Množiny všech bodů dané vlastnosti - řešená úloha

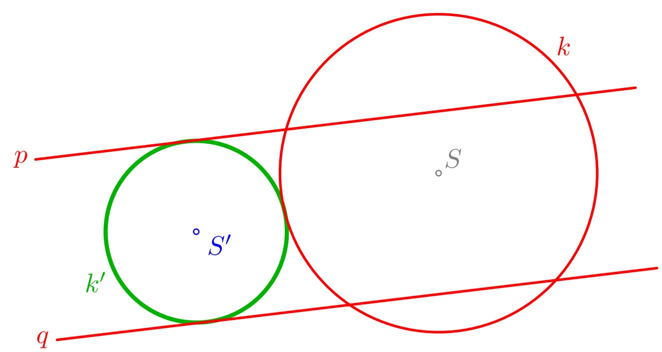
Varianta Apolloniovy úlohy ppk

Řešené úlohy

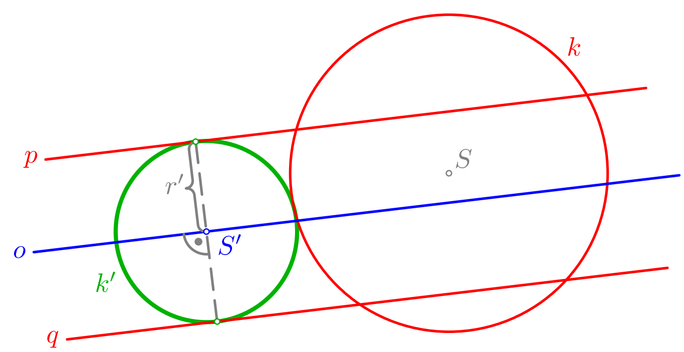
Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou daných různých rovnoběžných přímek p, q ($p \parallel q, p \neq q$) a dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:

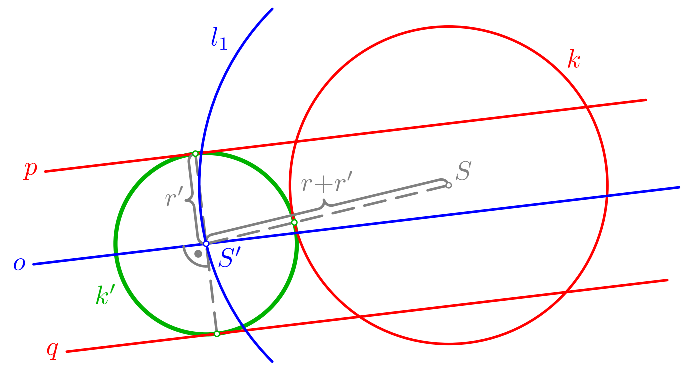
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k' o středu S' a libovolném poloměru r', zvolme dvě její navzájem různé rovnoběžné tečny p, q ($p \parallel q, p \neq q$), kružnici $k(S, r)$, která se dotýká kružnice k', a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí...



- střed S' kružnice k' musí ležet na ose o pásu omezeného rovnoběžkami p, q (viz množinu $M3$ v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti) a pro poloměr r' kružnice k' platí $r' = \frac{1}{2}|pq|$



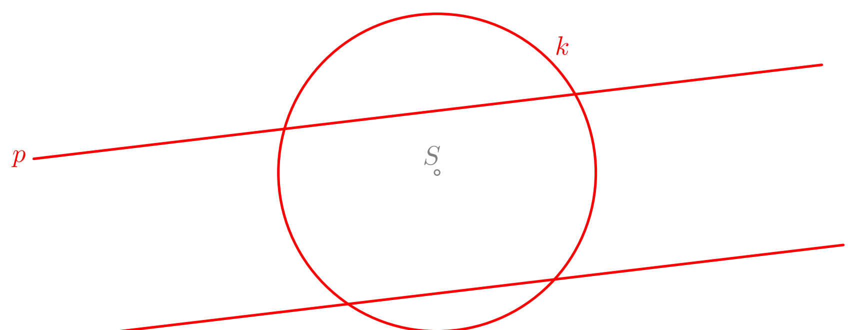
- podle vlastností množiny $M8$ z přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti musí tedy bod S' ležet také na jedné ze soustředných kružnic $l_1(S, r{+}r')$ nebo $l_2(S, |r{-}r'|)$; v náčrtku je zvolen vnější dotyk kružnic k, k' a střed S' tedy leží na kružnici $l_1(S, r{+}r')$



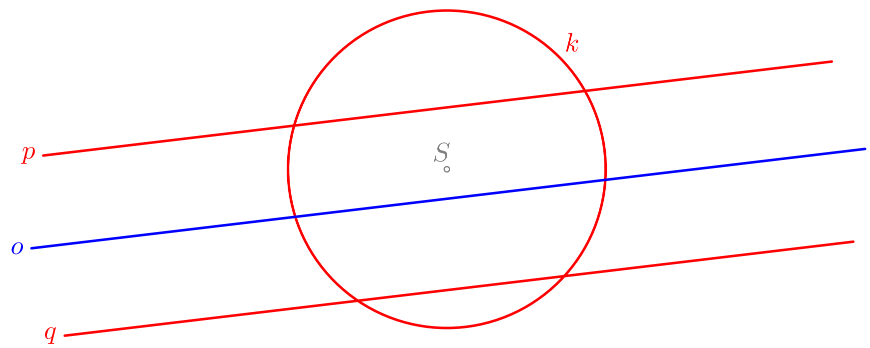
□

Konstrukce:

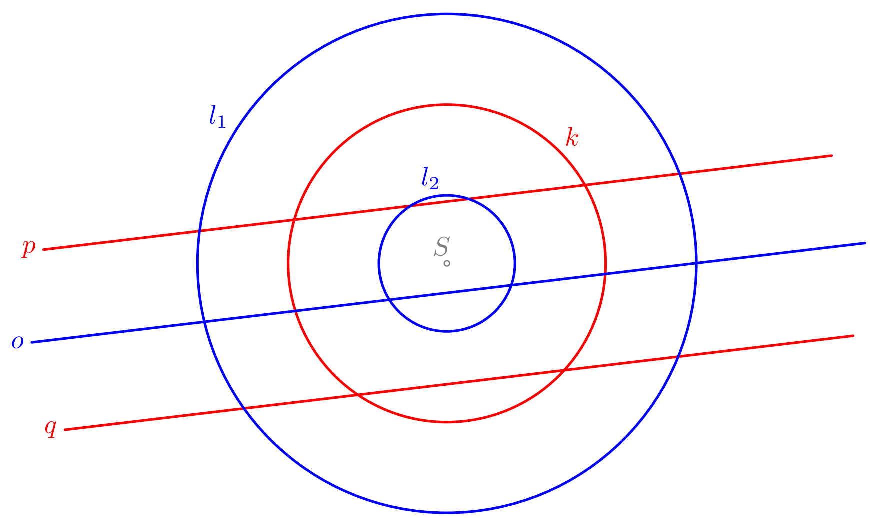
- zadání úlohy: jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q ($p \parallel q, p \neq q$) a kružnice $k(S, r)$



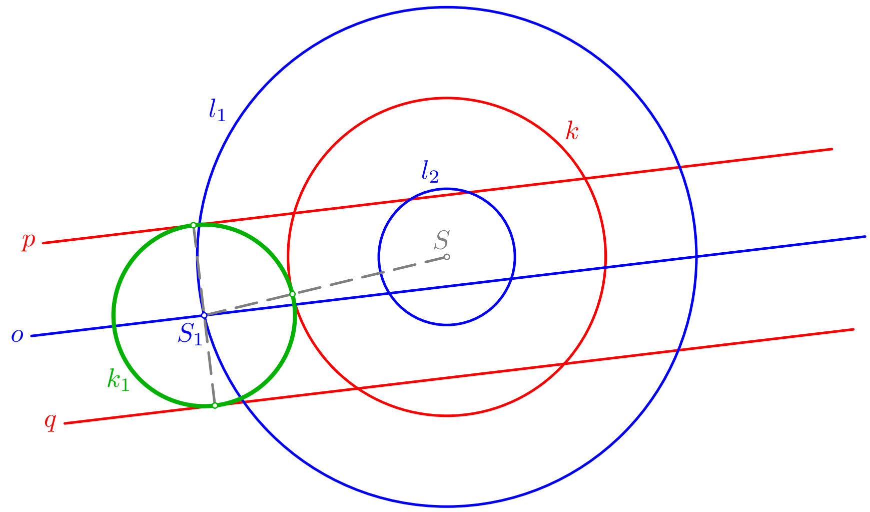
- nejprve sestrojme osu o pásu omezeného rovnoběžkami p, q, na níž bude ležet střed hledané kružnice



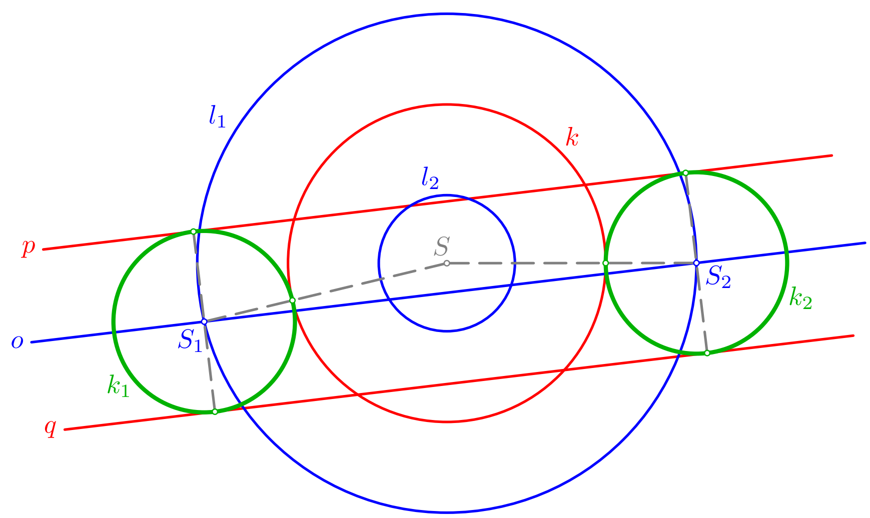
- dále sestrojme kružnice $l_1(S, r+r')$ a $l_2(S, |r-r'|)$, kde $r' = \frac{1}{2}|pq| = |op| = |oq|$, na nichž leží středy kružnic, které se dotýkají kružnice k a mají zjištěný poloměr r'



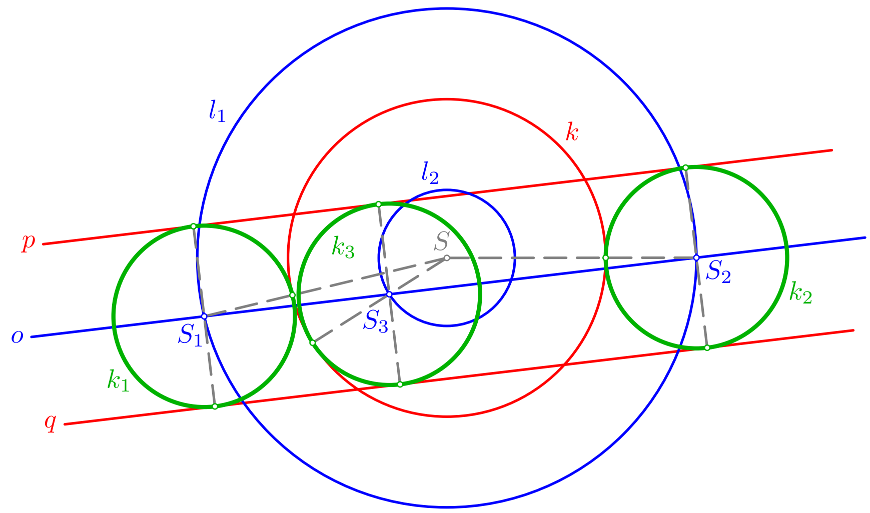
- nyní postupně hledejme průsečíky osy o s kružnicemi l_1, l_2: osa o protíná kružnici l_1 ve dvou bodech, jeden z nich označme S_1 a podle rozboru je to střed hledané kružnice $k_1(S_1, r')$, která se dotýká daných rovnoběžek p, q i dané kružnice $k(S, r)$; body dotyku na přímkách p, q jsou průsečíky těchto přímek s kolmicí k ose o vedenou bodem S_1; bod dotyku kružnic k_1 a k najdeme jako průsečík úsečky SS_1 s kružnicí k



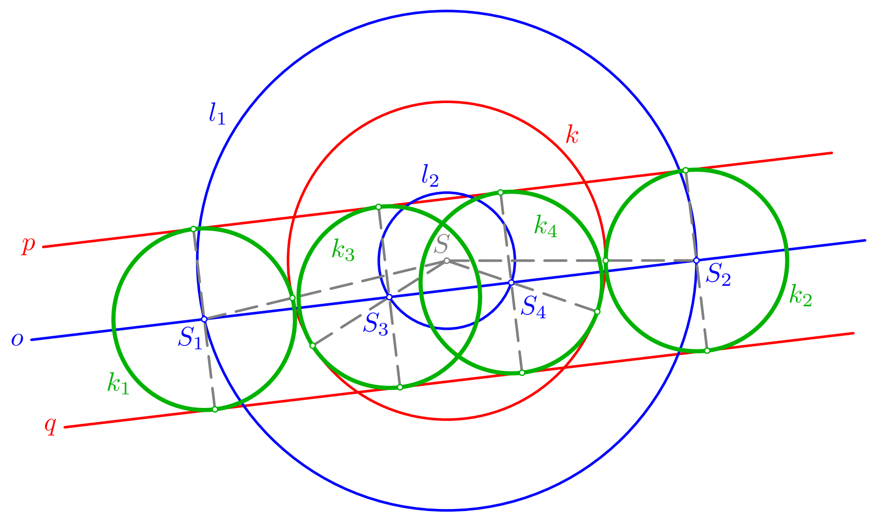
- druhý průsečík osy o a kružnice l_1 označme S_2 a opišme kolem něj kružnici $k_2(S_2, r')$; kružnice k_1 a k_2 jsou zřejmě osově souměrné podle kolmice k ose o vedené středem S; současně mají obě tato řešení k_1, k_2 vnější dotyk s danou kružnicí k



- třetím řešením úlohy je kružnice $k_3(S_3, r')$, kde bod S_3 je jedním z průsečíků osy o s kružnicí l_2; v tomto případě najdeme bod dotyku kružnic k_3 a k jako průsečík kružnice k s polopřímkou SS_3



- analogicky doplňme poslední kružnici $k_4(S_4, r')$, kde S_4 je druhým průsečíkem osy o a kružnice l_2; tato kružnice k_4 je opět osově souměrná s kružnicí k_3 podle téže osy; obě tato řešení k_3, k_4 mají s danou kružnicí k vnitřní dotyk



□

Diskuze:

Úloha může mít čtyři, tři, dvě, jedno nebo žádné řešení. Podrobnější provedení diskuze je přenecháno čtenáři jako cvičení.