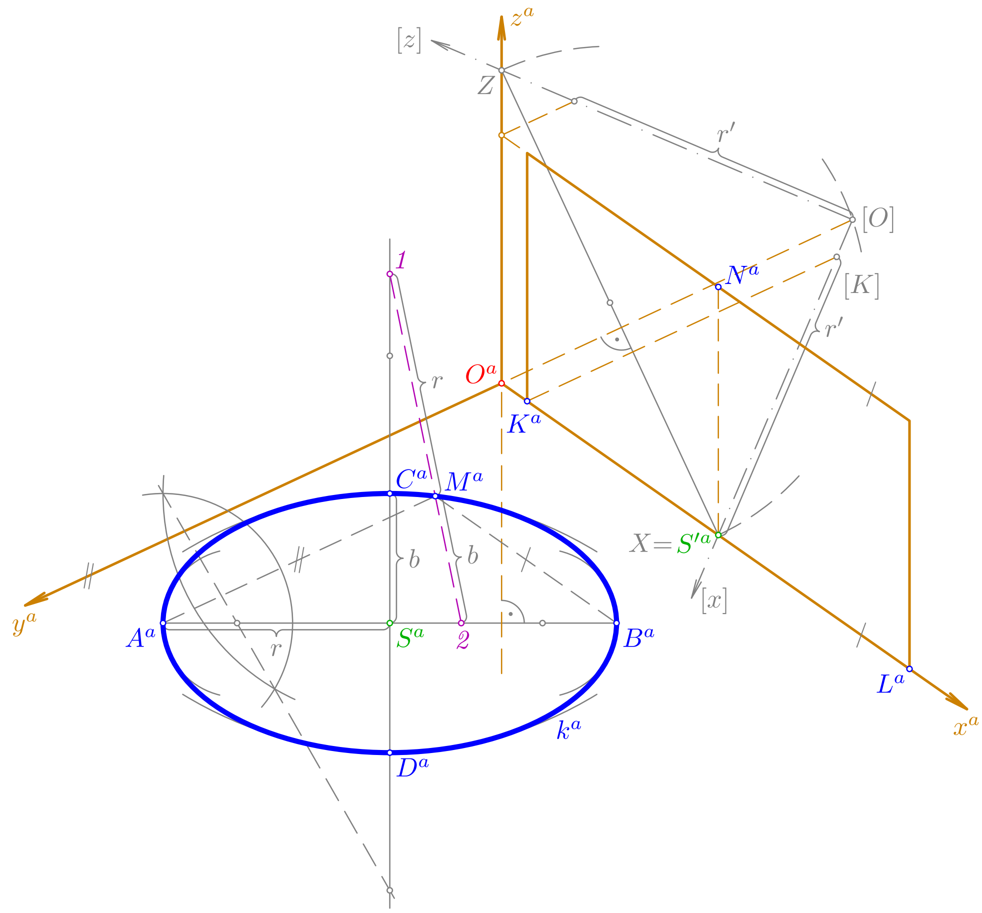
- při zobrazení horní půlkružnice $l(S' \in x, r' = 4) \subset \nu$ použijme poněkud odlišný postup – půjde nám o to najít nejprve průměty K^a, L^a bodů K, L, v nichž uvažovaná půlkružnice l protíná osu x, a průmět N^a nejvyššího bodu N, tj. bodu, v němž danou půlkružnici l protíná rovnoběžka s osou z vedená středem S'; proto nyní veďme axonometrickou průmětnu ρ právě bodem S', a roviny ρ a ν se tak protnou v přímce, jež musí být kolmá k průmětu y^a osy y a na níž leží strana XZ příslušného axonometrického trojúhelníka, přičemž $X = S' = S'^a$ a $Z \in z^a$; zbývající dvě strany $XY \perp z^a$, $ZY \perp x^a$, kde $Y \in y^a$, axonometrického trojúhelníka nebudeme v dalším postupu potřebovat, proto nejsou ani v obrázku vyrýsovány...



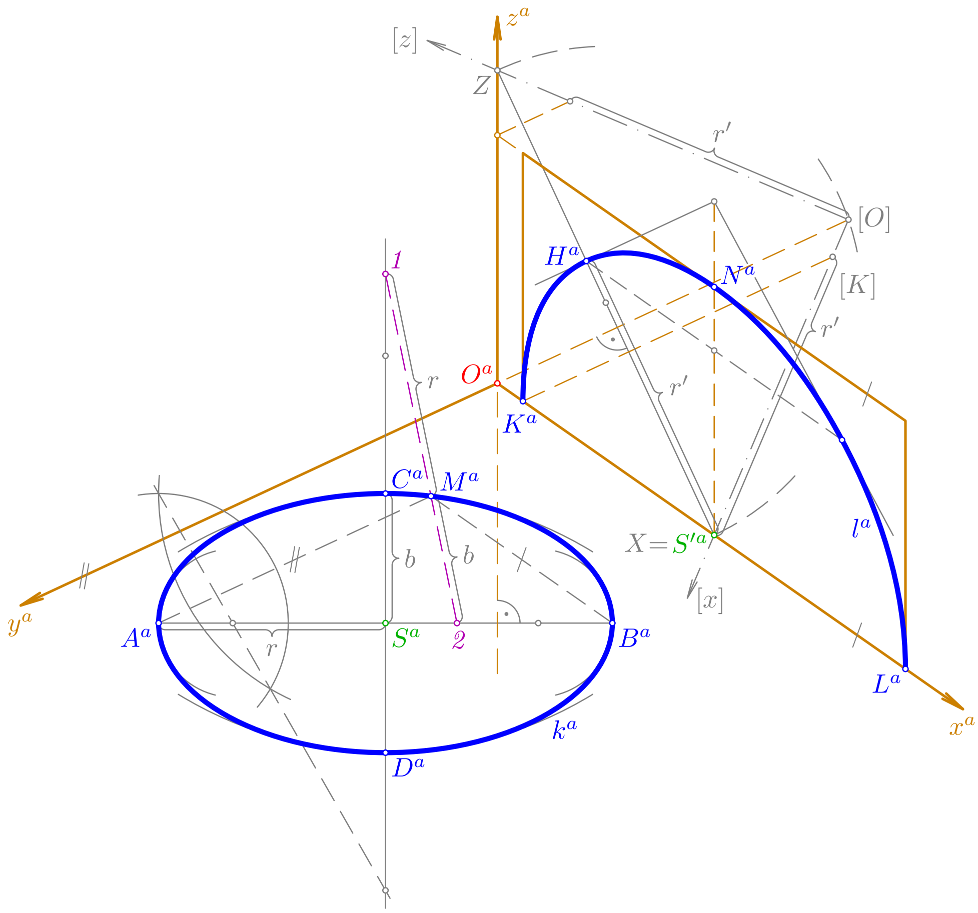
- známým způsobem proveďme otočení nárysny ν do zvolené axonometrické průmětny ρ kolem přímky XZ, tj. sestrojme otočené polohy $[O], [x], [z]$ počátku O a souřadnicových os x, z: přitom užijeme Thaletovu půlkružnici sestrojenou vpravo na průměrem XZ (v obrázku jsou pouze čárkovaně naznačeny její významné oblouky), její průsečík s průmětem y^a osy y je otočenou polohou $[O]$ počátku O a osy $x = OX$, $z = OZ$ se otočí do přímek $[x] = [O]X$, $[z] = [O]Z$, přičemž díky užití **Thaletovy věty** se v otočení zachová pravý úhel, tj. $[x] \perp [z]$; připomeňme ještě, že kvůli přehlednosti bývá zvykem otočené polohy významných útvarů rýsovat čerchovaně. . .



- na otočené polohy $[x]$, $[z]$ můžeme nyní nanést daný poloměr $r' = 4$ ve skutečné velikosti; na polopřímce $X[O]$ je tak sestrojen bod $[K]$, $|X[K]| = r' = 4$, který je otočenou polohou bodu K jakožto jednoho z průsečíků půlkružnice l s osou x; na polopřímce $[O]Z$ je poloměr $r' = 4$ nanesen od bodu $[O]$, koncový bod vzniklé úsečky není nijak označen; následně jsou oba tyto body z otočení tzv. vráceny do průmětu, tj. jsou jimi vedeny kolmice k přímce XZ, a na průmětu x^a osy x je tak sestojen průmět K^a bodu K, na průmětu z^a osy z je pouze vymezeno odpovídající zkrácení daného poloměru r'



- bod L souměrně sdružený s bodem K podle středu $S' = X$ je druhým průsečíkem půlkružnice l s osou x, a tato středová souměrnost se v průmětu zachová – bod K^a můžeme tedy souměrně podle středu $S'^a = X$ přenést do bodu L^a; tečny k půlkružnici l v bodech K, L jsou rovnoběžné s osou z, a v průmětu jsou tedy vedeny body K^a, L^a rovnoběžně s přímkou z^a; podobně doplníme průmět N^a nejvyššího bodu N: neboť zkrácení poloměru r' na průmětu z^a osy z máme zjištěno z předchozího kroku, stačí tedy příslušnou délku nanést od bodu S'^a na rovnoběžku s přímkou z^a; tečna v bodě N je zřejmě rovnoběžná s osou x, a v průmětu tedy prochází bodem N^a rovnoběžně s přímkou x^a – protíná proto přímku z^a v koncovém bodě získaném při předchozím určení zkrácení poloměru r' na průmětu z^a osy z; tím se nám podařilo sestrojit obraz tzv. tečnového půlčtverce opsaného půlkružnici l, v průmětu máme tedy pro půlelipsu l^a tři její body K^a, L^a, N^a i s příslušnými tečnami…



- v posledním kroku sestrojme nejprve hlavní vrchol H^a půlelipsy l^a, a to analogicky jako jsme sestrojili hlavní vrcholy A^a, B^a elipsy k^a: stačí od bodu $S”^a = X$ na polopřímku XZ nanést daný poloměr $r' = 4$ ve skutečné velikosti; získáme tak vlastně průsečík H půlkružnice l s axonometrickou průmětnou ρ, který splývá se svým axonometrickým průmětem H^a, tj. $H^a = H$; navíc můžeme sestrojit bod půlkružnice l, který je souměrně sdružený s bodem H podle přímky $S'N$, a v obou těchto bodech doplníme tečny: v průmětu je tečna ve vrcholu H^a kolmá k přímce XZ a s tečnou vedenou průmětem bodu osově souměrného k bodu H podle přímky $S'N$ se protíná právě na průmětu S'^aN^a přímky $S'N$; tím máme pro půlelipsu l^a, která je průmětem dané půlkružnice $l(S' \in x, r' = 4) \subset \nu$, sestrojeno pět bodů i s tečnami, což by mělo být dostačující k vytažení jejího průběhu volnou rukou; případně bychom mohli pomocí některé z proužkových konstrukcí najít její vedlejší vrchol a použít pomocné oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech, podobně jako jsme to učinili při zobrazení kružnice k

$\square$