Mocnost bodu ke kružnici

Výklad

Definice a základní vlastnosti

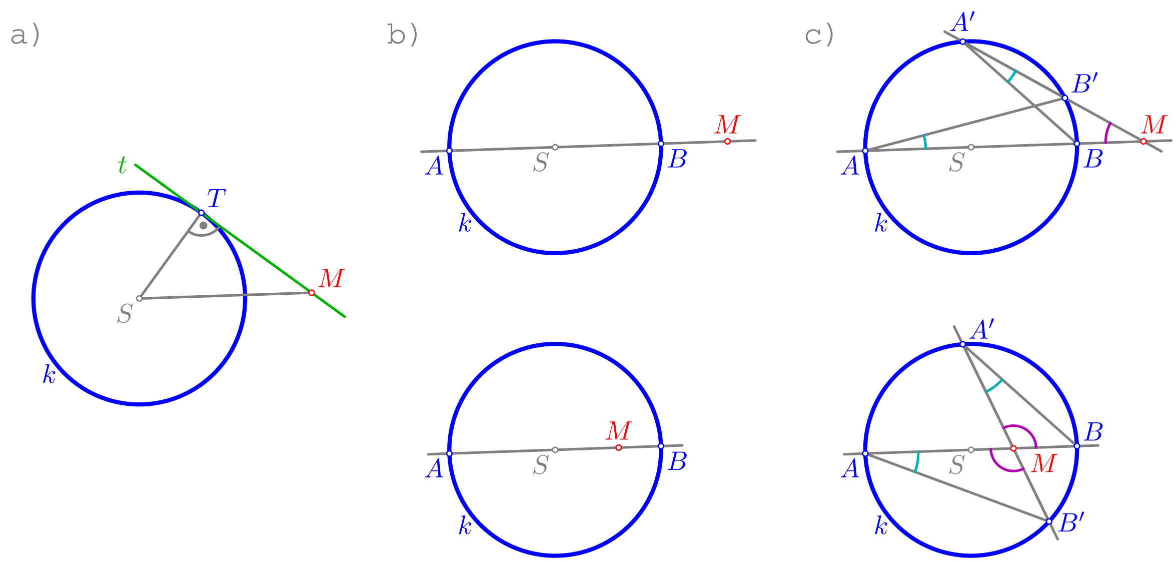
- nechť je v rovině dána kružnice $k(S, r)$ a bod M; **mocností bodu M ke kružnici k** nazýváme reálné číslo $m = v^2 - r^2$, kde $v = |MS|$

- $m > 0$ resp. $m = 0$ resp. $m < 0$, právě když bod M leží ve vnější oblasti kružnice k resp. bod M leží na kružnici k resp. bod M leží ve vnitřní oblasti kružnice k

- leží-li bod M ve vnější oblasti kružnice k a T je bodem dotyku tečny t vedené z bodu M ke kružnici k, pak platí $|MT|^2 = v^2 - r^2 = m$ (plyne z Pythagorovy věty, viz obr. a)

- pro průsečíky A, B kružnice k a její libovolné sečny vedené bodem M platí $|MA| \cdot |MB| = m$ resp. $|MA| \cdot |MB| = -m$, je-li bod M ve vnější resp. ve vnitřní oblasti kružnice k

  1. pro sečnu jdoucí středem S kružnice k je tvrzení zřejmé (viz obr. b): $|MA| \cdot |MB| = (v+r) \cdot (v-r) = v^2 - r^2 = m$ nebo $|MA| \cdot |MB| = (r+v) \cdot (r-v) = r^2 - v^2 = -m$
  2. jestliže jiná sečna vedená bodem M protíná kružnici k v bodech A', B' (viz obr. c), pak jsou trojúhelníky $A'BM$ a $AB'M$ podobné (podle věty uu), a tudíž platí: $\frac{|MA'|}{|MA|} = \frac{|MB|}{|MB'|}$ a odtud $|MA'| \cdot |MB'| = |MA| \cdot |MB|$



Chordála a potenční střed

- dá se ukázat, že množinou všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma různým nesoustředným kružnicím $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$ je přímka p kolmá ke středné $s = S_1S_2$ daných kružnic; tato přímka se nazývá **chordála** kružnic k_1, k_2

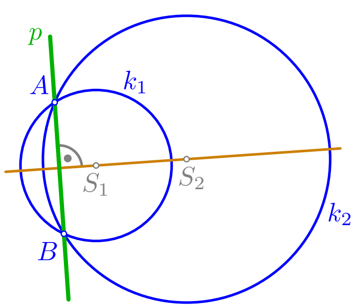
- konstrukci chordály ukazují následující obrázky

  a) kružnice k_1, k_2 se protínají v bodech A, B, jež mají stejnou mocnost $m = 0$ k oběma kružnicím; je tudíž chordála $p = AB$

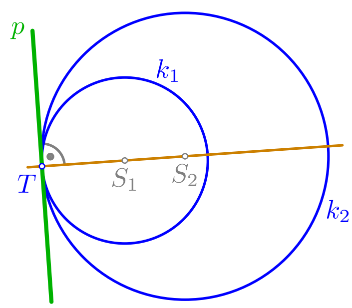
  b) kružnice k_1, k_2 se dotýkají v bodě T, který má k oběma stejnou mocnost $m = 0$; chordálou je tedy společná tečna p v bodě T

  c) kružnice k_1, k_2 nemají žádný společný bod; zvolme pomocnou kružnici $k'(S', r')$, která protíná obě kružnice k_1, k_2, a sestrojme chordálu p_1 kružnic k', k_1 a chordálu p_2 kružnic k', k_2; průsečík $P = p_1 \cap p_2$ má pak stejnou mocnost ke všem třem kružnicím k', k_1, k_2, je to jejich tzv. **potenční střed**; bodem P pak prochází také chordála $p \perp S_1S_2$ kružnic k_1, k_2

a)



b)



c)