Mocnost bodu ke kružnici - řešená úloha

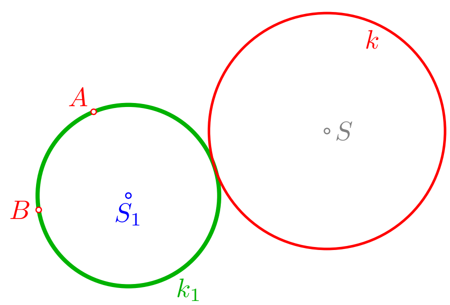
Apolloniova úloha BBk

Řešené úlohy

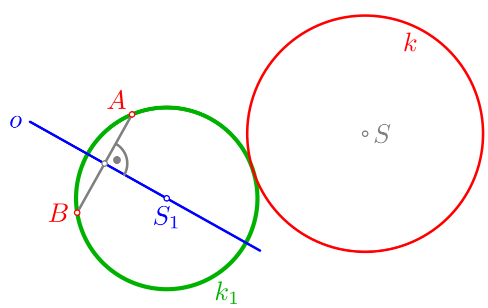
Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází danými různými body A, B a dotýká se dané kružnice $k(S, r)$.

Rozbor úlohy:

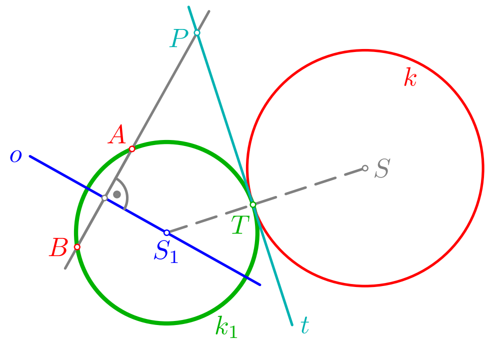
- předpokládejme, že úloha je vyřešena: načrtněme kružnici k_1 o středu S_1 a libovolném poloměru r_1, zvolme na ní dva body A, B, doplňme dotykovou kružnici $k(S, r)$ a nyní zkoumejme vztahy, které zde platí...



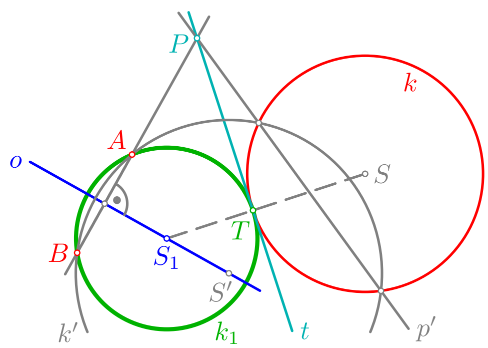
- střed S_1 kružnice k_1 musí ležet na ose o úsečky AB (viz množinu $M2$ v přehledu nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti)



- společná tečna t kružnic k, k_1 je současně také jejich chordálou; průsečík $P = t \cap AB$ má tedy stejnou mocnost ke kružnici k i ke kružnici k_1



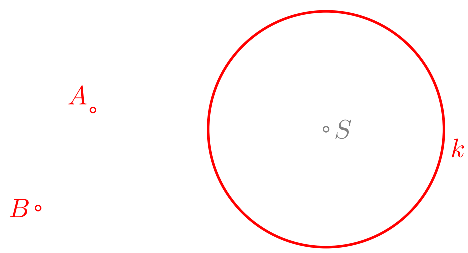
- bodem P pak musí procházet i chordála p' dané kružnice k a zvolené kružnice $k'(S', r')$, která prochází body A, B (tj. $S' \in o$); díky tomu lze potenční střed P kružnic k, k', k_1 a následně tečnu t sestrojit...



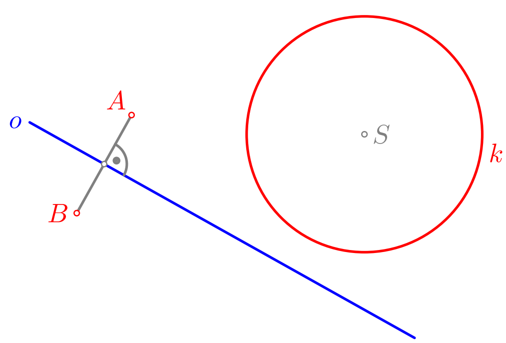
$\square$

Konstrukce:

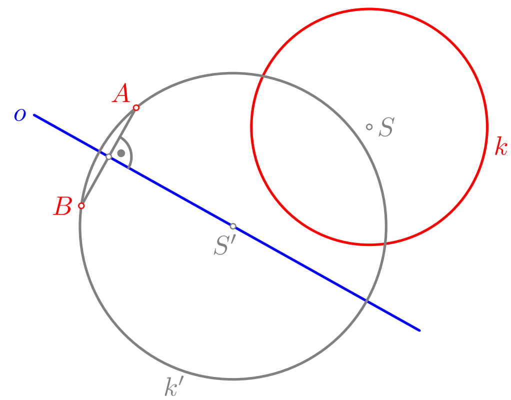
- zadání úlohy: jsou dány různé body A, B a kružnice $k(S, r)$



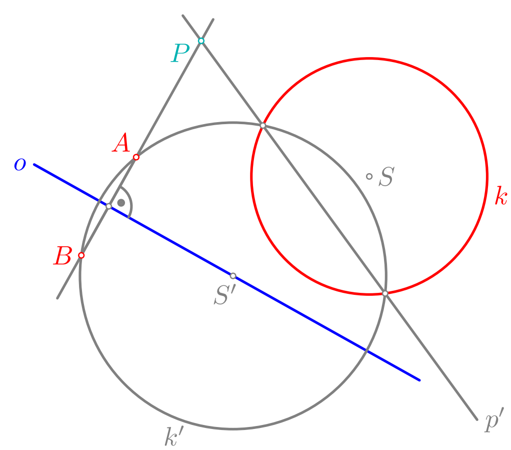
- podle rozboru sestrojme nejprve osu o úsečky AB



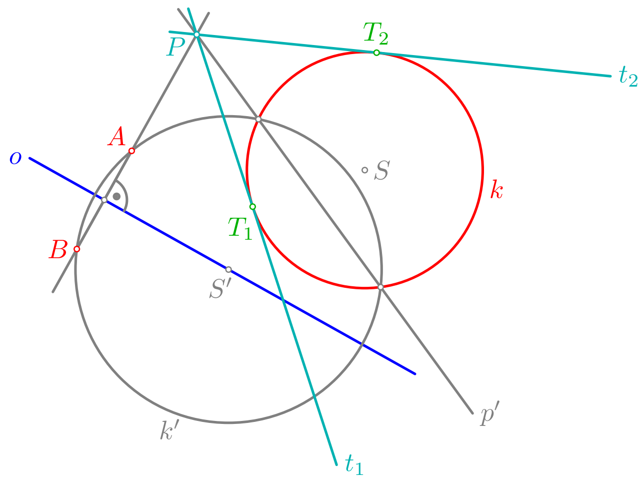
- dále zvolme kružnici $k'(S', r')$ tak, aby procházela body A, B (její střed S' tedy leží na ose o) a aby protínala kružnici k



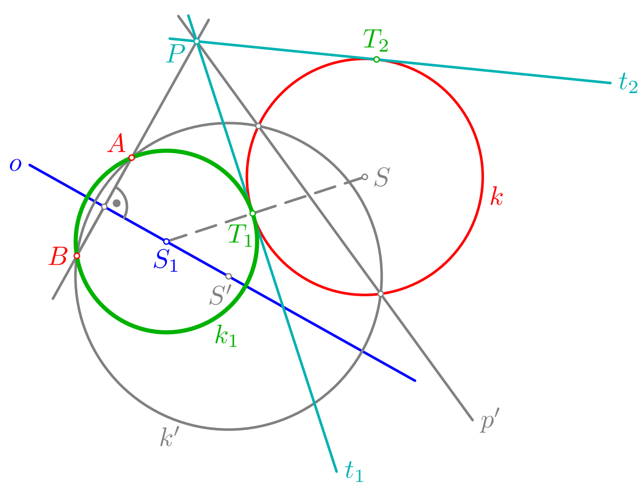
- sestrojme chordálu p' kružnic k, k' a na ní bod $P = p' \cap AB$, který je hledaným potenčním středem



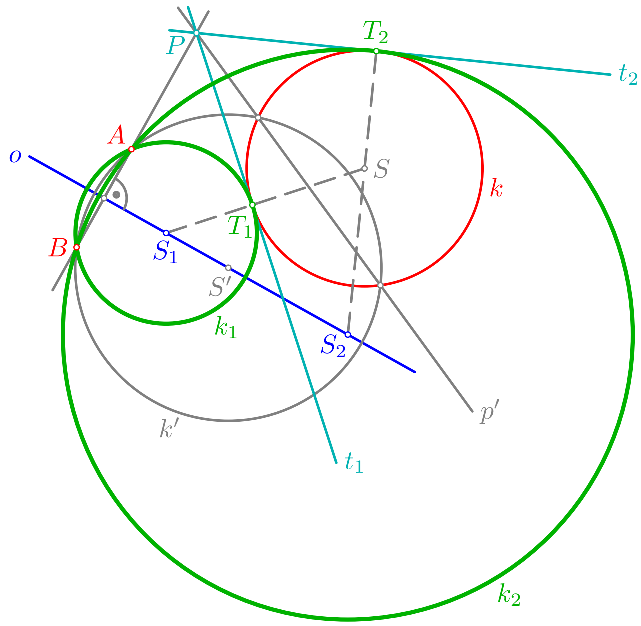
- bodem P veďme tečny t_1, t_2 ke kružnici k a doplňme příslušné body T_1, T_2 dotyku



- střed S_1 hledané kružnice $k_1(S_1, r_1)$ pak leží na ose o a na přímce ST_1 (kružnice k a k_1 mají vnější dotyk)



- podobně protíná přímka ST_2 osu o v bodě S_2, který je středem druhé hledané kružnice $k_2(S_2, r_2)$, jež také prochází danými body A, B a dotýká se dané kružnice k (kružnice k a k_2 mají vnitřní dotyk)



□

Diskuze:
Úloha nemá žádné řešení, jestliže jeden z bodů A, B leží ve vnitřní a druhý ve vnější oblasti kružnice k nebo jestliže oba body A, B leží na kružnici k; leží-li oba body A, B ve vnitřní nebo ve vnější oblasti kružnice k, pak má úloha právě dvě řešení; jestliže právě jeden z bodů A, B leží na kružnici k, jedná se o Pappovu úlohu BBk, která se řeší pomocí množin všech bodů dané vlastnosti a má právě jedno řešení.