Stejnolehlost - řešená úloha

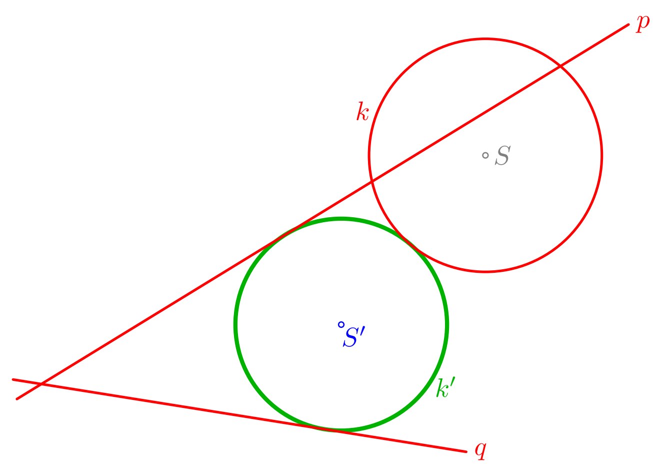
Varianta Apolloniovy úlohy ppk

Řešené úlohy

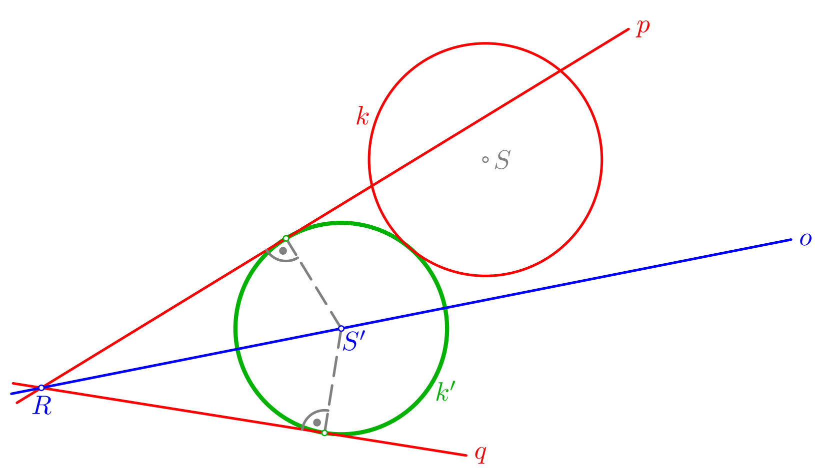
Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká daných různoběžných přímek p, q a dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:

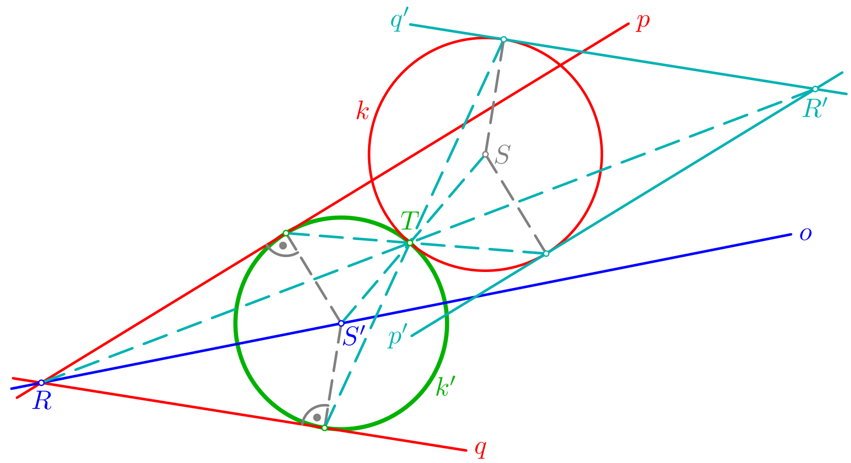
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici $k'(S', r')$, zvolme dvě její různoběžné tečny p, q, dotykovou kružnici $k(S, r)$ a nyní zkoumejme vztahy, které je zde možno využít...



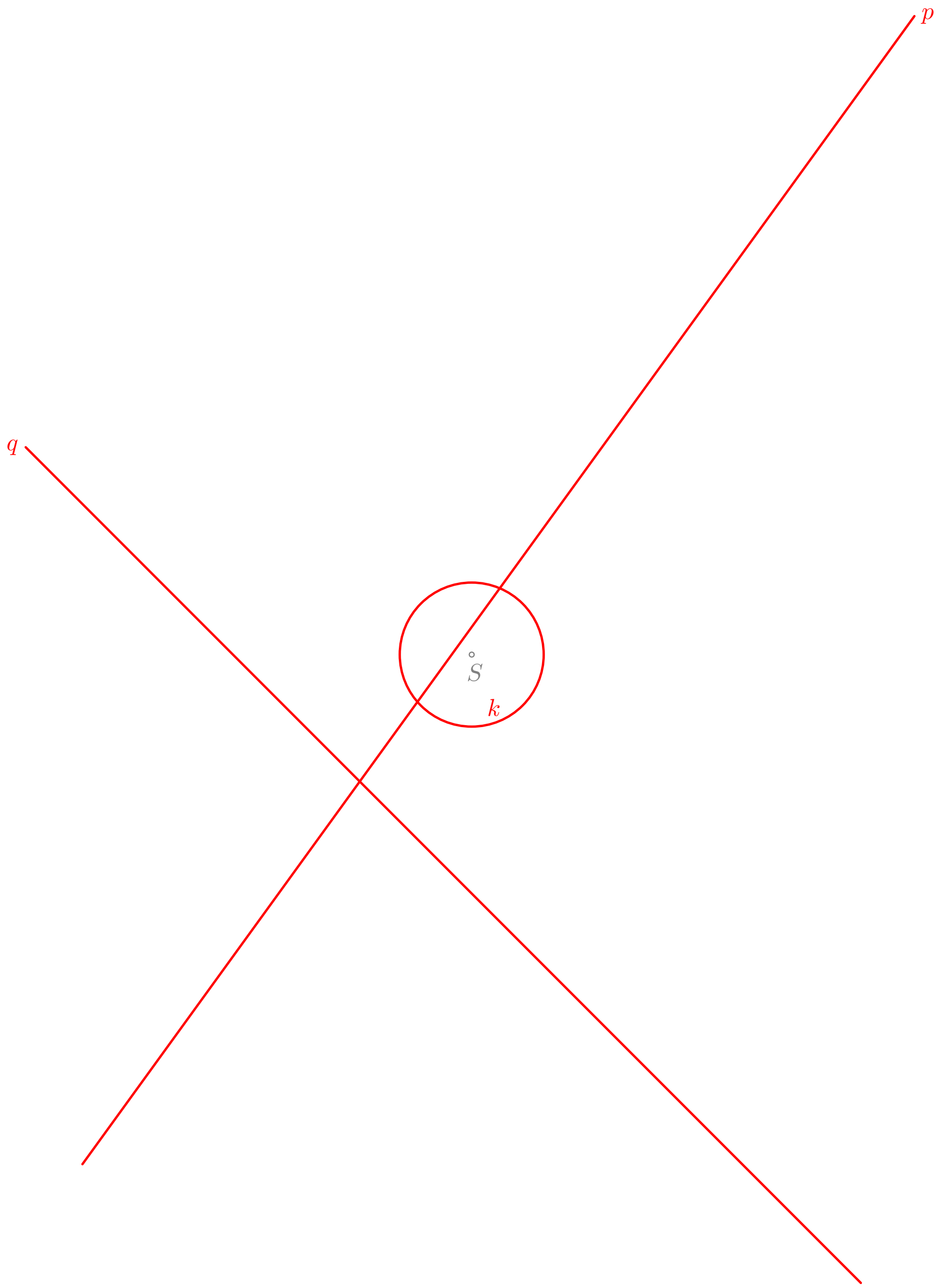
- střed S' kružnice k' musí ležet na ose o jednoho z úhlů sevřených různoběžkami p, q (viz množina $M4$ v přehledu množin všech bodů dané vlastnosti)



- kružnice k a k' jsou stejnolehlé podle středu T, který je jejich bodem dotyku; v této stejnolehlosti odpovídají tečnám p, q kružnice k' tečny p', q' kružnice k, přičemž platí $p' \parallel p$ a $q' \parallel q$; toho využijeme pro řešení dané úlohy...

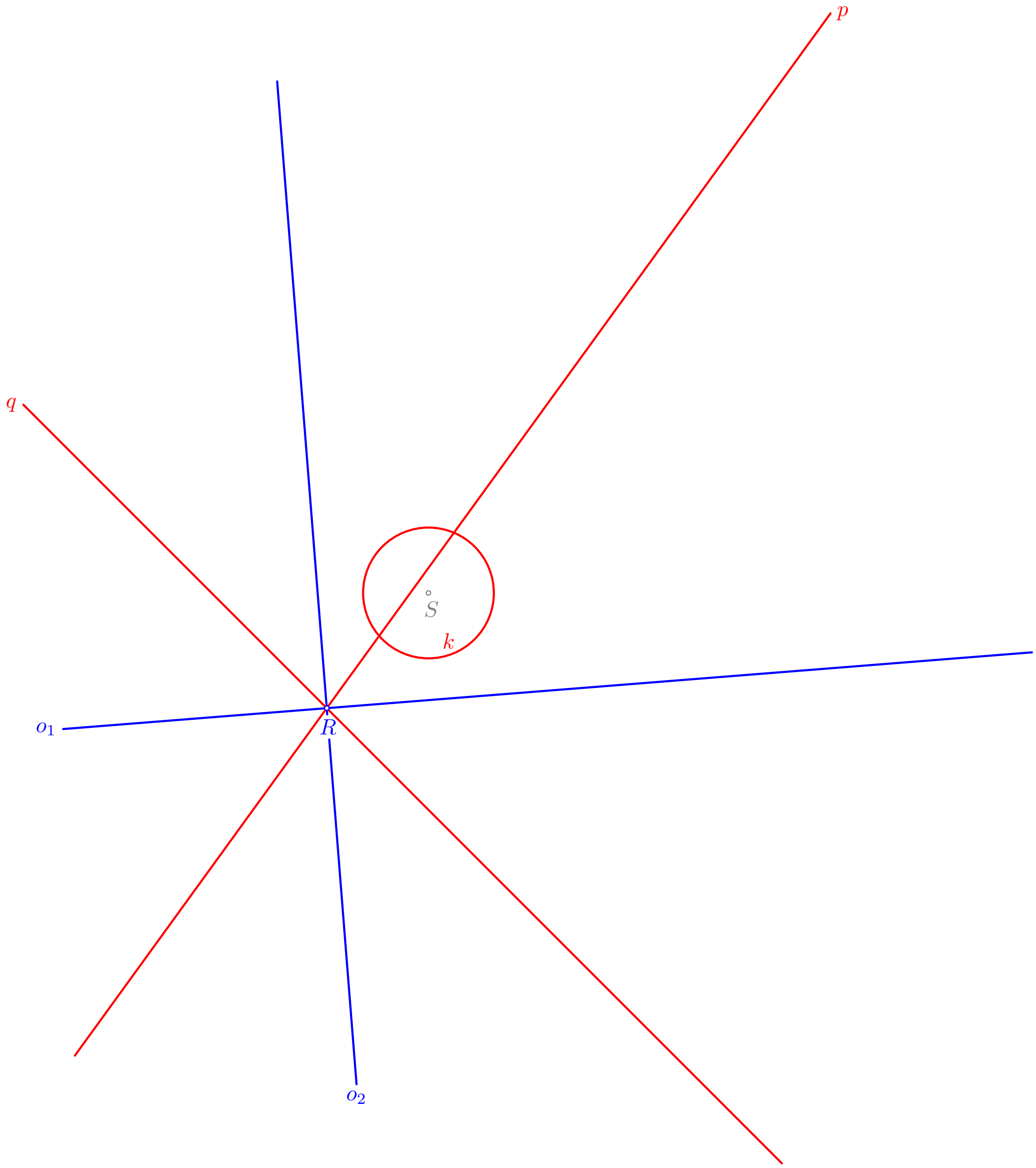


□

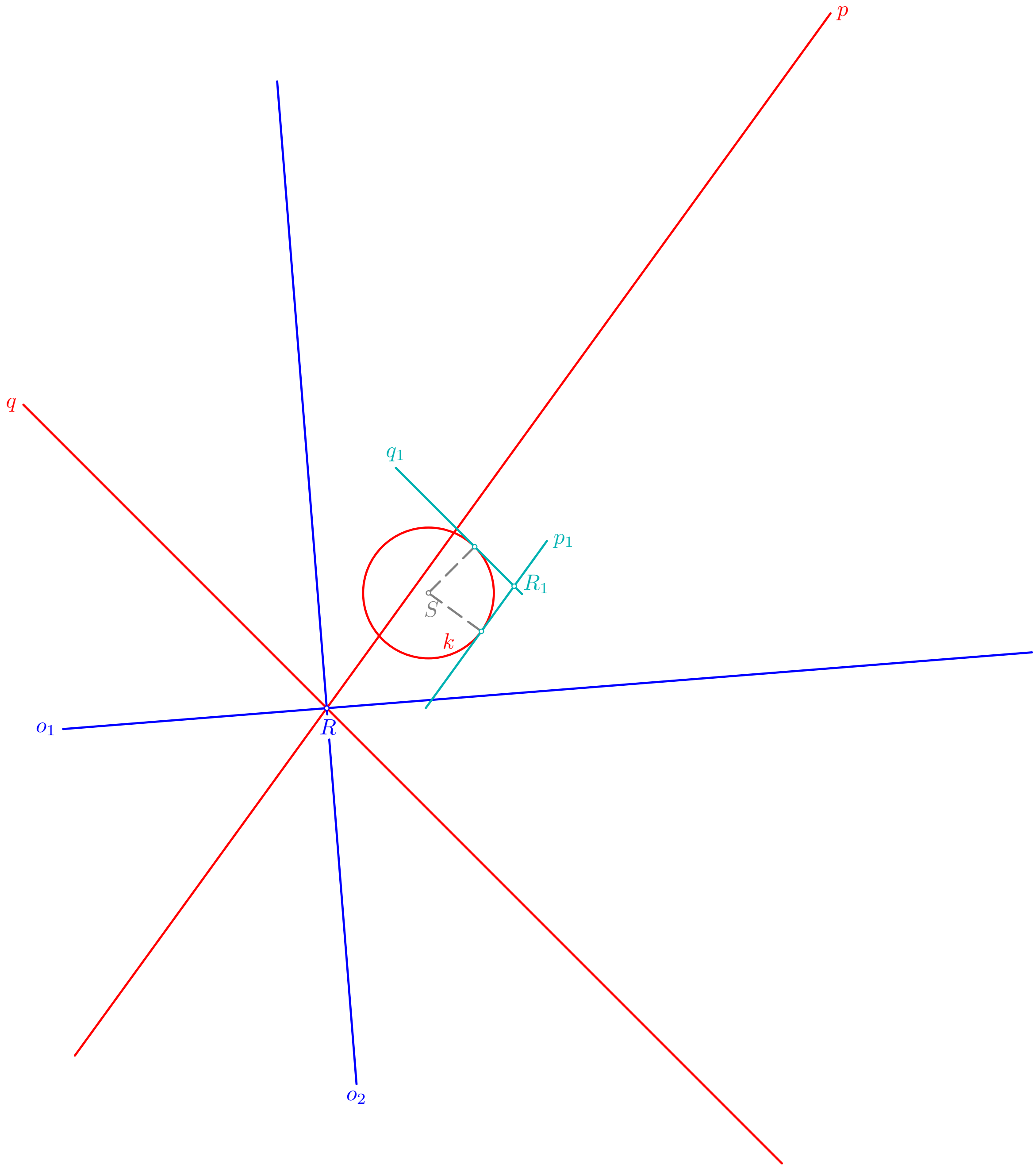


Konstrukce:

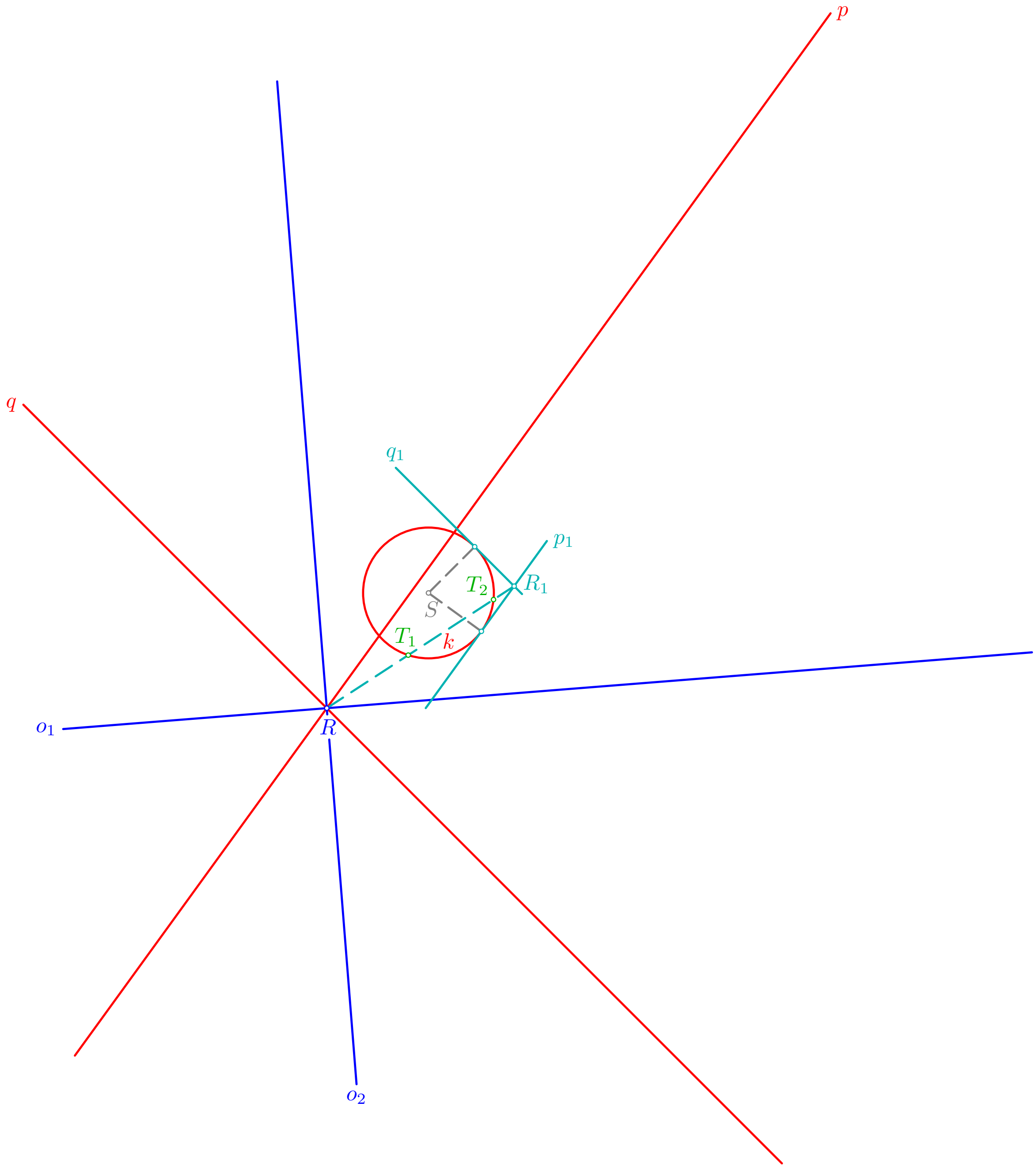
- zadání úlohy: dvě různé různoběžky p, q a kružnice $k(S, r)$



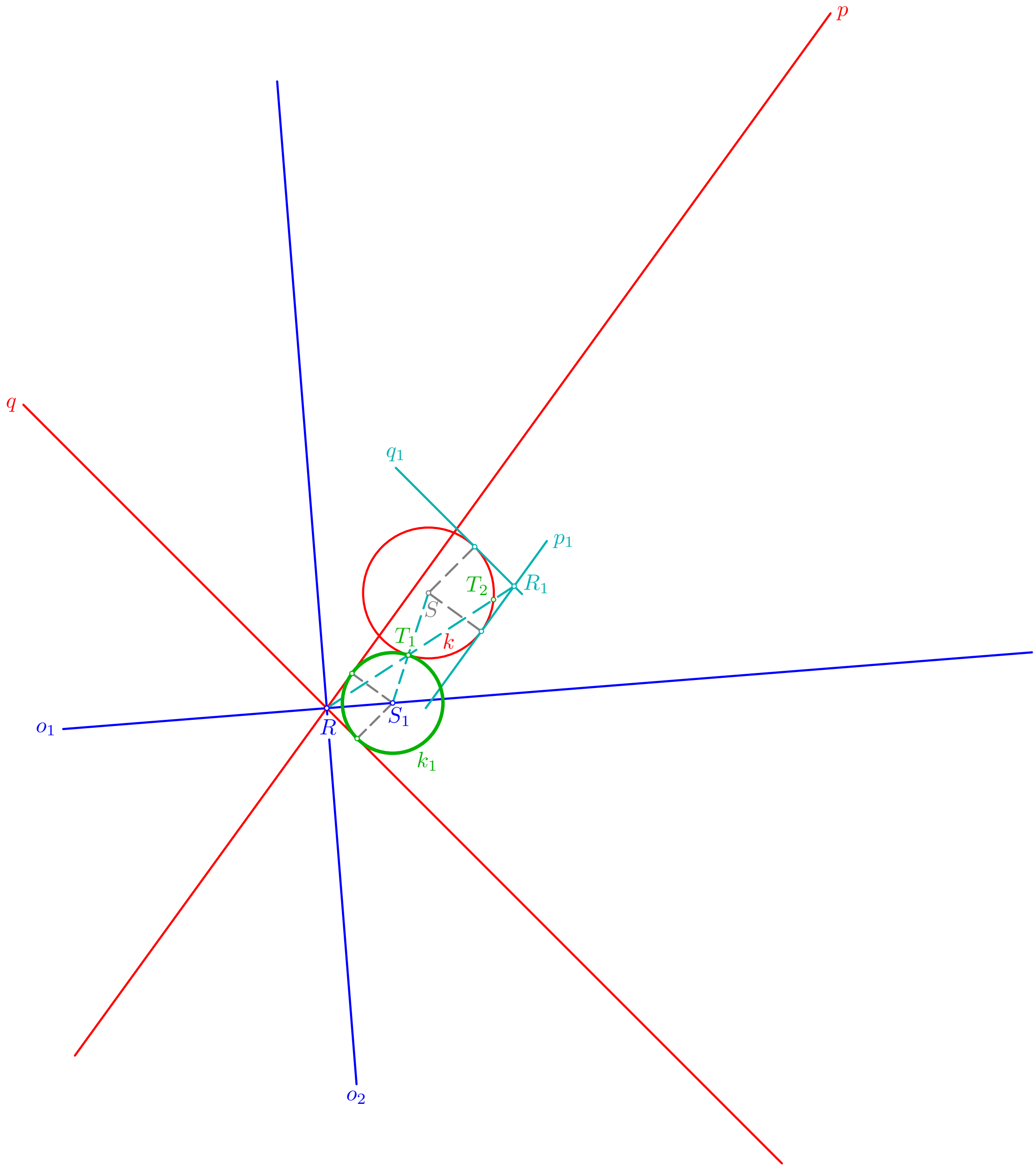
- nejprve veďme průsečíkem $R = p \cap q$ osy o_1, o_2 ($o_1 \perp o_2$) úhlů sevřených různoběžkami p, q



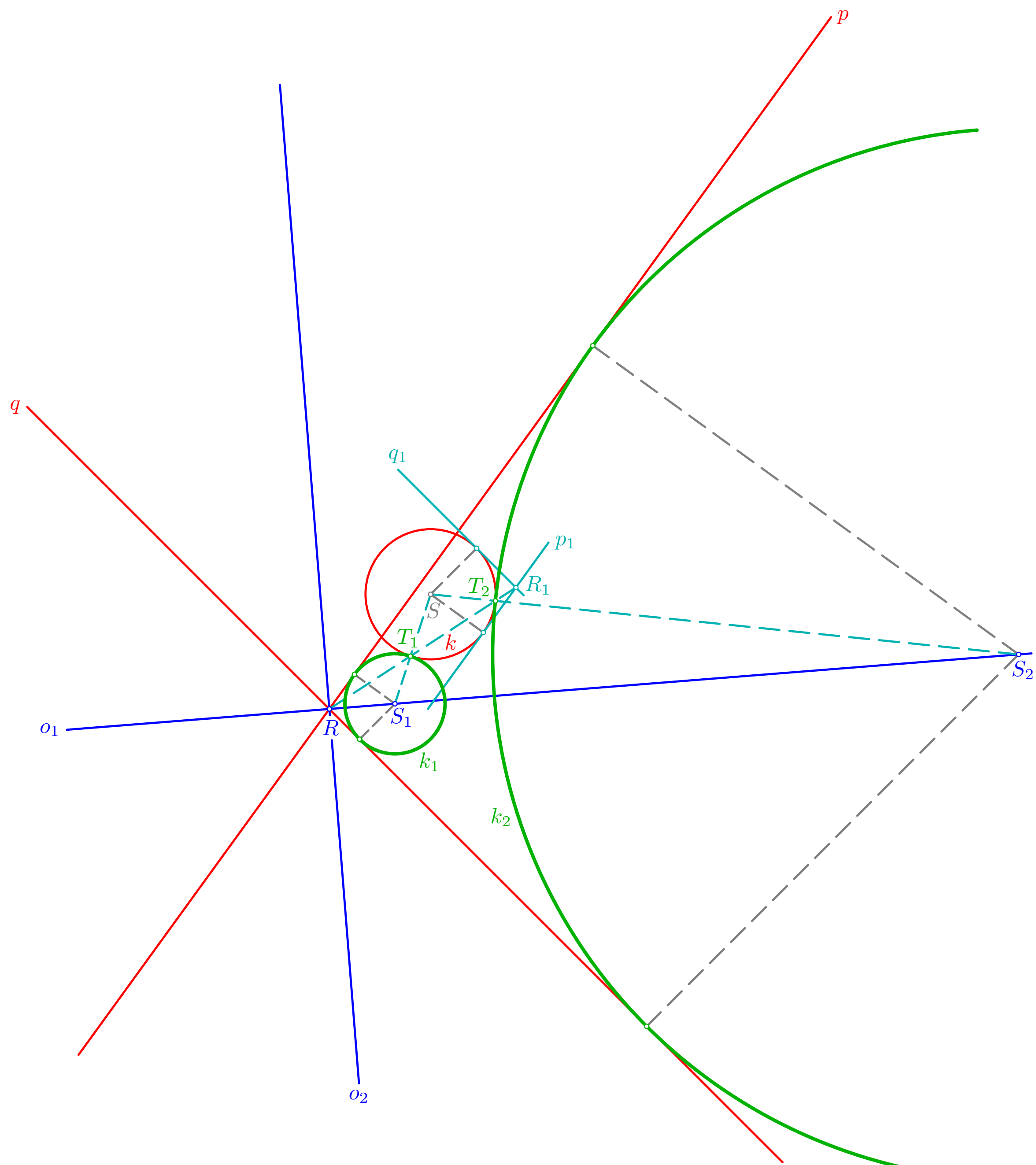
- ke kružnici k sestrojme tečny $p_1 \parallel p$ a $q_1 \parallel q$ a najděme jejich průsečík $R_1 = p_1 \cap q_1$



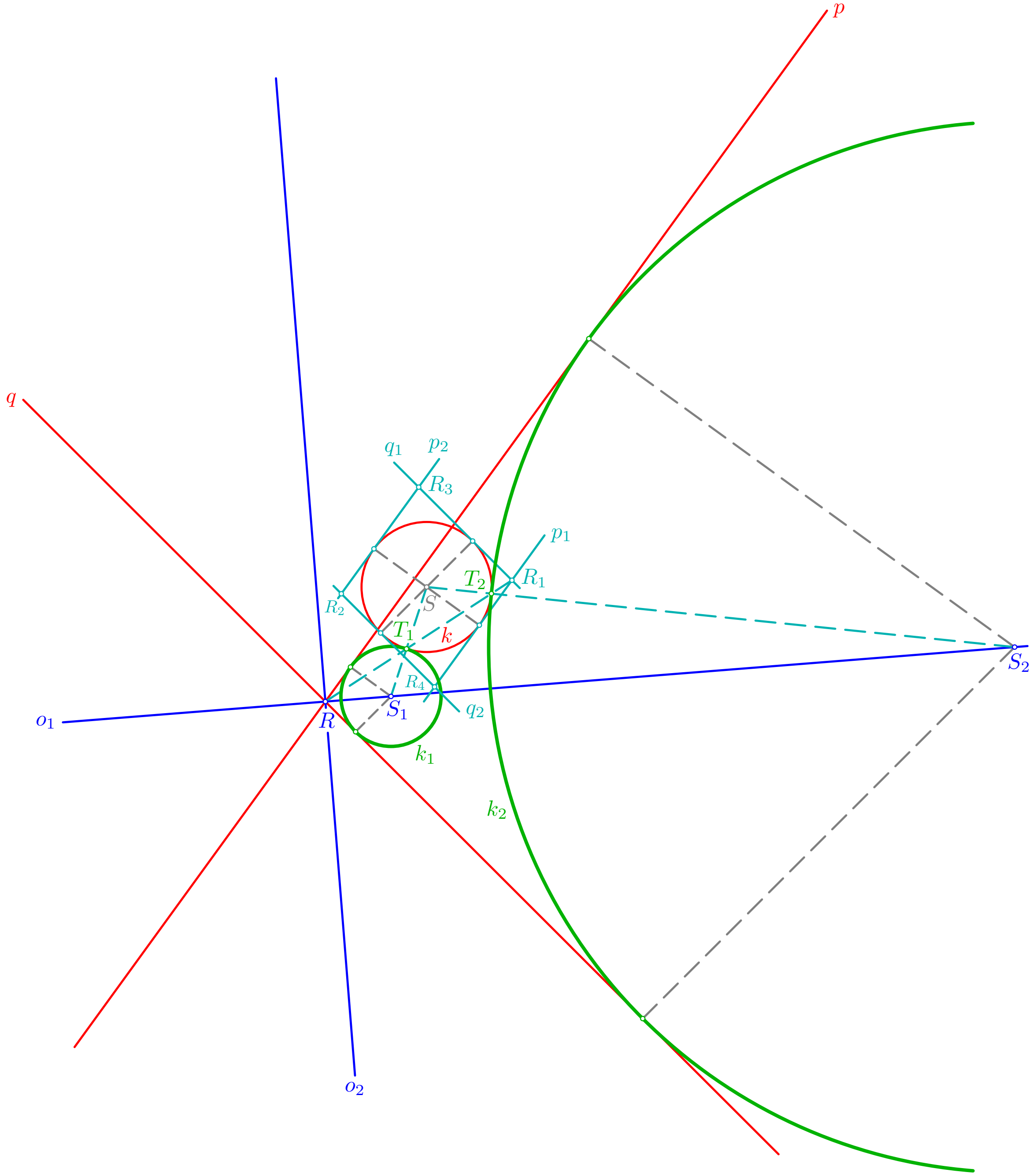
- přímka RR_1 protíná kružnici k v bodech T_1, T_2



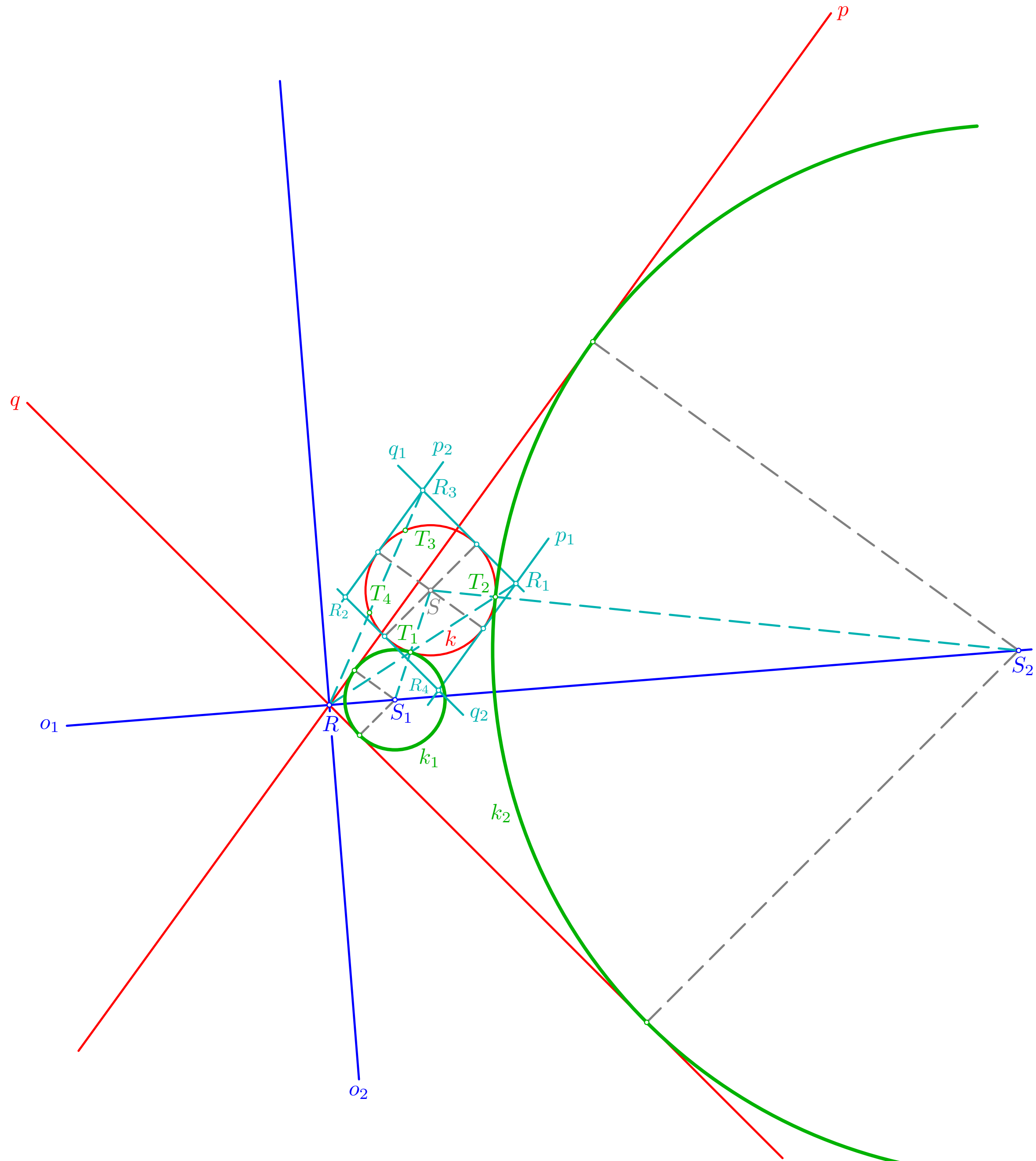
- bod T_1 je bodem dotyku dané kružnice k a hledané kružnice $k_1(S_1, r_1 = |S_1T_1|)$, pro jejíž střed S_1 platí $S_1 = ST_1 \cap o_1$



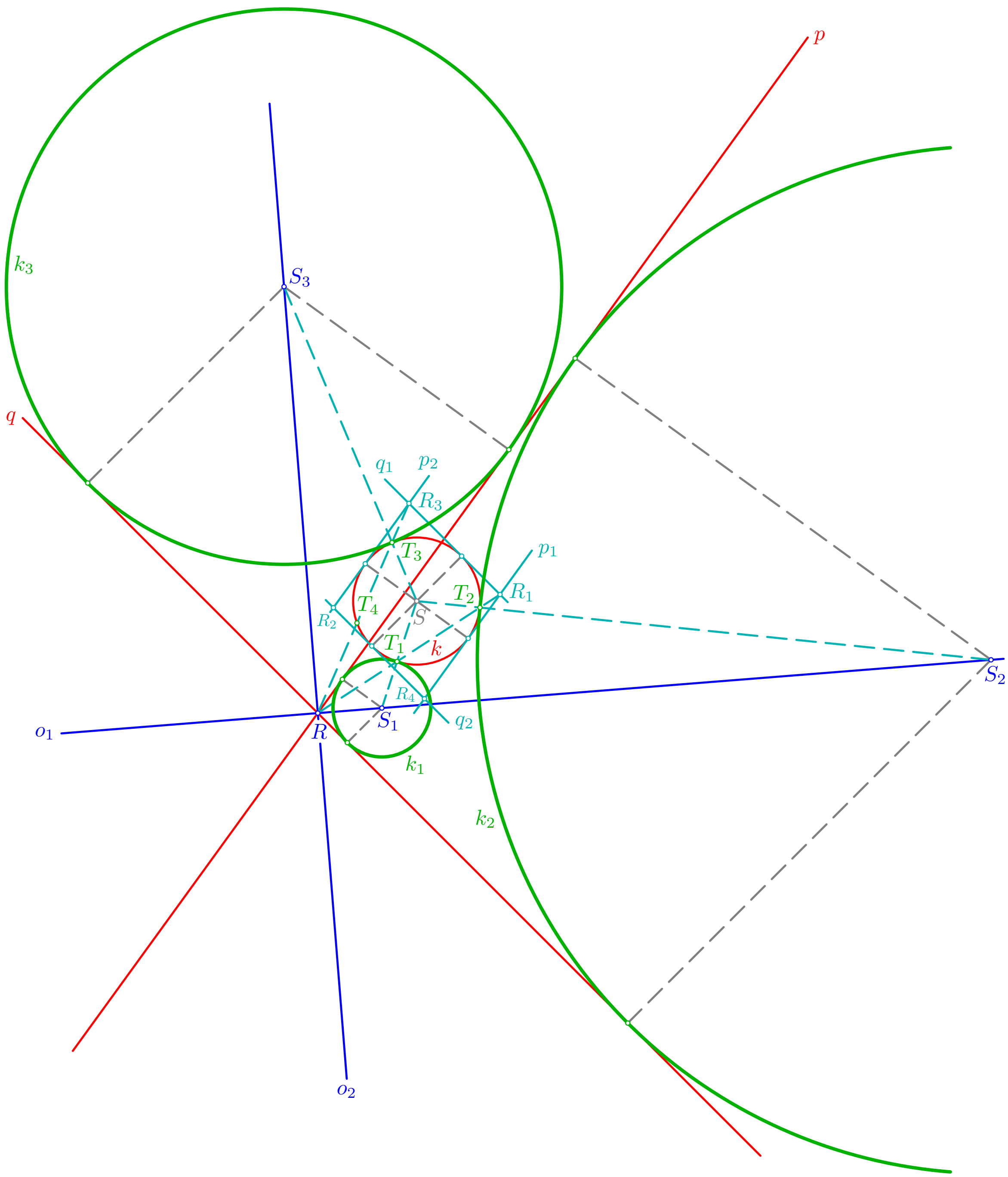
- podobně protíná přímka ST_2 osu o_1 v bodě S_2, který je středem hledané kružnice $k_2(S_2, r_2 = |S_2T_2|)$, jež se dotýká daných různoběžek p, q i dané kružnice k



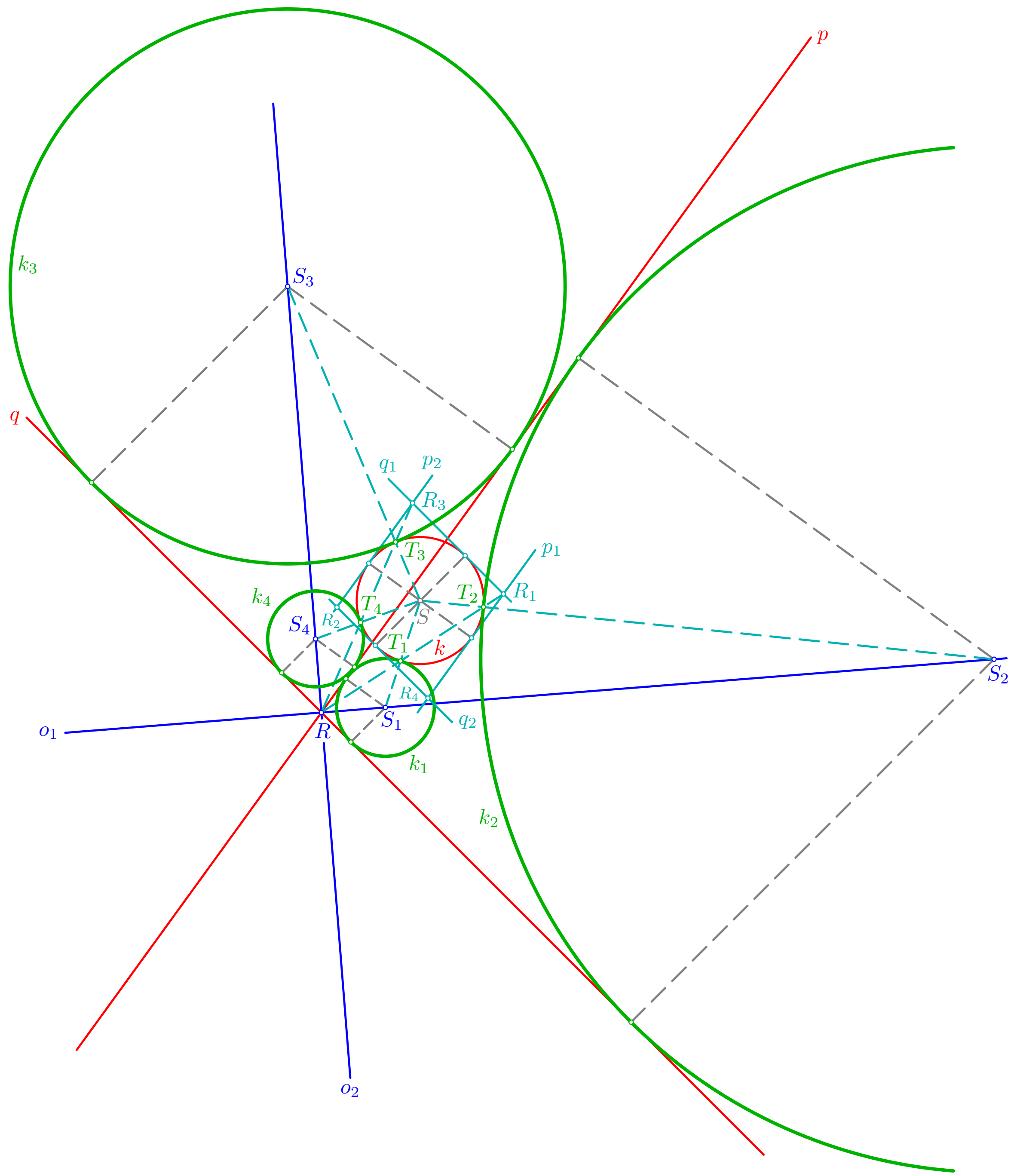
- ke kružnici k sestrojme zbývající dvě tečny $p_2 \parallel p, q_2 \parallel q$ a na nich označme zbývající vrcholy $R_2 = p_2 \cap q_2, R_3 = p_2 \cap q_1, R_4 = p_1 \cap q_2$ tečnového rovnoběžníka



- z přímek RR_2, RR_3, RR_4 protíná při zvoleném zadání kružnici k už jen přímka RR_3 a to v bodech T_3, T_4



- bod T_3 je bodem dotyku kružnice k a kružnice $k_3(S_3, r_3 = |S_3T_3|)$, kde střed S_3 je průsečíkem přímky ST_3 s osou o_2



- podobně protíná přímka ST_4 osu o_2 v bodě S_4, který je středem hledané kružnice $k_4(S_4, r_4 = |S_4T_4|)$, jež se také dotýká daných různoběžek p, q i dané kružnice k

$\square$

Diskuze:
Úloha může mít právě osm, právě šest, právě čtyři nebo právě dvě řešení. Podrobnější diskuze je přenechána čtenáři jako cvičení.