VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Fakulta hornicko - geologická

Kótované promítání

Čestmír Restl

Ostrava

Obsah

Úvod

Tento učební text „Kótované promítání“ je druhým dílem celku „Základy deskriptivní geometrie a konstruktivní geometrie“ a je určen posluchačům hornicko-geologické a stavební fakulty, případně všem ostatním zájemcům. Látka je zpracována v rozsahu současných učebních osnov předmětu deskriptivní geometrie.

K procvičení studované proglematiky lze použít následující skripta : „ Cvičení z deskriptivní geometrie“ od E. Plockové, které obsahuje předrýsovaná zadání příkladů k procvičení zejména základních úloh a „Sbírku řešených příkladů z deskriptivní geometrie“ od J. Cholevové, B. Lubojackého a Č. Restla, která je v závěru doplněna o úlohy na topologických plochách.

Závěrem chci poděkovat RNDr. Bedřich Lubojackému za náměty a připomínky, které přispěly ke zkvalitnění textu.

Autor

I. KÓTOVANÉ PROMÍTÁNÍ

Každá promítací metoda má z pohledu praxe určité výhody i nevýhody podle toho, co při jejím užití vyžadujeme. Protože u kótovaného promítání jde o zobrazení prostoru na jednu rovinu, má toto promítání své uplatnění především ve stavebním inženýrství, v horním inženýrství, a v geologicko-průzkumné praxi při řešení praktických úloh na topografických plochách.

1. Zobrazení základních geometrických útvarů

1.1 Princip zobrazení bodu

Kótované promítání je rovnoběžné pravoúhlé promítání na jednu rovinu, kterou nazýváme ***průmětnou,*** a označíme ji π. Bod A prostoru zobrazíme tak, že tímto bodem proložíme přímku kolmou k průmětně, kterou nazveme ***promítací přímkou***, a její průsečík A_1 s průmětnou π je průmětem bodu A.

Obrazem A_1 není ovšem jeho vzor A v prostoru jednoznačně určen. Abychom dosáhli jednoznačnosti také v opačném směru, užijeme tzv. ***kóty*** takto: Průmětna π dělí prostor na dva poloprostory. Jeden označíme za kladný a druhý za záporný. Vzdálenost A_1A bodu A od průmětny π bude mít kladné (záporné) znaménko, jestliže bod A bude ležet v kladném (záporném) poloprostoru; leží-li bod A v průmětně, jeho vzdálenost je 0; (obr. 1).

Vzdálenost A_1A se znaménkem označíme z_A. Je tedy z_A orientovaná vzdálenost $\overrightarrow{A_1A}$ bodu A od průmětny π.

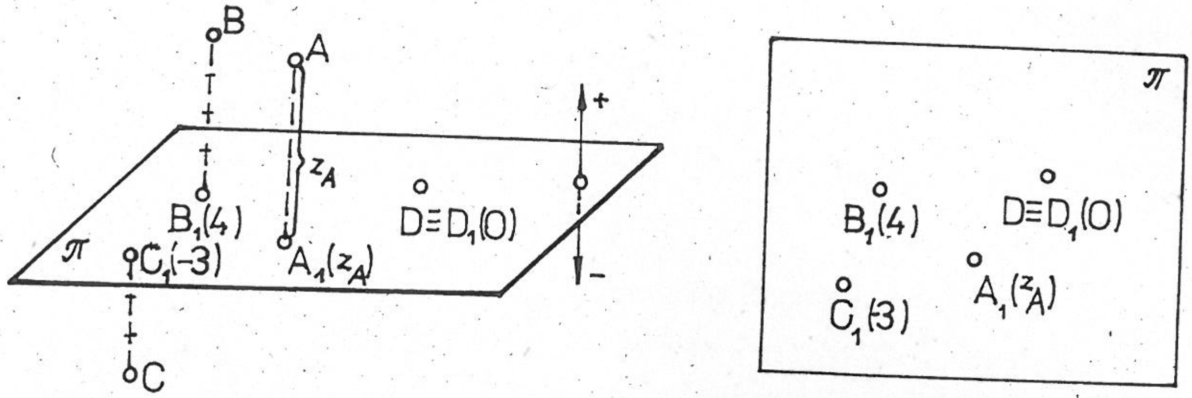
Orientovaná vzdálenost $\overrightarrow{A_1A} = z_A$ se nazývá ***kóta*** bodu A. Kótu z_A připisujeme k průmětu A_1 do závorky; píšeme $A_1(z_A)$.

Pravoúhlý průmět bodu A s kótou nazýváme ***kótovaný průmět*** bodu A.

Z kótovaného průmětu $A_1(z_A)$ můžeme jednoznačně určit jeho vzor A v prostoru. V bodě A_1 sestrojíme kolmici, na ni naneseme orientovanou vzdálenost z_A a tím dostáváme vzor A obrazu $A_1(z_A)$.

Kótované promítání je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů prostoru do kótovaných průmětů v průmětně.

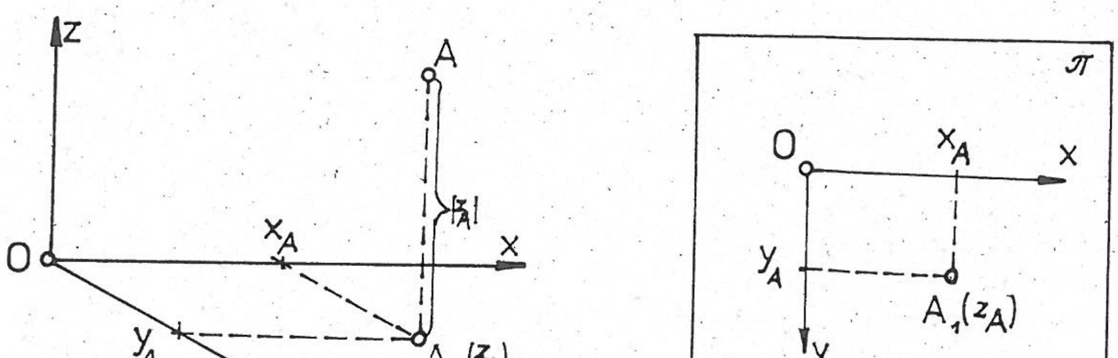
Na obr. 1 jsou znázorněny v kótovaném promítání body $A_1(z_A)$, $B_1(4)$, $C_1(-3)$, $D_1(0)$.



Obr. 1

V pravoúhlém souřadnicovém systému $\{0;x,y,z\}$ volíme souřadnicovou rovinu (xy) za průmětnu π kótovaného promítání a kladný poloprostor bude obsahovat kladnou část osy z.

Kótovaný obraz $A_1(z_A)$ bodu $A\ [x_A,\ y_A,\ z_A]$ sestrojíme tak, že v souřadnicovém systému $\{0;\ x,\ y\}$ v průmětně π sestrojíme bod A_1 o souřadnicích x_A ,y_A a jako kótu připíšeme jeho zetovou souřadnici z_A (obr. 2). Pro vynášení souřadnic budeme užívat levotočivý souřadnicový systém.

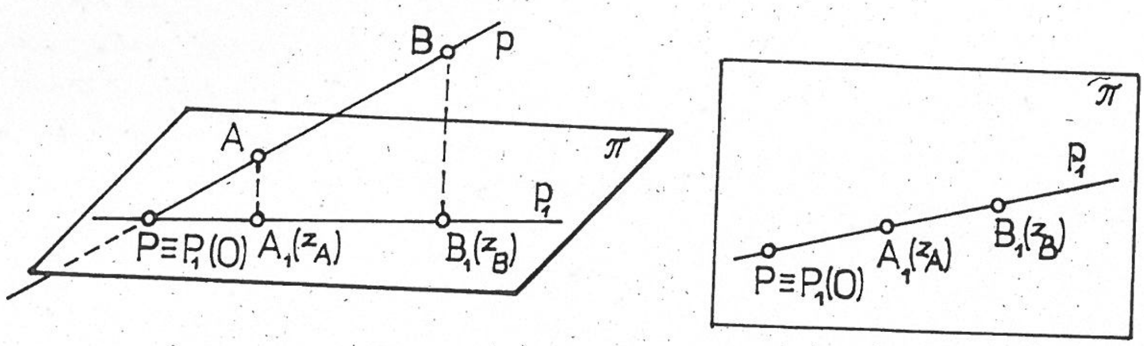


Obr. 2

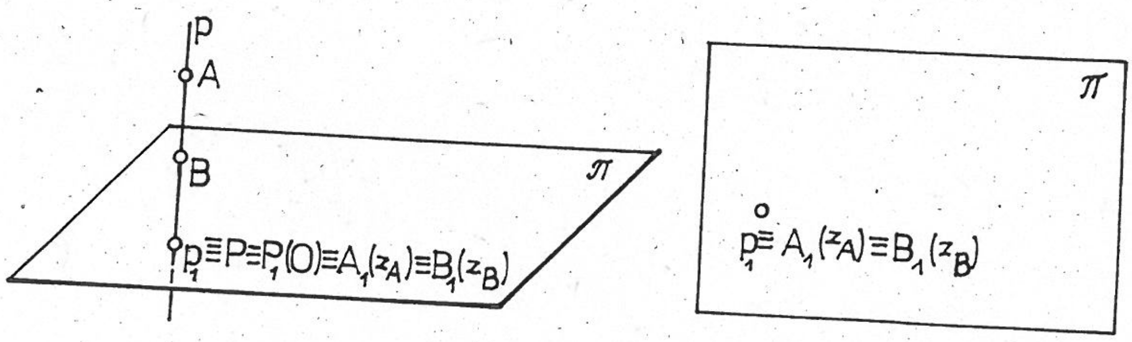
1.2 Zobrazení přímky

Při zobrazení přímky v kótovaném promítání stačí znát kótované průměty dvou různých bodů přímky.

Ze známých kótovaných průmětů $A_1(z_A)$, $B_1(z_B)$ dvou různých bodů A, B dané přímky p můžeme sestrojit její průmět p_1. Buď je $p_1 \equiv A_1B_1$ [jsou-li A_1, B_1 různé; (obr. 3)], nebo $p_1 \equiv A_1 \equiv B_1$ [jsou-li A_1, B_1 totožné; přímka p je kolmá k průmětné a nazývá se ***promítací přímka;*** (obr. 4)].

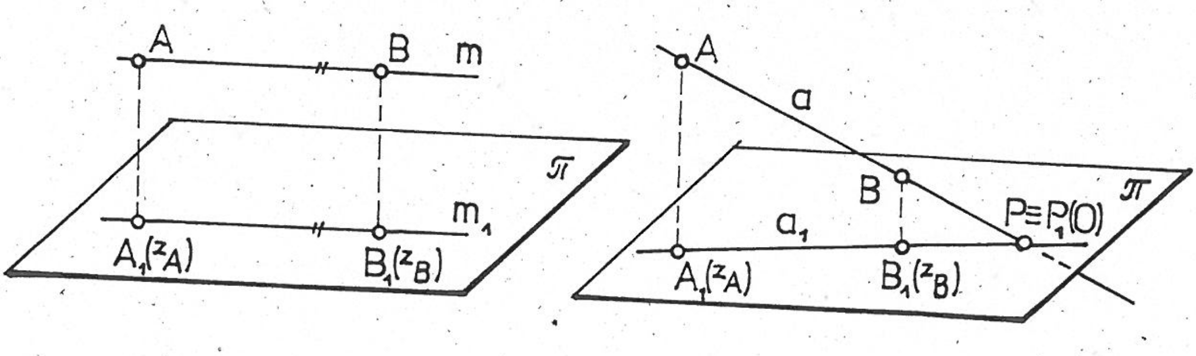


Obr. 3



Obr. 4

Přímka, která je rovnoběžná s průmětnou, se nazývá ***hlavní přímka*** (obr. 5a). Přímka, která není hlavní, protíná průmětnu v bodě, který nazýváme ***stropník přímky*** (obr. 5b).



a) b)

Obr. 5

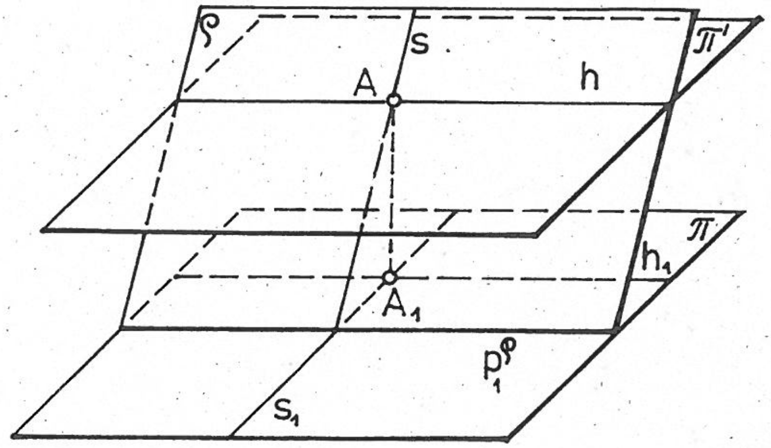
1.3 Zobrazení roviny

K určení roviny v kótovaném promítání stačí znát kótované průměty tří jejích různých bodů, které neleží na přímce.

Rovina je ***promítací*** právě tehdy, když kótované průměty bodů roviny leží v přímce (tzn. je kolmá k průmětně).

Rovina, která je rovnoběžná s průmětnou, se nazývá ***hlavní rovina***; v aplikacích ***vrstevní rovina.*** Přímky roviny, které jsou rovnoběžné s průmětnou, se nazývají ***hlavní přímky***. Hlavní přímky roviny i jejich průměty jsou navzájem rovnoběžné přímky. Hlavní přímka roviny, která leží v průmětně, se nazývá ***stopa roviny***. Je to průsečnice roviny s průmětnou; značí se p^{ρ}.

Přímky roviny, které jsou kolmé k hlavním přímkám této roviny, nazýváme ***spádové přímky*** roviny; označujeme s^{ρ} [(obr. 6); π' - hlavní rovina, h - hlavní přímka, s - spádová přímka, p - stopa roviny ρ].



Obr. 6

Pravoúhlé průměty hlavních a spádových přímek roviny jsou vzájemně kolmé.

Tvrzení plyne z ***věty o pravoúhlém průmětu kolmých přímek.*** *Dvě vzájemně kolmé přímky, z nichž žádná není promítací, promítají se v pravoúhlém promítání jako vzájemně kolmé přímky právě tehdy, když alespoň jedna je rovnoběžná s průmětnou.*

2. Otáčení roviny

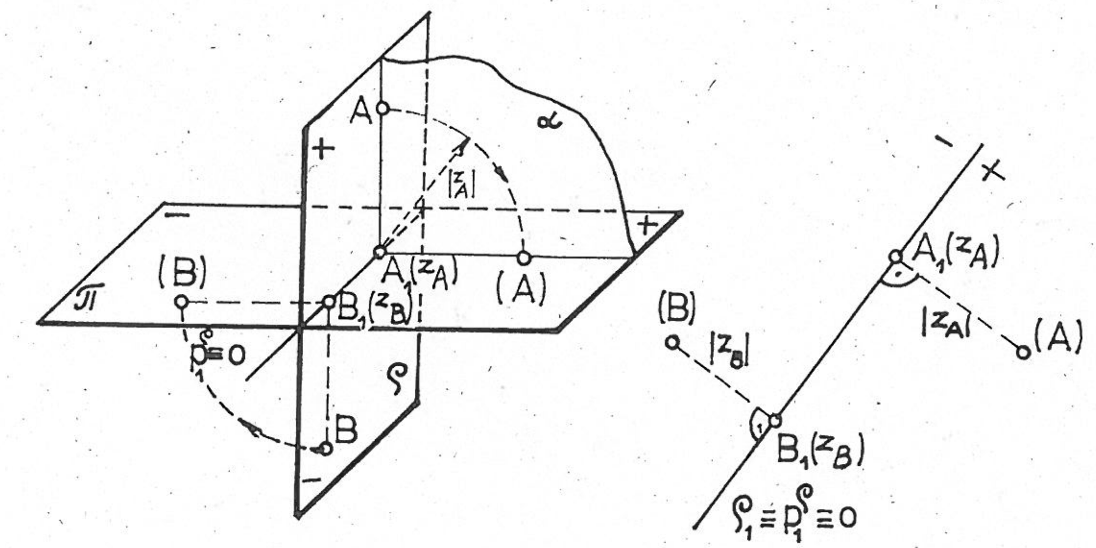
Útvary roviny se nám zobrazí ve skutečné velikosti, jestliže je tato rovina průmětnou, nebo je s průmětnou rovnoběžná.

Není-li daná rovina hlavní, její útvary se zobrazí zkreslené. Abychom mohli v takové rovině řešit úlohy, musíme ji otočit buď do průmětny, nebo do polohy rovnoběžné s průmětnou, tj. do některé hlavní roviny. Otočené polohy geometrických útvarů znázorňujeme čerchovaně.

Nejprve se budeme zabývat otáčením ***promítací roviny*** do průmětny, které nazýváme ***sklápění roviny do průmětny*** (jde o otáčení roviny o 90°).

Osou otáčení je průsečnice dané roviny s průmětnou. Dále stačí kolem osy otáčení sklopit libovolný bod dané roviny, který neleží na ose otáčení; určíme jeho rovinu otáčení, střed otáčení a poloměr otáčení.

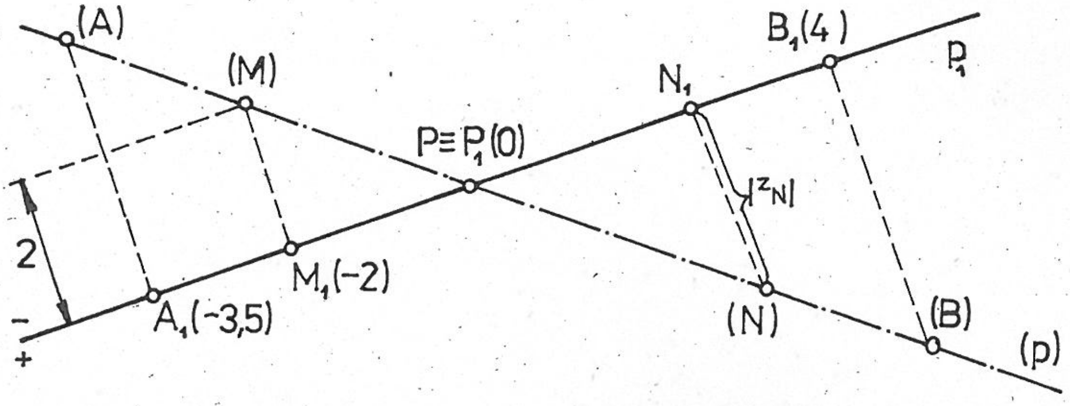
Rovina otáčení α bodu A je kolmá k ose otáčení $o \equiv p^{\rho} \equiv \rho \cap \pi$. Střed otáčení je bod A_1. Poloměr otáčení $r = |z_A|$, (A), (B) - sklopené polohy bodů A, B; (obr. 7).



Obr. 7

Úloha 1. Na dané přímce p určené kótovanými průměty dvou bodů $A_1(z_A)$, $B_1(z_B)$ určete stropník P, bod M o dané kótě a kótu z_N bodu N, znáte-li jeho průmět $N_1 \in p_1$.

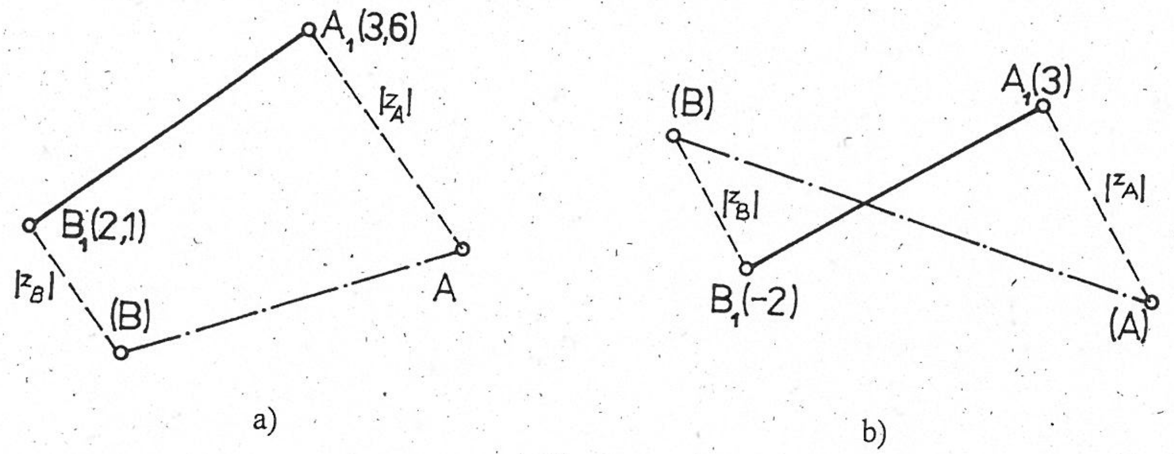
Řešení. Sklopením promítací roviny přímky p se nám vzdálenosti bodů od průmětny zobrazí ve skutečné velikosti; (obr. 8).



Obr. 8

Úloha 2. Určete skutečnou velikost úsečky AB, znáte-li kótované průměty $A_1(z_A)$, $B_1(z_B)$ krajních bodů.

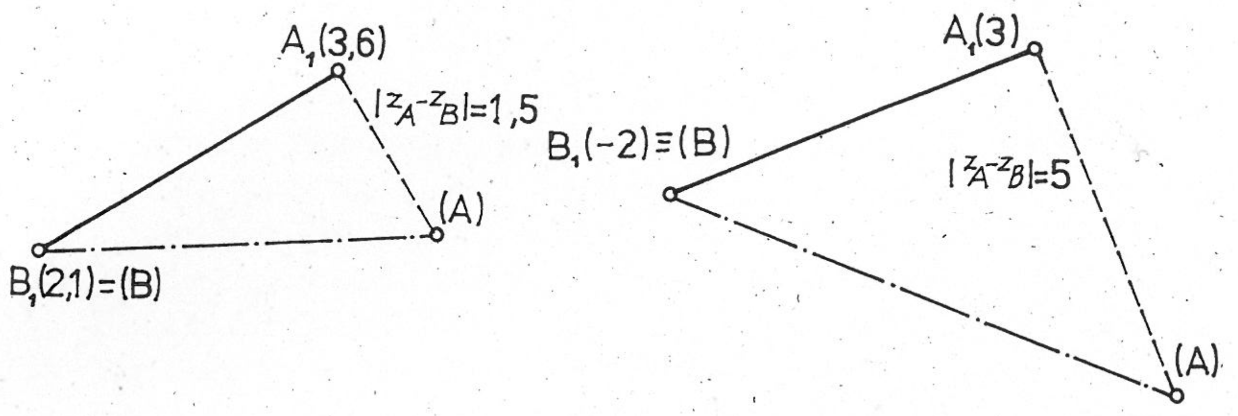
Řešení (obr. 9). Promítací rovinu úsečky AB sklopíme do průmětny. Jsou-li (A), (B) sklopené polohy bodů A, B, pak skutečná velikost je $AB = (A)\,(B)$.



Obr. 9

V případě, že promítací rovinu úsečky sklopíme do hlavní roviny procházející jedním z krajních bodů úsečky AB, pak se *skutečná velikost úsečky rovná velikosti přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož jednou odvěsnou je pravoúhlý průmět dané úsečky a druhá odvěsna má velikost rovnou absolutní hodnotě rozdílů kót krajních bodů dané úsečky; (obr. 10).*

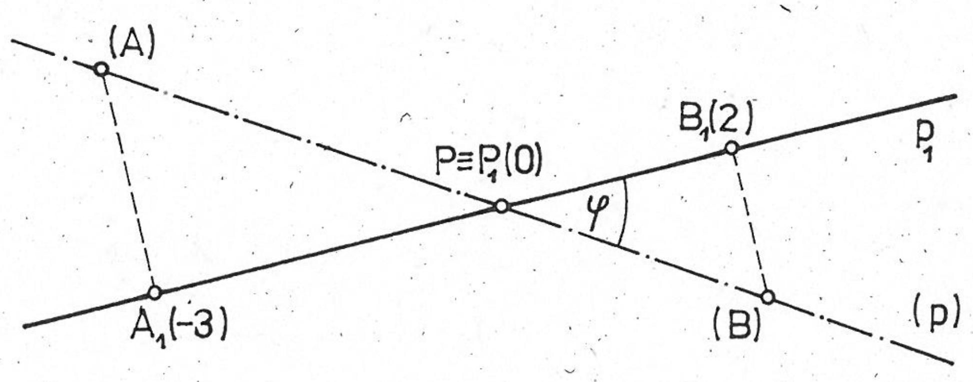
Říkáme, že jsme skutečnou velikost určili sklopením ***rozdílového trojúhelníka***.



Obr. 10

Úloha 3. Určete odchylku φ přímky p od průmětny, znáte-li kótavané průměty $A_1(z_A)$, $B_1(z_B)$ dvou jejich bodů A, B;

Řešení (obr. 11). Promítací rovinu přímky p sklopíme do průmětny. Sklopená poloha $(p) \equiv (A)\,(B)$. Odchylka φ je úhel přímek p_1, (p).



Obr. 11

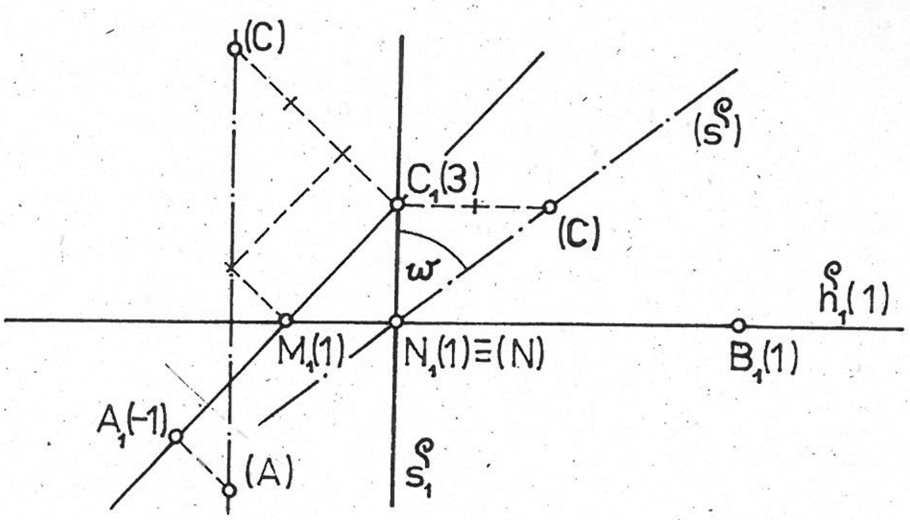
Poznámka. S pojmem odchylky φ přímky od průmětny je spjat pojem spádu přímky vzhledem k průmětně. ***Spád s přímky***, která není promítací ani hlavní, je tangenta její odchylky od průmětny; $s = tg\,\varphi$.

Při aplikacích v kótovaném promítání využíváme (jednotkového) intervalu přímky. ***Interval i přímky***, která není hlavní ani promítací, je vzdálenost průmětů takových bodů, jejichž kóty se liší o jednotku délky. Platí: Interval i přímky se rovná převrácené hodnotě spádu přímky; $i = 1/s$.

Úloha 4. Určete odchylku ω roviny $\rho \equiv (ABC)$ od průmětny, znáte-li kótované průměty bodů $A_1(z_A)$, $B_1(z_B)$, $C_1(z_C)$.

Řešení (obr. 12). *Odchylka roviny,* která není hlavní ani promítací, *od průmětny se rovná odchylce její spádové přímky od průmětny.*

V rovině ρ zvolíme hlavní přímku, např. bodem $B(1)$. K jejímu sestrojení stačí určit další bod roviny o téže kótě; k tomu užijeme přímku AC, na které určíme bod $M(1)$, pak $h_1^\rho \equiv B_1M_1$. Bodem roviny, který neleží na hlavní přímce, např. C sestrojíme spádovou přímku s^ρ. Její průmět s_1 prochází bodem C_1 a je kolmý na h_1^ρ. Spádová přímka je určena bodem C a průsečíkem $N \equiv s^\rho \cap h^\rho$, jehož kóta je 1. Odchylku ω spádové přímky $s^\rho \equiv CN$ určíme sklopením rozdílového trojúhelníka např. do hlavní roviny o kótě 1; $C_1(C) = |z_C - z_N| = 2$.

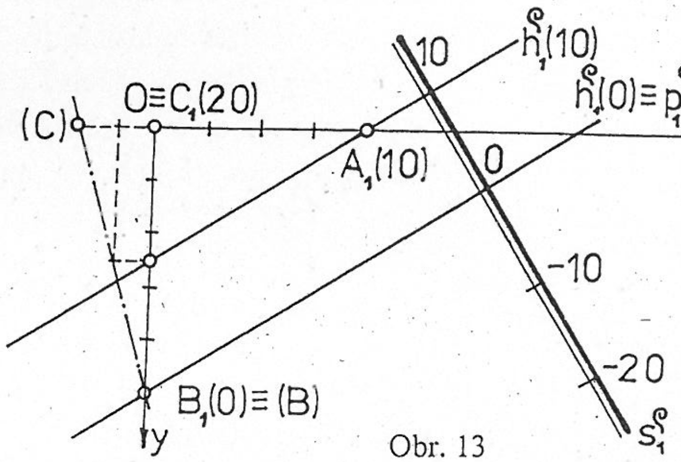


Obr. 12

Poznámka. Tangenta odchylky roviny, která není hlavní ani promítací, od průmětny se nazývá ***spád roviny*** (vzhledem k průmětně), spád roviny se rovná spádu její spádové přímky. Vystupňovanou spádovou přímku nazýváme ***spádovým měřítkem roviny.*** Graficky toto spádové měřítko zdůrazňujeme, vedením v malé vzdálenosti, silnější rovnoběžkou.

Úloha 5. Určete spádové měřítko roviny $\rho \equiv (ABC)$. [$A(40; 0; 10)$, $B(0; 50; 0)$, $C(0; 0; 20)$] , řešte ve vhodném měřítku.

Řešení (obr. 13). Ať vyjdeme z jakéhokoliv zadání, můžeme v dané rovině vyhledat libovolné různoběžky a na nich určit body o celočíselných kótách. Pak spojnice bodů o stejných kótách jsou hlavní přímky roviny. Vybereme-li libovolnou spádovou přímku a vyznačíme na ní body s celočíselnými kótami, dostáváme spádové měřítko, kterým je rovina jednoznačně určena.

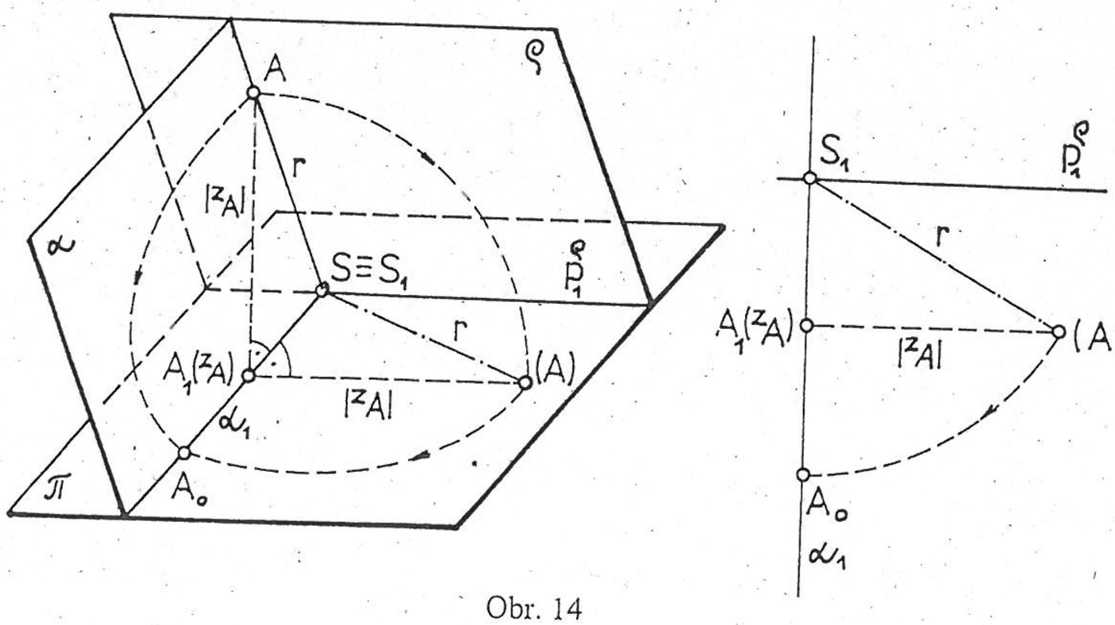


Obr. 13

Poznámka. Spádové měřítko roviny umísťujeme na okraj pracovní plochy pro lepší orientaci při řešení úloh.

Otočit rovinu, která není hlavní ani promítací, znamená najít osu otáčení a otočit její libovolný bod, který neleží na ose otáčení.

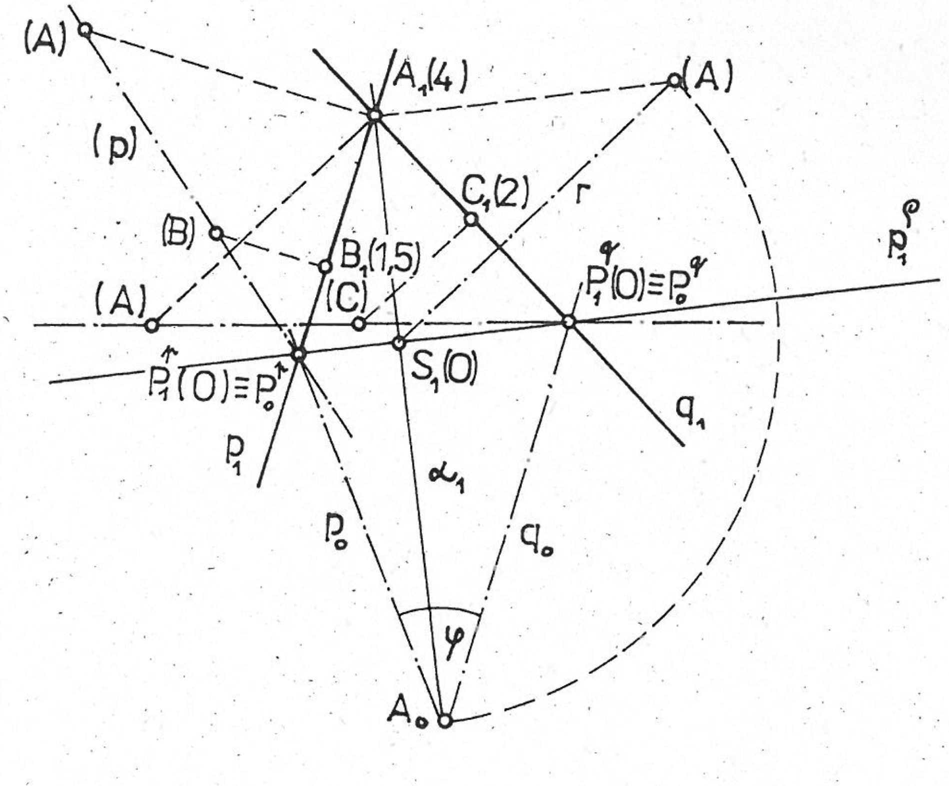
Osa otáčení je průsečnice dané roviny ρ s průmětnou π, tj. její stopa $p^\rho \equiv \rho \cap \pi$. Zvolíme libovolný bod A roviny ρ, který neleží na ose otáčení ($A_1 \notin p_1^\rho$). Bod A otočíme, jestliže určíme jeho ***rovinu otáčení*** α, $A \in \alpha \perp p^\rho$; ***střed otáčení*** S, $S \equiv \alpha \cap p^\rho$; ***poloměr otáčení*** r, $r = AS$; (obr. 14).



Obr. 14

Úloha 6. Sestrojte skutečnou velikost úhlu, který svírají různoběžky $p \equiv AB$, $q \equiv AC$, znáte-li kótované průměty určujících bodů.

Řešení. Rovinu různoběžek $\rho \equiv (pq)$ otočíme do průmětny. Osou otáčení je stopa p^ρ roviny ρ, která je určena stopníky přímek p, q, které určíme např. sklopením promítací roviny přímky p a q. Rovina α otáčení bodu A se zobrazí jako přímka α_1 procházející bodem A_1 kolmo k p_1^ρ. Průmět středu otáčení bodu A je $S_1 = \alpha_1 \cap p_1^\rho$. Poloměr otáčení bodu A je $r = S_1(A)$, kde (A) je sklopená poloha bodu A při sklápění roviny otáčení α bodu A; $A_1(A) = | z_A |$. Otočená poloha bodu A je A_0; $A_0 \in \alpha_1$, $S_1A_0 = S_1(A) = r$, (obr. 15).



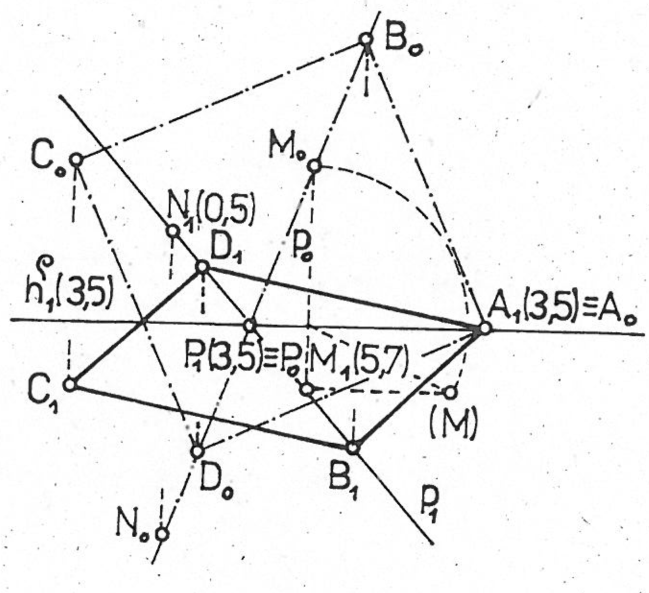
Obr. 15

Poznámka. Při otáčení roviny ρ např. do hlavní roviny o kótě -1, bude osou otáčení hlavní přímka roviny ρ o kótě -1, střed otáčení S bude mít rovněž kótu -1 a pro sklopený bod (A) roviny α bude platit : $A_1(A) = |z_A - z_S| = |4 + 1| = 5$. Poloměr otáčení $r = S_1(A) = S_1A_0$.

Při otáčení roviny, jejíž odchylka od průmětny se rovná ostrému úhlu ω platí věta. *Pravoúhlý průmět bodu roviny a pravoúhlý průmět jeho otočené polohy do hlavní roviny si odpovídají v pravoúhlé afinitě, jejíž osou je průmět osy otáčení.*

Úloha 7. Zobrazte čtverec, znáte-li jeho vrchol A a přímku $p \equiv MN$, na níž leží jeho úhlopříčka.

Řešení (obr. 16). Čtverec leží v rovině $\rho \equiv (Ap)$; otočíme ji např. kolem hlavní přímky h^ρ do hlavní roviny. Stačí otočit bod M do polohy M_0; $p_0 \equiv M_0P_0$. V otočení sestrojíme čtverec $A_0B_0C_0D_0$, který má vrchol A_0 a úhlopříčku p_0. Užitím pravoúhlé afinity o ose h_1^ρ a páru odpovídajících si bodů M_0, M_1 sestrojíme k čtverci afinní rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$, který je průmětem hledaného čtverce.

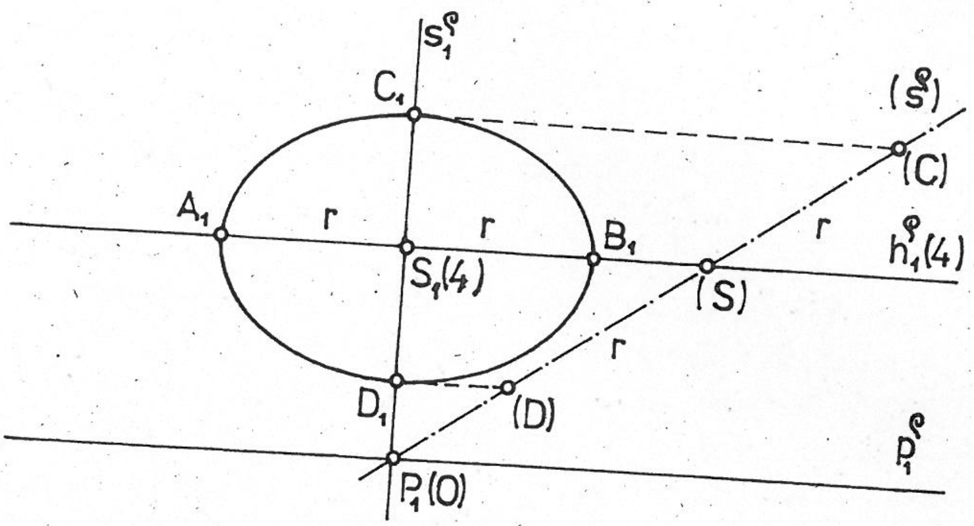


Obr. 16

Úloha 8. Zobrazte kružnici, je-li dána její rovina $\rho \equiv (p^\rho S)$, střed S a poloměr r.

Řešení (obr. 17).
Pravoúhlým průmětem kružnice, jejíž rovina svírá s průmětnou ostrý úhel ω, je elipsa.

Její střed je průmětem středu kružnice. Hlavní osa leží na průmětu hlavní přímky roviny dané kružnice procházející středem; velikost hlavní poloosy je r. Vedlejší osa leží na průmětu spádové přímky dané roviny procházející středem. Její velikost určíme ze sklopené polohy (C), (D) bodů C, D kružnice, které se promítají do vedlejších vrcholů C_1, D_1 průmětu.



Obr. 17

3. Úlohy polohy

Úlohy polohy se týkají vzájemné polohy dvou základních geometrických elementů, tj. bodů, přímek a rovin.

3.1 Dva body

Z kótovaných průmětů dvou bodů okamžitě poznáme, zda body splývají, nebo jsou různé.

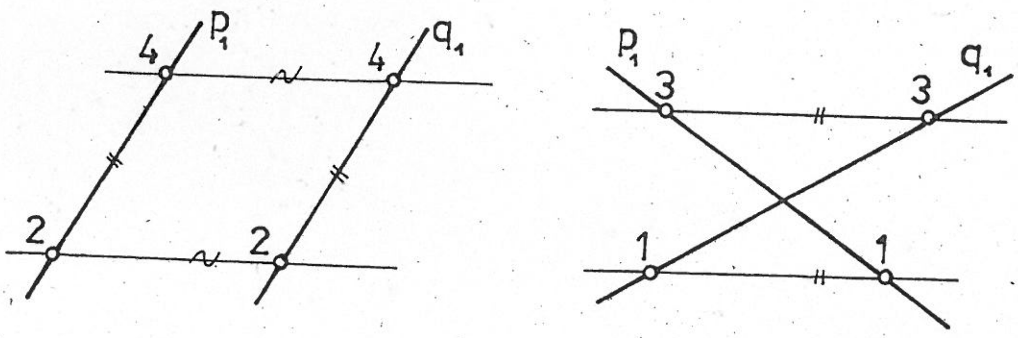
3.2 Bod a přímka

Je-li dán průmět bodu A a přímky p, pak z podmínky $A_1 \notin p_1$ plyne $A \notin p$. Z podmínky $A_1 \in p_1$ vyplývá pouze, že bod A leží v promítací rovině přímky p. Jeho polohu vzhledem k přímce určíme sklopením promítací roviny přímky p, tj. ze vzájemné polohy (A) a (p).

3.3 Dvě přímky

O vzájemné poloze dvou přímek p, q, pro něž platí $p_1 \equiv q_1$, rozhodneme po sklopení jejich společné promítací roviny.

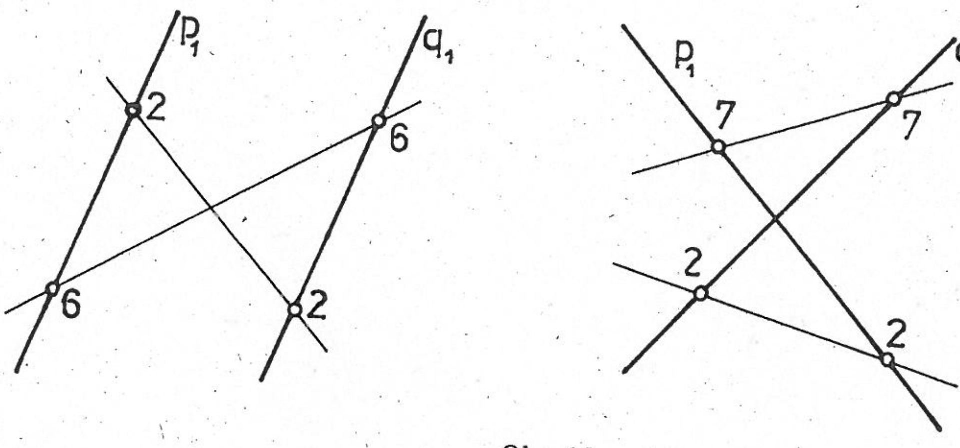
Jestliže $p_1 \equiv q_1$ a spojnice jejich bodů o stejných kótách jsou rovnoběžné, pak přímky p, q leží v jedné rovině. Jsou-li navíc průměty p_1, q_1 těchto přímek rovnoběžné, jsou přímky p, q rovnoběžné (obr. 18a), resp. různoběžné (obr. 18b).



a) b)

Obr. 18

V ostatních případech jsou přímky p, q mimoběžné (obr. 19).



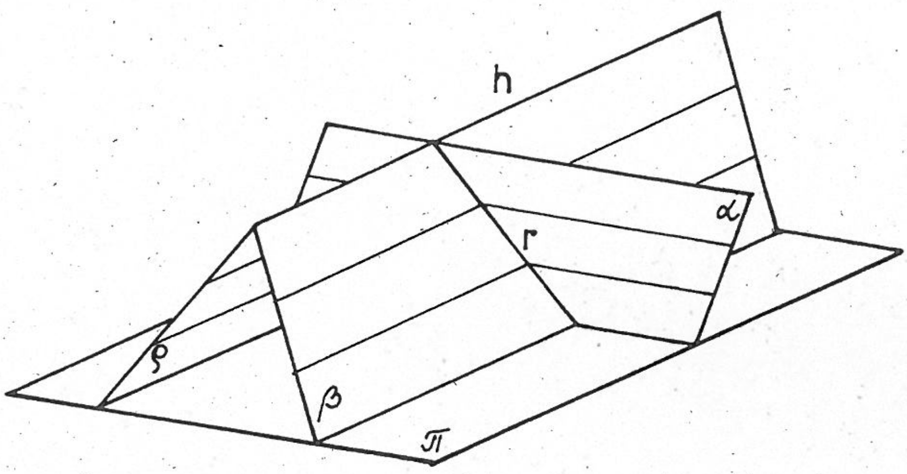
Obr. 19

Podmínky rovnoběžnosti dvou přímek lze vyjádřit užitím intervalů.

Dvě přímky, které nejsou promítací ani hlavní, jsou rovnoběžné právě tehdy, když jejich průměty jsou rovnoběžné, intervaly stejně velké a stupnice téhož smyslu.

3.4 Dvě roviny

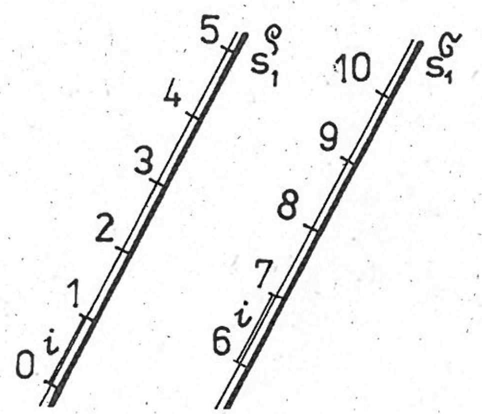
Jsou-li dvě roviny různoběžné, pak jejich průsečnice je různoběžná (roviny α a β) nebo rovnoběžná (roviny β a ρ) s průmětnou π. Průsečíky jejich hlavních přímek o stejných kótách leží na této průsečnici $r = \alpha \cap \beta$ a nebo hlavní přímky obou rovin jsou rovnoběžné a průsečnice $h = \beta \cap \rho$ je hlavní přímkou obou rovin (obr. 20).



Obr. 20

Dvě roviny jsou rovnoběžné právě tehdy, jsou-li obě rovnoběžné s průmětnou, nebo mají rovnoběžná spádová měřítka.

Tím je kritérium rovnoběžnosti dvou rovin převedeno na kritérium rovnoběžnosti dvou přímek (obr. 21).



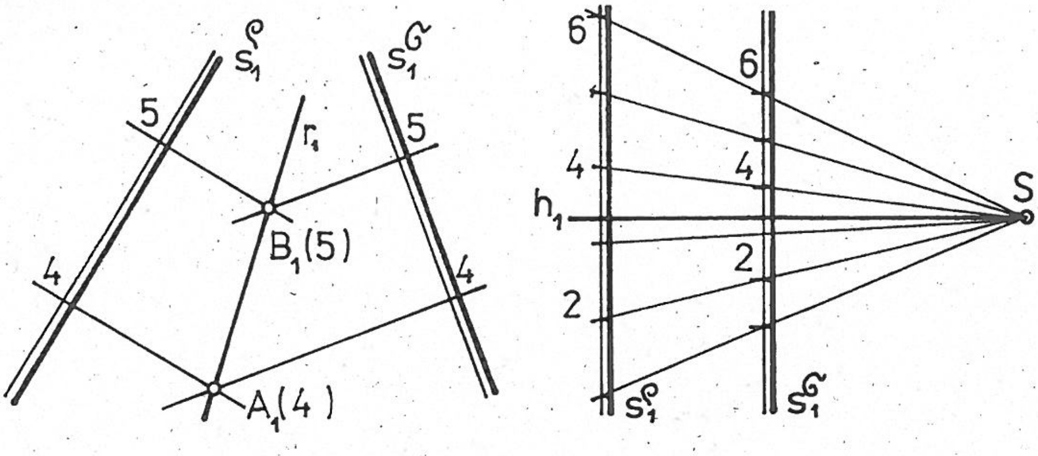
Obr. 21

Úloha 9. Sestrojte průsečnici daných různoběžných rovin ρ, σ, které jsou určené spádovými přímkami s^ρ, s^σ.

Řešení (obr. 22). Podle předpokladu není $s^\rho \,||\, s^\sigma$. Mohou nastat dva případy: průměty s_1^ρ, s_1^σ spádových přímek jsou buď a) různoběžné, nebo b) rovnoběžné.

a) V případě různoběžných průmětů (obr. 22a) hlavní přímky obou rovin v téže hlavní rovině se protínají v bodě průsečnice r. Stačí sestrojit dva různé body A, B průsečnice; $r_1 \equiv A_1B_1$.

b) V případě rovnoběžných průmětů (obr. 22b) užijeme planimetrické konstrukce. Spojnice průmětů bodů o týchž kótách na přímkách s_1^ρ a s_1^σ procházejí jediným bodem S. Průsečnice h je společná hlavní přímka rovin ρ a σ, a proto kolmice z S na s_1^ρ je průmět h_1 hledané průsečnice.



a) b)

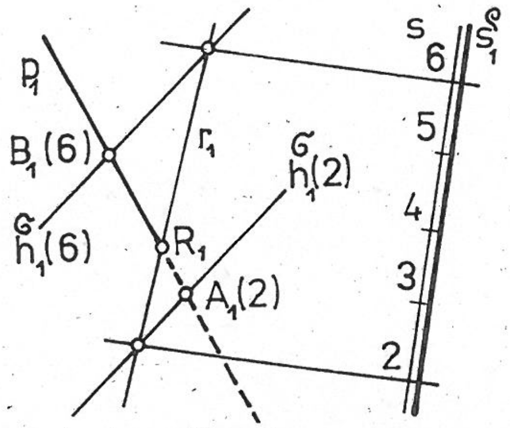
Obr. 22

Poznámka. Konstrukce je důsledkem vět o úměrnosti úseček. Na přímkách s_1^ρ, s_1^σ, které jsou rovnoběžné, jsou úsečky omezené body o týchž kótách úměrné, a tedy spojnice jejich krajních bodů procházejí pevným bodem S.

V případě, že $s_1^\rho \equiv s_1^\sigma$, sklopíme společnou promítací rovinu obou spádových přímek do průmětny; průsečík R $((R) = (s^\rho) \cap (s^\sigma))$ je bodem průsečnice $h = \rho \cap \sigma$, která je společnou hlavní přímkou obou rovin.

3.5 Přímka a rovina

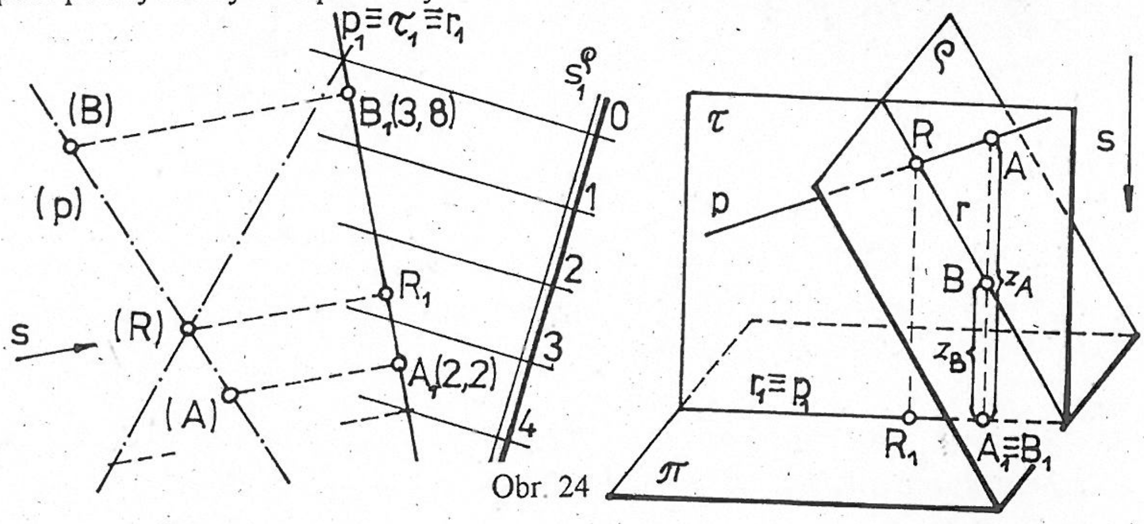
Nechť je dána přímka p a rovina ρ. Přímkou p proložíme libovolnou rovinu σ, a to tak, že zvolíme směr jejich hlavních přímek. Určíme průsečnici $r = \rho \cap \sigma$ dané a pomocné roviny. Ze vzájemné polohy p a r, jež leží v téže rovině, rozhodneme o vzájemné poloze dané přímky p a roviny ρ.



Obr. 23

Jestliže bod $R = p \cap r$ je vlastním bodem, je přímka p různoběžná s rovinou ρ a protíná ji v tomto bodě $R = p \cap \rho$, (obr. 23). Jestliže R je nevlastním bodem, pak přímka p je s rovinou ρ rovnoběžná.

Místo libovolné pomocné roviny σ můžeme přímkou p proložit promítací rovinu τ (obr. 24). Průsečnice $r = \rho \cap \tau$ se nazývá ***krycí přímka*** přímky p vzhledem k rovině ρ, neboť jejich průměty se kryjí; $r_1 \equiv p_1$. O vzájemné poloze p a r, a tedy i p a ρ , rozhodneme ze sklopené polohy roviny τ do průmětny π.



Obr. 24

Pro dosažení větší názornosti při zobrazování geometrických útvarů užíváme ***viditelnosti***. Vycházíme přitom ze skutečnosti, že neprůhledné blízké objekty zakrývají vzdálenější. Viditelnost tedy úzce souvisí se vzájemnou polohou dvou geometrických útvarů, ovšem vzhledem k promítání.

Ze dvou různých bodů A, B téže promítací přímky je viditelný bod o větší kótě.

Při rozhodování o vzájemné viditelnosti nepostupujeme bod za bodem. Např. je-li dána rovina ρ a s ní různoběžná přímka p, pak je viditelná ta z polopřímek určených na p průsečíkem $R = p \cap \rho$, která obsahuje viditelný bod; druhá polopřímka je neviditelná.

4. Metrické úlohy

V metrických úlohách pracujeme s pojmy úhel, kolmost a vzdálenost, s kterými jsme se seznámili v planimetrii a stereometrii.

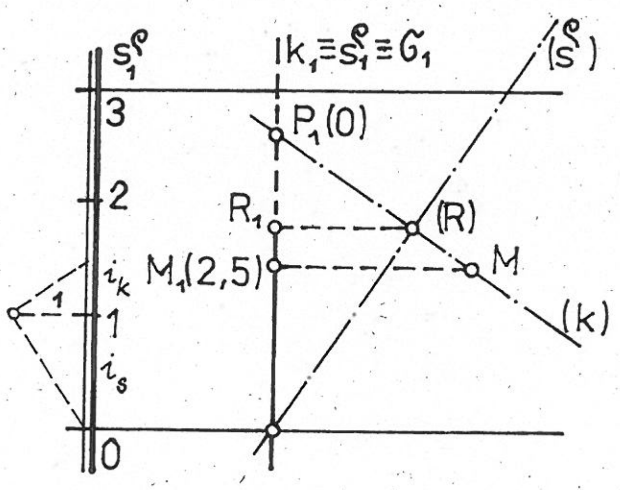
Nyní se budeme zabývat pouze vzájemnou kolmostí přímek a rovin. Vyloučíme přitom promítací a hlavní přímky a roviny, neboť pro ně snadno můžeme kolmé roviny a přímky sestrojit.

4.1 Přímka kolmá k rovině

Pravoúhlý průmět přímky kolmé k rovině je kolmý na průměty jejich hlavních přímek, a tedy je rovnoběžný s pravoúhlými průměty jejich spádových přímek.

Úloha 10. Daným bodem M veďte kolmici k dané rovině ρ určené spádovým měřítkem s^ρ.

Řešení (obr. 25). Průmět k_1 hledané kolmice prochází bodem M_1 a je rovnoběžný s s_1^ρ. Aby přímka k byla určena, musíme určit ještě jeden její bod. Promítací rovina σ kolmice k protíná rovinu ρ ve spádové přímce s^ρ. Ve sklopení bodem (M) vedeme $(k) \perp (s^\rho)$.



Obr. 25

Průsečík $P_1 = (k) \cap k_1$ je druhým určujícím bodem kolmice k, je to její stopník. Současně jsme určili vzdálenost bodu M od roviny ρ; rovná se $(M)(R)$, kde $(R) = (k) \cap (s^\rho)$. Bod R je dalším bodem kolmice k.

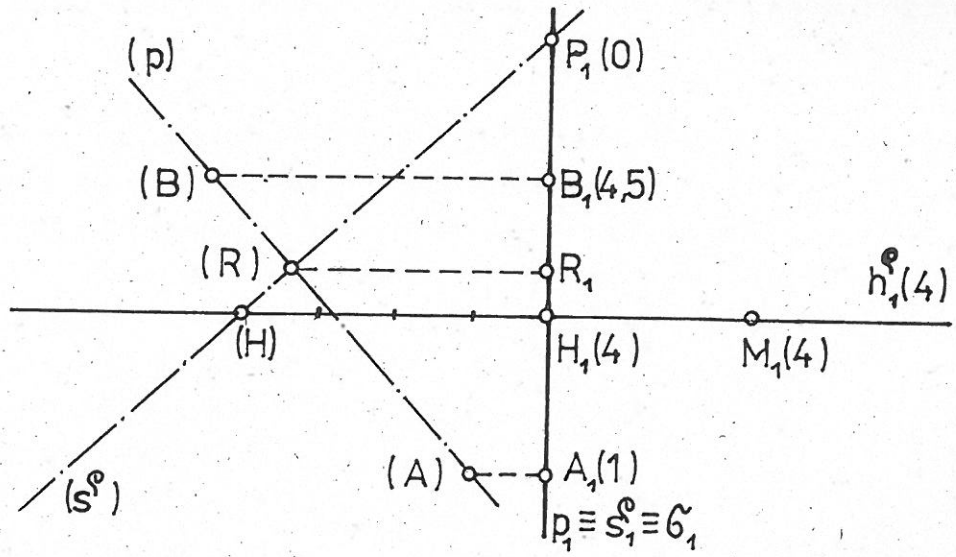
Poznámka. Vzhledem k tomu, že $k \perp \rho$ musí pro intervaly i_k, i_s kolmice k a spádové přímky s^ρ platit $i_k \cdot i_s = 1$. Užitím Eukleidovy věty můžeme tedy ze známého intervalu i_s sestrojit i_k a vystupňovat kolmici k. Stupnice s^ρ a k jsou opačného smyslu.

4.2 Rovina kolmá k přímce

Je-li rovina komá k přímce, pak obráceně je přímka kolmá k rovině. Řešení vyplývá z předešlé úlohy.

Úloha 11. Daným bodem M sestrojte rovinu ρ kolmou k dané přímce $p \equiv AB$.

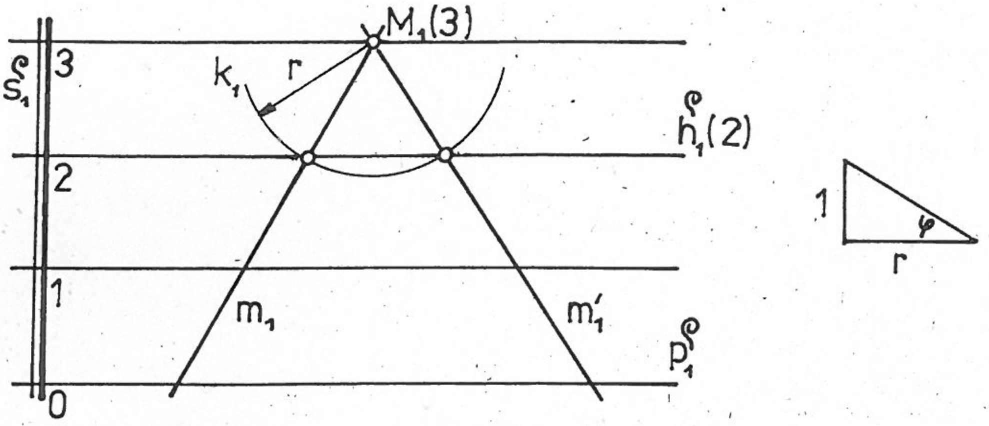
Řešení (obr. 26). Bodem M sestrojíme hlavní přímku roviny ρ ($M_1 \in h_1^\rho \perp p_1$). Promítací rovina σ přímky p protíná hledanou rovinu ρ ve spádové přímce s^ρ a hlavní přímku v bodě $H = \sigma \cap h^\rho$. Ve sklopení bodem (H) vedeme $(s^\rho) \perp (p)$. Bod $P_1 = s_1^\rho \cap (s^\rho)$ je stopníkem přímky s^ρ. Spádová přímka $s^\rho \equiv HP$. Současně jsme určili průsečík R přímky p s rovinou ρ. Velikost úsečky MR je vzdálenost bodu M od přímky p. Ke konstrukci spádového měřítka jsme mohli opět užít relace $i_k \,.\, i_s = 1$, která platí pro intervaly dané přímky p a spádové přímky s^ρ hledané roviny ρ.



Obr. 26

Úloha 12. V rovině $\rho \equiv (Mp^\rho)$ sestrojte jejím bodem M přímku, která má odchylku $\varphi = 30°$ od průmětny π.

Řešení (obr. 27). Všechny přímky procházející bodem M, které mají danou odchylku φ od průmětny, vytvoří rotační kuželovou plochu s řídicí kružnicí v hlavní rovině. Společné přímky dané roviny a rotační kuželové plochy vyhovují podmínkám úlohy. Poloměr řídicí kružnice r v hlavní rovině, která má kótu o 1 menší než je kóta bodu M, je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka, kde druhá odvěsna je 1 a přilehlý úhel je φ. K řešení úlohy proto stačí sestrojit kružnici k_1 o středu M_1 o poloměru r a průmět h_1 hlavní přímky roviny, jejíž kóta se od kóty bodu M liší o 1. Spojnice společných bodů k_1 a h_1 s M_1 jsou průměty hledaných přímek m, m'.

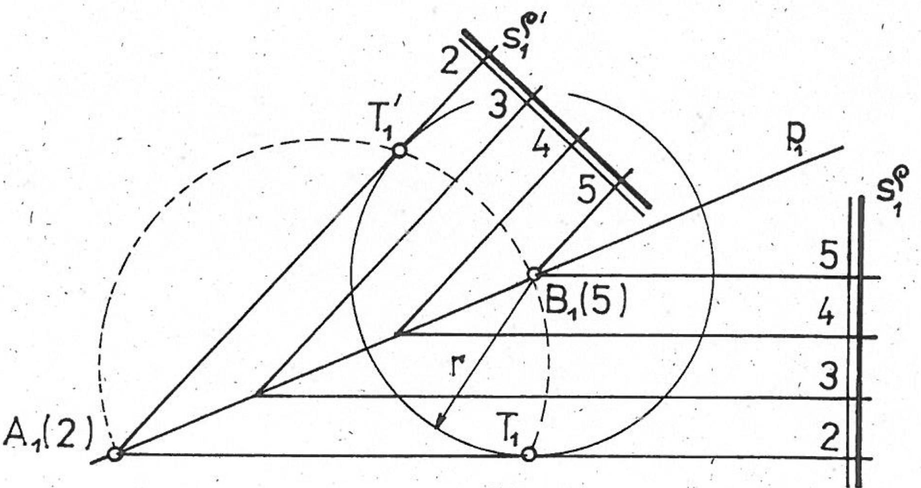


Obr. 27

Úloha 13. Přímkou $p \equiv AB$ proložte rovinu daného spádu $s = tg\ \varphi = 1$.

Řešení (obr. 28). Všechny roviny o odchylce φ, které procházejí např. bodem B, obalí rotační kuželovou plochu, jejíž vrchol je B a odchylka povrchových přímek od průmětny je φ.

Poloměr r její řídicí kružnice k v hlavní rovině o kótě $z_A = 2$ je tedy $r = |z_B - z_A| \, . \, i_s = |z_B - z_A| \, . \, 1/s = 3$. Hledaná rovina má procházet přímkou p; proložíme proto přímkou p tečné roviny rotační kuželové plochy. Tečna z A_1 ke k_1 je průmětem h_1 hlavní přímky hledané roviny v hlavní rovině o kótě $z_A = 2$; TB je její spádová přímka procházející bodem B.



Obr. 28

5. Příklady k procvičení

1. Je dána přímka $p \equiv MN$ [$M(5,2)$, $N(1,3)$, $M_1N_1 = 5$]. a) Určete kótu bodu R přímky p, který leží vně úsečky MN [$M_1R_1 = 1,5$]. b) Určete kótu středu S úsečky MN (početně a konstruktivně). c) Zobrazte stopník přímky p. d) Zobrazte body Q, Q' přímky p, které mají od bodu N vzdálenost 4. e) Vystupňujte přímku p.

2. Najděte skutečnou velikost úsečky a) AB [$A(3{,}5)$, $B(1{,}5)$, $A_1B_1 = 3$], b) CD [$C(-3{,}2)$, $D(2{,}8)$, $C_1 \equiv D_1$], c) EF [$E(3)$, $F(-2{,}5)$, $E_1F_1 = 5$], d) GH [$G(5)$, $H(5)$, $G_1H_1 = 8$], e) XY [$X(-1{,}8)$, $Y(-4{,}6)$, $X_1Y_1 = 4$]. Určete stopníky a odchylky přímek AB, EF, XY. Vystupňujte přímku EF.

3. Zobrazte přímky, které procházejí bodem $V(4{,}5;2;5)$, mají od průmětny odchylku $\alpha = 60^o$ (45^o) a protínají osu $x(y)$.

4. Určete stopu a hlavní přímky roviny $\rho \equiv (ABC)$ [$A(2{,}5;3{,}5;1{,}5)$, $B(7;2{,}5;0{,}8)$, $C(5;6{,}5;4)$]. Sestrojte odchylku roviny ρ od průmětny. V rovině ρ veďte bodem C přímky, které mají odchylky $\beta = 15^o$, 30^o od průmětny. Určete kótu těžiště T trojúhelníka ABC (výpočtem a konstrukcí).

5. Je dána přímka $p \equiv MN$ a bod A [$M(5)$, $N(2)$ $M_1N_1 = 6$; $A(6)$, $A_1N_1 = 1{,}5$, A_1 je bodem úsečky M_1N_1]. Zobrazte čtverec o vrcholu A a úhlopříčce na p.

6. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $p \equiv AB$, $q \equiv CD$ a sestrojte jejich úhel [$A(2;2;0)$, $B(9;5{,}5;4)$, $C(5;6{,}5;5{,}5)$, $D(7;3;1{,}5)$].

7. Určete vzdálenost bodu A od přímky $p \equiv MN$ [$A(2;3{,}5;5)$, $M(7;4;2)$, $N(5;7;4)$].

8. Na přímce $p \equiv PQ$ najděte body, které mají od roviny ρ určené spádovou přímkou s^ρ (o intervalu $i = 1{,}5$) vzdálenost $v = 2$. Určete jejich kóty [$P(3)$, $Q(2)$; $P_1(Q_1)$ leží na průmětu stopy (hlavní přímky o kótě 3) roviny ρ, $P_1Q_1 = 8$].

9. Bodem A veďte přímku rovnoběžnou s průsečnicí rovin ρ, σ, které jsou určeny spádovými přímkami $s^\rho \equiv MN$, $s^\sigma \equiv PQ$ [$A(6;3;4)$, $M(1;3{,}5;1)$, $N(2{,}5;5{,}5;3)$, $P(8;2{,}5;2)$, $Q(8;7;5)$].

10. Určete vzájemnou polohu trojúhelníků ABC a PQR [$A(2;3;7)$, $B(10;2;5)$, $C(4;6{,}5;2)$, $P(3;1{,}5;5)$, $Q(6;1{,}5;2)$, $R(7;6;7)$].

11. Vyhledejte průsek trojúhelníka ABC s trojúhelníkem MNP. $A(2;1;1)$, $B(0;4;5)$, $C(3;2;2)$, $M(-2;3;4)$, $N(3;0;5)$, $P(0;5;0)$.

12. Sestrojte průsek trojúhelníka ABC s rovnoběžníkem $EFGH$. $A(8;0;7)$, $B(3;2;0)$, $C(2;-3;9)$, $E(4;-4;1)$, $F(0;4;5)$, $G(-5;0;7)$.

13. Zobrazte průsek rovnoběžníka $ABCD$ s rovnoběžníkem $MNPR$. $A(0;60;55)$, $B(50;45;25)$, $C(-10;20;22)$, $M(-10;50;75)$, $N(-25;5;30)$, $P(10;20;5)$.

14. Sestrojte příčku mimoběžek AC, BD ležící v rovině $\rho(30;20;50)$. $A(-45;20;75)$, $C(0;13;0)$, $B(45;85;10)$, $D(0;47;35)$.

15. Zobrazte kružnici, která leží v rovině ρ, má střed S a prochází bodem A [spádové měřítko roviny ρ má interval $i = 1{,}5$; $S(3)$, $A(2)$, $S_1A_1 = 4$].

16. Zobrazte kružnici určenou body $A(2;3;5)$, $B(6;2;2)$, $C(7{,}5;5{,}5;7)$.

17. Zobrazte dráhu bodu M při rotaci kolem přímky $o \equiv AB$ [$M(3{,}5)$, $A(1)$, $B(8)$; $A_1B_1 = 8{,}5$, $B_1M_1 = 4$].

18. Sestrojte kružnici vepsanou a opsanou trojúhelníku ABC. a) $A(-30;0;30)$, $B(40;0;50)$, $C(0;40;0)$, b) $A(-35;40;20)$, $B(10;50;55)$, $C(25;10;20)$.

19. V těžišti T trojúhelníka ABC vztyčte kolmici k rovině ABC, naneste na ni délku $TV = 70$ a sestrojte průmět čtyřstěnu $ABCV$. $A(-30;40;40)$, $B(-10;90;0)$, $C(30;10;30)$.

20. Na průsečnici rovin $\alpha(-40;80;50)$ a $\beta(30;90;40)$ určete bod vzdálený od π o délku $d = 30$.

21. Určete úhel přímek $a = AC$, $b = BC$. $A(-10;30;10)$, $B(65;45;10)$, $C(0;75;60)$.

22. Určete vzdálenost bodu $C(0;-10;60)$ od přímky $a \equiv AB$. $A(-30;30;20)$, $B(20;40;20)$.

23. Určete vzdálenost rovnoběžek a, b. $a = AC$, přímka b prochází bodem B. $A(-30;60;0)$, $B(10;10;10)$, $C(30;30;70)$.

24. Určete vzdálenost rovnoběžných rovin $\rho(-50;60;70)$, $\sigma(-20;?;?)$.

25. Určete úhel přímky $p \equiv RQ$ s rovinou $\rho(-30;40;50)$. $R(40;0;0)$, $Q(-10;70;50)$.

26. Určete úhel dvou rovin $\rho(-40;60;30)$, $\sigma(50;40;20)$.

27. Určete odchylku přímky AB od průmětny π. $A(10;20;50)$, $B(-10;30;-60)$.

28. Určete odchylku roviny $\rho(20;50;70)$ od průmětny π.

29. Sestrojte rovinu souměrnosti úsečky AB. $A(-30;50;20)$, $B(20;20;70)$.

30. Zobrazte čtverec, je-li dán jeho střed S, vrchol A a víte-li, že úhlopříčka, která neprochází bodem A, leží v rovině ρ o spádu $s = 2/3$ [$S(3)$, $A(2)$, $A_1 \in h_1(1)$, $S_1A_1 = 3{,}5$; h je hlavní přímka roviny ρ.

31. Zobrazte pravidelný čtyřboký hranol, jehož podstava o středu $S(3)$ leží v rovině ρ; jedna podstavná hrana leží na přímce o spádu $s = 0{,}25$; výška hranolu $v = 7$ [spádové měřítko roviny má interval $i = 1{,}5$].

32. Zobrazte krychli o hraně $a = 4$, je-li dán její nejnižší vrchol A a přímka AP, na níž leží jedna hrana. Rovina jedné stěny má odchylku $\alpha = 60^o$ od průmětny [$A(3)$, $P(0)$, $A_1P_1 = 5$].

33. Zobrazte pravidelný šestiboký jehlan, je-li dána jeho osa $o \equiv PQ$, vrchol A podstavy a velikost pobočné hrany h [$P(3)$, $Q(8)$, $A(5)$; $P_1Q_1 = 9$, $P_1A_1 = 4$, $Q_1A_1 = 8{,}5$; $h = 8$].

34. V rovině $\rho(30;40;70)$ veďte bodem $M(0;0;70)$ přímky svírající s π úhel 45^o.

35. Zobrazte krychli, jejíž podstava o hraně AB leží v rovině ABP. $A(10;45;0)$, $B(0;15;30)$, $P(-50;0;0)$.

36. Zobrazte krychli, jejíž stěna $ABCD$ leží v rovině $\rho(45;50;45)$. $A(-20;0;?)$, $B(15;10;?)$.

37. Zobrazte pravidelný hranol trojboký, jehož jeden vrchol je A, pobočná hrana leží na přímce $b \equiv QR$ a výška hranolu se rovná polovině podstavné hrany. $A(30;75;45)$, $Q(-15;0;70)$, $R(30;25;15)$.

38. Zobrazte dutý pravidelný hranol šestiboký s osou $o = MN$, vrcholem podstavy $A(0;0;30)$ a výškou $v = 60$. $M(-40;-15;30)$, $N(5;-45;45)$.

39. Zobrazte pravidelný jehlan čtyřboký s rovinou podstavy $\rho(-70;90;0)$, středem podstavy $S(10;40;?)$, prodlouženou úhlopříčkou podstavy délky $d = 80$ procházející bodem $M(-70;0;0)$ a výškou jehlanu $v = 70$.

40. Zobrazte pravidelný jehlan šestiboký o středu podstavy $S(0;60;40)$ a vrcholu $V(80;20;90)$, jehož jedna podstavná hrana leží v půdorysně.

41. Zobrazte rotační válec, jehož podstava leží v rovině $\rho(70;130^o;135^o)$. Střed podstavy je $S(-20;50;?)$, poloměr je $r = 50$ a výška $v = 50$.

42. Sestrojte rotační válec o poloměru $r = 40$, jehož jedna podstava leží v rovině $\rho(70;85;70)$ a druhá podstava má střed v bodě $S'(30;80;90)$.

43. Rotační válcová plocha je dána povrchovou přímkou $p = MN$ a body pláště A, B. $M(-8;25;70)$, $N(-70;65;0)$, $A(0;60;25)$, $B(-17;70;55)$.

44. Sestrojte průmět válce, který vznikne rotací obdélníka $ABCD$, ležícího v rovině kolem jeho kratší střední příčky. $\rho(-80;140;60)$, $A(-40;45;?)$, $B(0;80;?)$, $C(?;38;?)$.

45. Zobrazte rotační kužel, jehož podstava jde body $A(-15;65;20)$, $B(0;80;60)$, $C(15;30;0)$ a vrchol V je v rovině $\alpha(\infty;-40;80)$.

46. Sestrojte průmět tělesa, které vzniká rotací trojúhelníka ABC kolem strany BC. $A(0;35;45)$, $B(75;15;15)$, $C(5;85;55)$.

47. Sestrojte průmět tělesa, které vznikne rotací trojúhelníka ABC kolem jeho strany AB. $A(-60;90;110)$, $B(30;15;20)$, $C(-30;85;40)$.

48. Sestrojte kulovou plochu, je-li dán střed $S(0;30;40)$ a bod $A(30;50;60)$ kulové plochy. V bodě A veďte tečnou rovinu ke kulové ploše.

49. Sestrojte kulovou plochu se středem v rovině $\rho(-40;110;85)$ dotýkající se roviny $\tau(-40;25;30)$ v bodě $T(20;?;25)$.

50. Kosý hranol šestiboký s pravidelnou podstavou v π určenou středem ${}^1S(-50;35;0)$ a vrcholem ${}^1A(-30;20;0)$ o vrcholu ${}^2A(0;40;40)$ protněte rovinou $\rho(50;50;50)$.

51. Sestrojte normálový řez kosého šestibokého hranolu s pravidelnou podstavou v půdorysně, určenou středem $S(-10;60;0)$ a vrcholem $A(-30;40;0)$ o vrcholu $A'(30;10;70)$. ***Poznámka:*** Normálovým řezem rozumíme řez rovinou kolmou ke směru povrchových přímek. Při rozvinutí kosého hranolu nebo válce se bez normálového řezu neobejdeme.

52. Sestrojte normálový řez na šikmém čtyřbokém hranolu s čtvercovou podstavou v π o hraně AB a pobočnou hranou AA'. $A(30;10;0)$, $B(-10;30;0)$, $A'(-10;50;80)$.

53. Sestrojte řez roviny $\rho(-50;95;20)$ šikmým čtyřbokým jehlanem $ABCDV$. $A(-40;20;0)$, $B(-30;70;0)$, $C(40;50;0)$, $D(20;10;0)$, $V(0;90;80)$.

54. Daný kruhový válec s kruhovou podstavou v π o středu $S(-40;50;0)$ a poloměru $r = 40$ se středem horní podstavy $S'(40;80;105)$ protněte rovinou $\sigma(40;\infty;40)$.

55. Kruhový válec s podstavou v π o středu $S(0;30;0)$ a poloměru $r = 25$ se středem druhé podstavy $S'(-45;50;70)$ protněte rovinou $\rho(-50;100;50)$.

56. Středem úsečky SM proložte rovinu kolmou k povrchovým přímkám válcové plochy a sestrojte normálový řez s válcovou plochou. Válcová plocha je zadána řídicí kružnicí v π o středu $S(0;30;0)$ a poloměru $r = 27$ a směrem povrchových přímek SM. $M(-50;50;60)$.

57. Zobrazte průsek trojúhelníka ABC s kosým kruhovým válcem, jehož podstava určená středem S a poloměrem r je v π a ${}^1S$ je střed druhé podstavy. $A(45;80;32)$, $B(0;80;88)$, $C(-40;20;32)$, $S(40;40;0)$, ${}^1S(-8;68;60)$, $r = 25$.

58. Sestrojte rovinný řez kruhového kužele s podstavou v π o středu $S(10;60;0)$, poloměru $r = 40$ a vrcholu $V(20;10;70)$ rovinou $\rho(-10;-20;10)$.

59. Sestrojte rovinný řez rotačního kužele s podstavou v π o středu $S(0;50;0)$, poloměru $r = 35$ a výšce $v = 70$ rovinou $\alpha(90;110;35)$.

60. Sestrojte řez kulové plochy o středu $S(0;0;50)$ a poloměru $r = 40$ rovinou $\rho(60;\infty;70)$.

61. Sestrojte řez roviny $\rho(-9080110)$ s kulovou plochou $[S(305050), r = 40]$.

62. Sestrojte průsečíky přímky $k \equiv KL$ s šikmým čtyřbokým hranolem s čtvercovou podstavou v π o hraně AB a bočnou hranou AA'. $K(-50;40;55)$, $L(0;38;35)$, $A(30;10;0)$, $B(-10;30;0)$, $A'(-10;50;80)$.

63. Sestrojte průsečíky přímky $m \equiv PM$ s pravidelným pětibokým jehlanem s podstavou v π o vrcholu A a hlavním vrcholu V. $P(70;20;0)$, $M(0;80;50)$, $A(30;80;0)$, $V(30;40;70)$.

64. Vyhledejte průsečíky přímky $p = PN$ s kruhovým válcem, jehož jedna podstava leží v π o středu S a poloměru r, střed druhé podstavy je S'. $P(20;100;0)$, $N(60;0;40)$, $S(-20;60;0)$, $r = 30$, $S'(20;40;60)$.

65. Sestrojte průsečíky přímky PN s kruhovým kuželem s vrcholem V a podstavou v π o středu S a poloměru r. $P(60;90;0)$, $N(-50;0;40)$, $V(-30;70;70)$, $S(20;40;0)$, $r = 30$.

66. Určete průsečíky přímky PN [$P(20;110;0)$, $N(-50;0;100)$] s kulovou plochou o středu $S(0;50;40)$ a poloměru $r = 40$.

67. Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímky $t \equiv PQ$ a má střed v bodě $S(0;40;30)$. V bodě S vztyčte kolmici k rovině kružnice k, naneste na ni úsečku $SV = 70$ a sestrojte průmět kužele s podstavou k a vrcholem V. $P(-50;55;35)$, $Q(30;0;70)$.

LITERATURA

a) Knihy

G. Čeněk - V. Medek : Deskriptívní geometria I; ŠNTL Bratislava 1953

R. Piska - V. Medek : Deskriptivní geometrie I,II; SNTL Praha 1966

A. Urban : Deskriptivní geometrie I; SNTL Praha 1965

K. Drábek - F. Harant - O. Setzer : Deskriptivní geometrie I; SNTL Praha 1982

B. Macková a kol. : Deskriptívna geometria v príkladoch; SVTL Bratislava 1959

b) Skripta

A. Urban : Deskriptivní geometrie I, II; SNTL Praha 1964

J. Černý - M. Kočandrlová : Konstruktivní geometrie; ČVUT Praha 1993

Š. Holáň - L. Holáňová : Cvičení z deskriptivní geometrie II; CERM Brno 1994

Číslo skladové	1837	500/200
Určeno pro posluchače:	1. ročníku hornicko - geologické a stavební fakulty	
Autor	RNDr. Čestmír Restl	
Institut:	Matematiky a deskriptivní geometrie	514
Název	Nauka o zemi a přehled technologií jejího využití	
Místo, rok vydání	Ostrava, 1998, 2. vydání	
Počet stran	29	
Vydala	VŠB - TECHNICKÁ UNIVERZITA Ostrava	
Tisk	Printo	
Náklad	2000	
Tématická skupina	17	
Povoleno MK ČSR č. j. 21.514/79 ze dne 4. 12. 1979		

ISBN 80-7078-537-3