Množiny všech bodů dané vlastnosti - řešená úloha

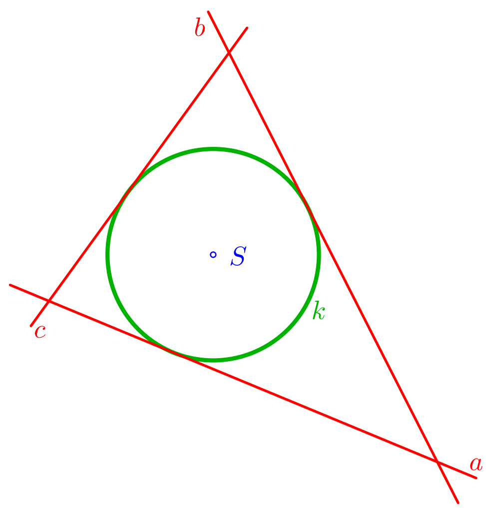
Apolloniova úloha ppp

Řešené úlohy

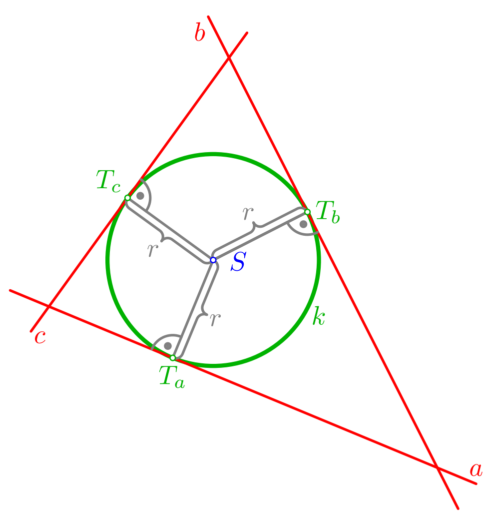
Příklad: Sestrojte kružnici, která se dotýká tří daných navzájem různých přímek a, b, c.

Rozbor úlohy:

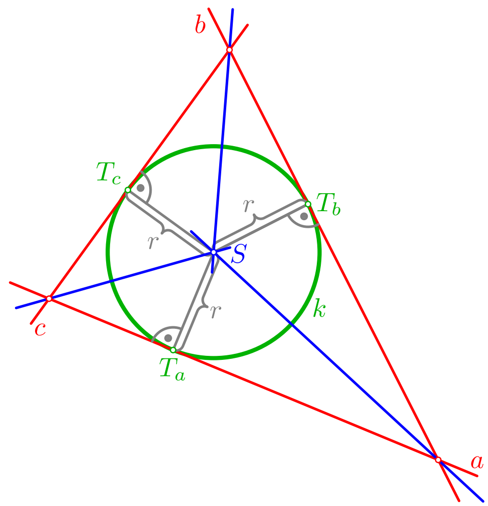
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k o středu S a libovolném poloměru r, zvolme tři její navzájem různé tečny a, b, c a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí...



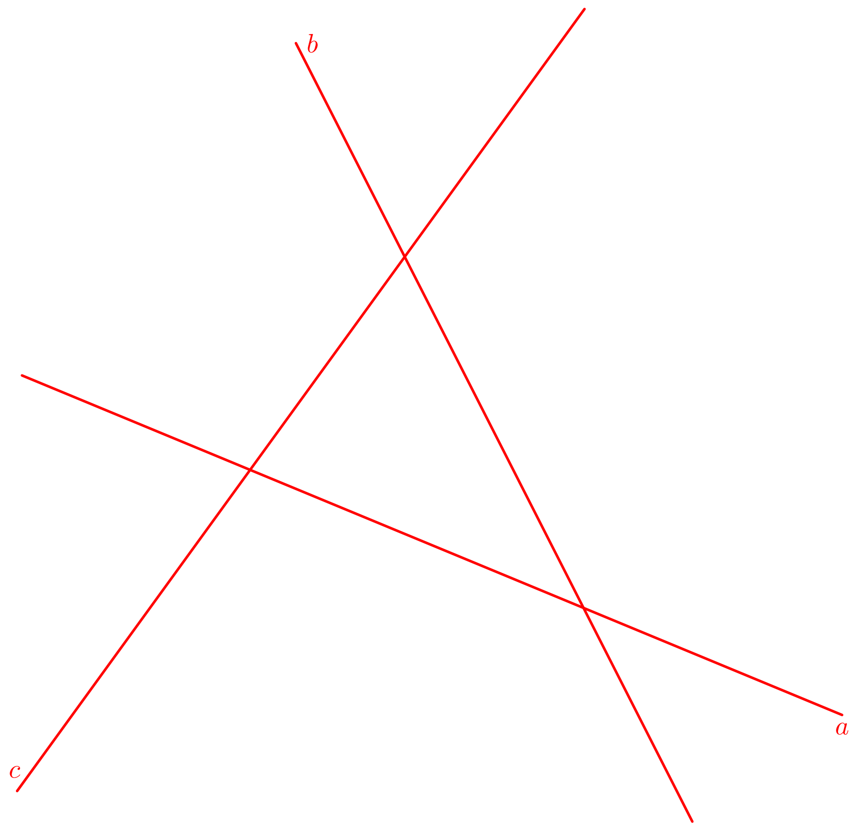
- zřejmě pro přímky a, b, c a bod S platí $|aS|=|bS|=|cS|=r$, tj. střed S kružnice k má stejnou vzdálenost r od přímek a, b, c



- podle vlastností množiny $M4$ z přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti musí tedy bod S ležet na jedné z os úhlů přímkami a, b sevřených; ze stejného důvodu leží také na jedné z os úhlů sevřených přímkami a, c a současně na jedné z os úhlů sevřených přímkami b, c; tím je nalezen vztah mezi danými (přímky a, b, c) a hledanými (kružnice k, především její střed S) prvky a je možno přistoupit k následující konstrukci

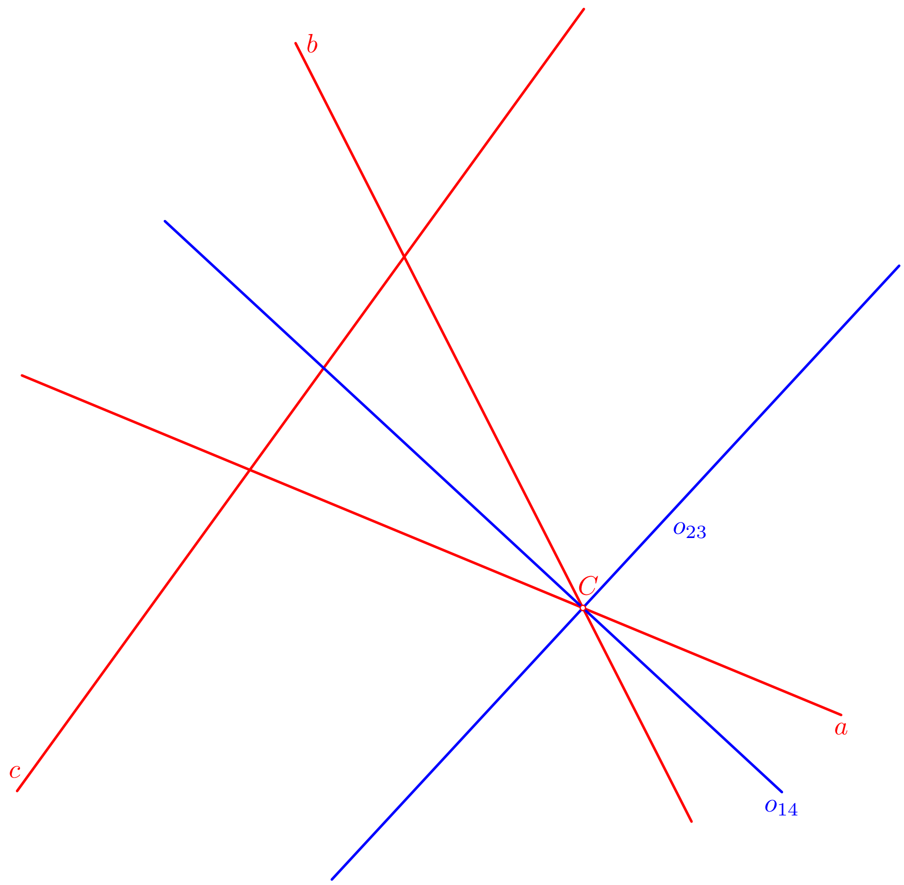


□

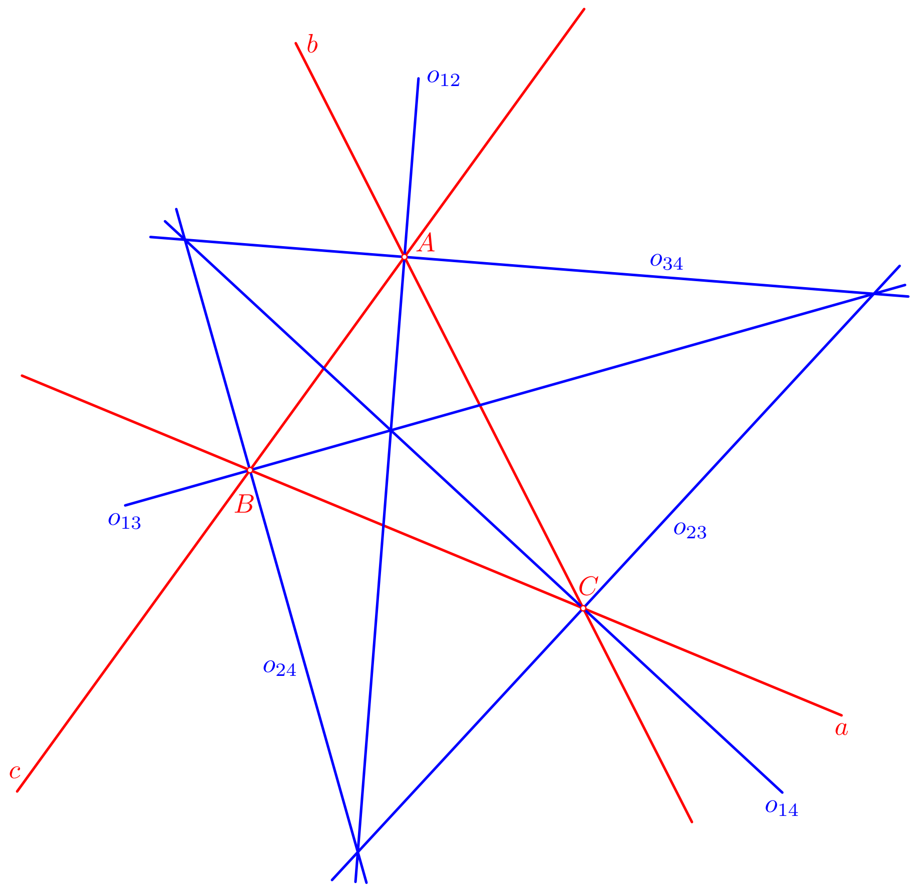


Konstrukce **(dosti náročná na přesnost rýsování):**

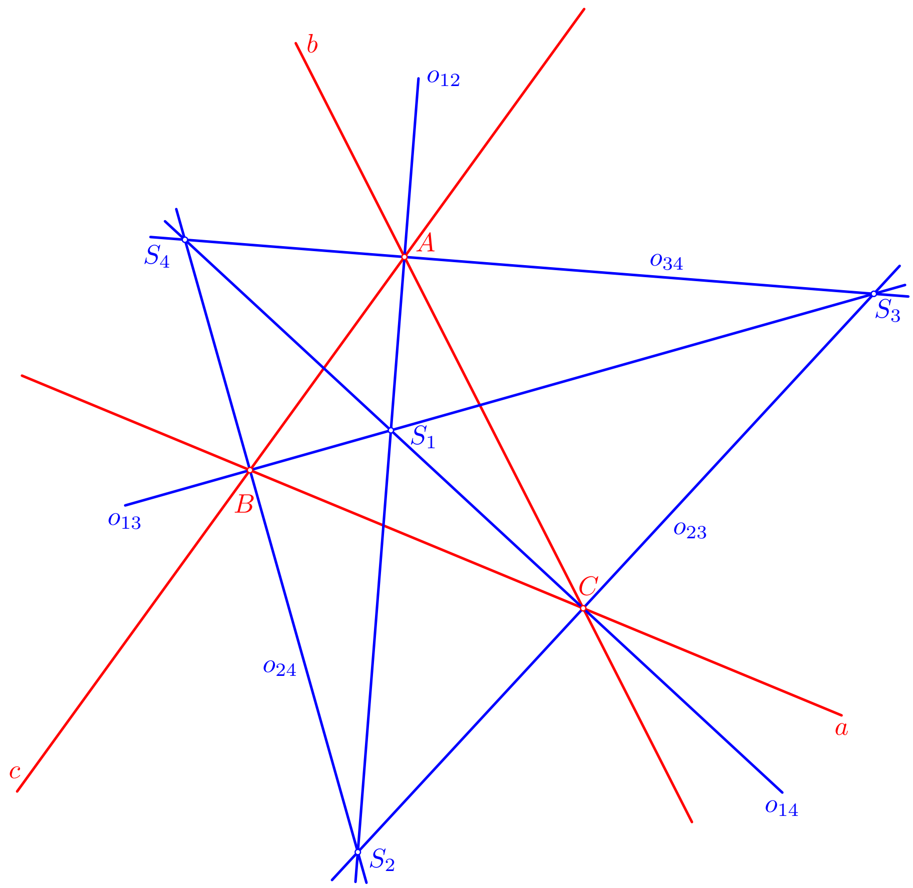
- zadání úlohy: jsou dány tři navzájem různé přímky a, b, c



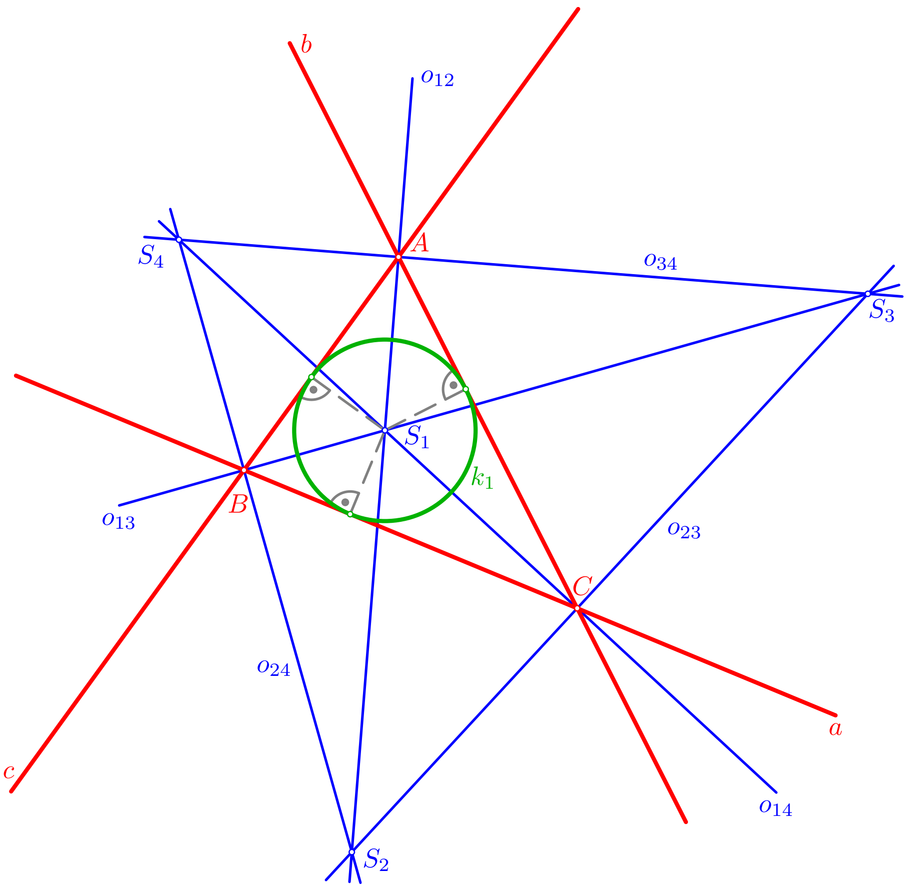
- podle závěru rozboru sestrojme nejprve průsečík $C = a \cap b$ daných přímek a, b a jím veďme obě osy o_{14} a o_{23} ($o_{14} \perp o_{23}$) úhlů přímkami a, b sevřených



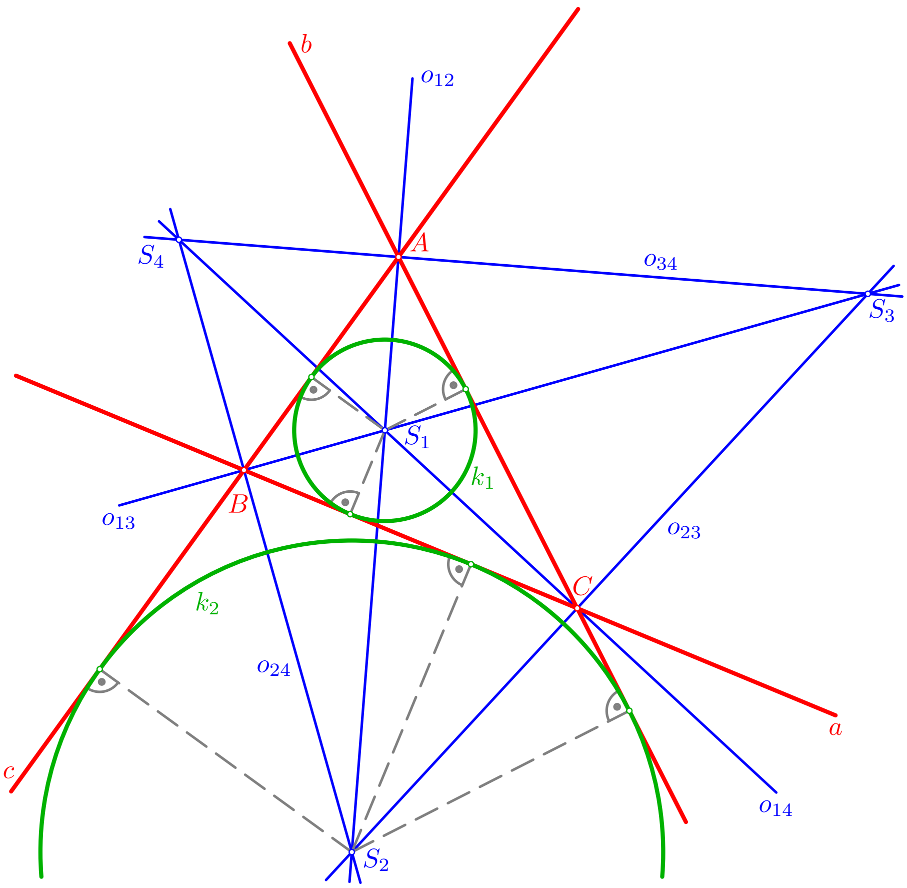
- totéž proveďme analogicky v bodě $B = a \cap c$: zde získáme osy o_{13} a o_{24} ($o_{13} \perp o_{24}$) úhlů sevřených přímkami a, c; a ještě naposled rozdělme osami o_{12} a o_{34} ($o_{12} \perp o_{34}$) úhly sevřené přímkami b, c (ty se protínají v bodě $A = b \cap c$)



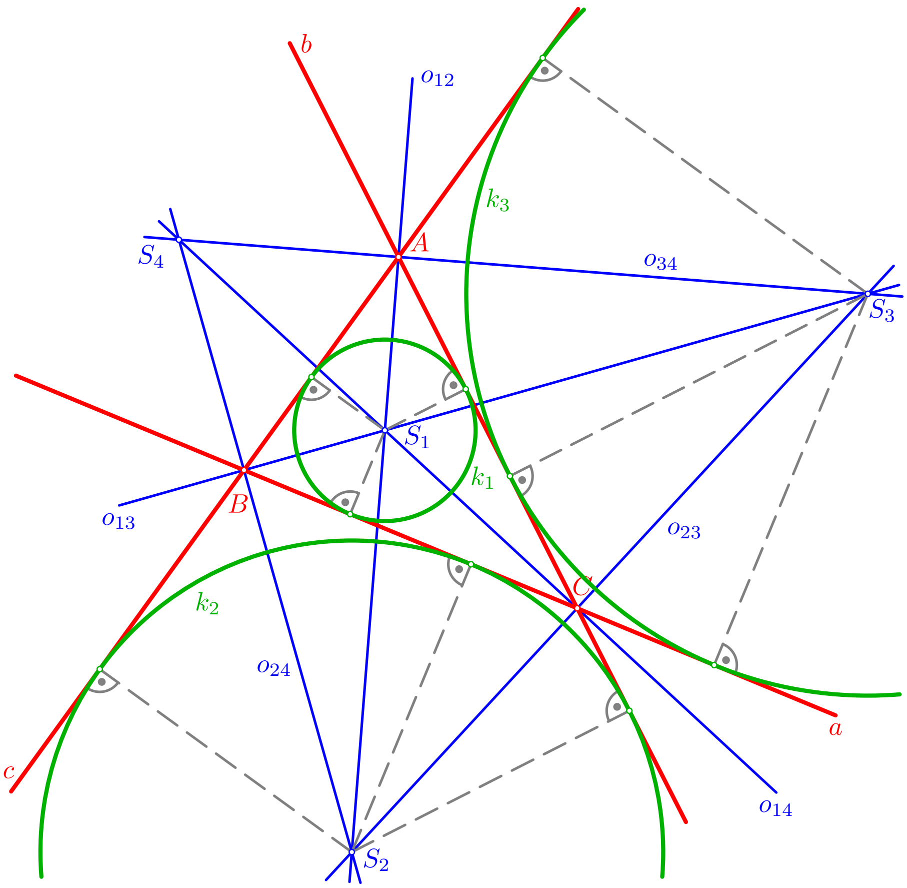
- při přesném rýsování musí vyjít, že se vždy tři ze šesti sestrojených os protínají v jednom bodě: získáme tak celkem čtyři průsečíky $S_1{=}o_{12}\cap o_{13}\cap o_{14}$, $S_2{=}o_{12}\cap o_{23}\cap o_{24}$, $S_3{=}o_{13}\cap$ $\cap\ o_{23}\cap o_{34}$ a $S_4{=}o_{14}\cap o_{24}\cap o_{34}$; podle $M4$ pro každý takto sestrojený bod S_i, kde $i{=}1,2,3,4$, platí, že jeho vzdálenost od daných přímek a,b,c je stejná, a je to tedy střed hledané kružnice; pro větší přehlednost sestrojme tyto kružnice postupně



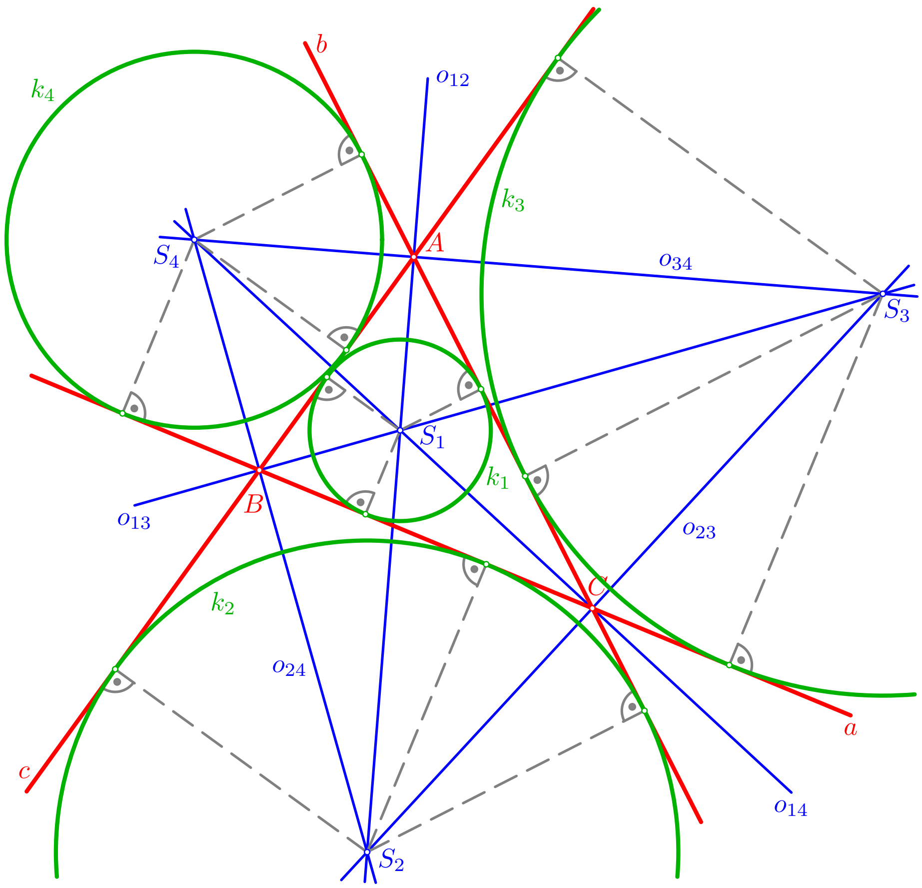
- bodem S_1 veďme kolmice k daným tečnám a, b, c a v průsečících najdeme příslušné body dotyku; bod S_1 leží ve vnitřní oblasti trojúhelníka ABC a kružnice $k_1(S_1, r_1 = |aS_1| = = |bS_1| = |cS_1|)$ se tudíž nazývá kružnicí trojúhelníku ABC **vepsanou**



- podobně sestrojme kružnici $k_2(S_2, r_2{=}|aS_2|{=}|bS_2|{=}|cS_2|)$ tzv. **připsanou** ke straně a trojúhelníka ABC



- analogicky pro kružnici $k_3(S_3, r_3{=}|aS_3|{=}|bS_3|{=}|cS_3|)$ připsanou ke straně b trojúhelníka ABC



- a konečně je doplněna i kružnice $k_4(S_4, r_4{=}|aS_4|{=}|bS_4|{=}|cS_4|)$ připsaná ke straně c trojúhelníka ABC

□

Diskuze:
V obecném případě má úloha právě čtyři řešení; jsou-li dvě z přímek a, b, c rovnoběžné a třetí je s nimi různoběžná, má tato úloha právě dvě řešení (pro rovnoběžky se sestrojí osa pásu jimi určeného - viz množina $M3$ v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti); jsou-li všechny tři dané přímky a, b, c rovnoběžné, nemá úloha žádné řešení (osy příslušných pásů jsou také rovnoběžné).