

# Matematické modelování

studijní text

Jaroslav Vlček  
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie  
VŠB-TU Ostrava

26. ledna 2021

# Obsah

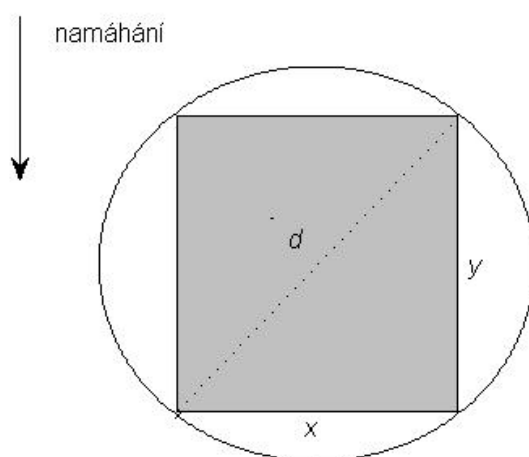
<b>1</b>	<b>Principy matematického modelování</b>	<b>3</b>
1.1	Motivační úlohy . . . . .	3
1.2	Základní pojmy z oblasti modelování . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Jednorozměrné stacionární modely</b>	<b>9</b>
2.1	Globální bilance . . . . .	9
2.2	Lokální bilance . . . . .	13
2.3	Okrajové podmínky . . . . .	16
2.4	Formulace okrajových úloh . . . . .	18
2.5	Úlohy . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Jednorozměrné nestacionární úlohy</b>	<b>27</b>
3.1	Výchozí vztahy . . . . .	27
3.2	Modelové 1D nestacionární úlohy . . . . .	30
3.3	Konvekce – řešení úloh metodou charakteristik . . . . .	32
3.4	Fourierova metoda separace . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Vícerozměrné úlohy</b>	<b>39</b>
4.1	Bilanční vztahy . . . . .	39
4.2	Konstituční vztahy a jejich důsledky . . . . .	45
4.3	Formulace okrajových úloh . . . . .	46
4.4	Úlohy k samostatnému řešení . . . . .	49
4.5	Vícerozměrné nestacionární modely . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Vybrané aplikační oblasti</b>	<b>54</b>
5.1	Populační a logistické modely . . . . .	54
5.2	Přenosové a relaxační modely . . . . .	56
5.3	Elektromagnetické pole . . . . .	58
5.4	Kinematické úlohy . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Parciální diferenciální rovnice</b>	<b>62</b>
6.1	Parciální diferenciální rovnice prvního řádu . . . . .	62
6.2	Parciální diferenciální rovnice druhého řádu . . . . .	68

# Kapitola 1

## Principy matematického modelování

### 1.1 Motivační úlohy

**1.1.1 Příklad – extrémální problém.** Z válcového kmene o průměru  $d$  je třeba vyrobit nosník (trám) obdélníkového průřezu s maximální pevností v ohybu. Určete rozměry průřezu.



Obrázek 1.1: K příkladu 1.1.1.

Označíme  $x, y$  hledané rozměry, pro které platí podle Pythagorovy věty  $x^2 + y^2 = d^2$ . Pro homogenní materiál je maximální pevnost v ohybu (tzv. maximální průřezový modul v ohybu) dána vztahem<sup>1</sup>

$$w = \frac{1}{6}xy^2.$$

Naším úkolem je tedy najít maximum této funkce. Jedná se konkrétně o její vázaný extrém podmínkou  $x^2 + y^2 = d^2$ . V tomto jednoduchém případě lze postupovat přímo dosazením výrazu  $y^2$  z podmínky, takže výpočet má ve stručnosti následující kroky:

$$w(x) = \frac{1}{6}x(d^2 - x^2),$$

$$w'(x) = 0 \Rightarrow d^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

<sup>1</sup>viz např. Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví, SNTL/ALFA, 1971, str. 105

Záporný kořen evidentně nevyhovuje úloze, a proto

$$y = \sqrt{d^2 - x^2} = d \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Závěr:  $y = \sqrt{2}x$ , tj. strany musí být v poměru  $\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**1.1.2 Příklad – elektrický oscilační obvod.** Určete časový průběh proudu  $i(t)$  v sériovém obvodu s kapacitou  $C$  a indukčností  $L$  při počátečních podmínkách  $i(0) = i_0$ ,  $(di(t)/dt)_{t=0} = 0$ .

Vyjdeme ze základní rovnice

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = 0.$$

Její diferenciál podle  $t$  obdržíme ve spojení se zadanými podmínkami

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} i(t) = 0, \quad i(t=0) = i_0, \quad \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

To je počáteční úloha pro homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, kterou vyřešíme klasickým postupem. Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

má ryze imaginární kořeny

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{LC}},$$

a proto její obecné řešení bude tvořeno goniometrickými funkcemi:

$$i(t) = C_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Aplikujeme-li počáteční podmínky, obdržíme hodnoty konstant  $C_1 = i_0$ ,  $C_2 = 0$ . Výsledné řešení tedy představuje funkce

$$i(t) = i_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Jedná se o stabilní periodické řešení, tj. o netlumené harmonické kmity.

**1.1.3 Reprodukce s migrací.** Sestavte úlohu popisující časovou změnu počtu obyvatel v uzavřené lokalitě vlivem reprodukce a migrace. Vezměte v úvahu narození, úmrtí, přistěhování a odstěhování. Charakterizujte typ úlohy a navrhněte metodu řešení.

Označme  $x_0$  výchozí počet obyvatel a  $x(t)$  jejich počet v čase  $t$ . Změna odpovídající časovém intervalu  $\Delta t$  nechť je  $\Delta x(t)$ . Vývoj populace v důsledku přistěhování, resp. odstěhování zahrneme do jediného výrazu  $f(t)$ . Dále musíme zavést funkce popisující reprodukční a migrační procesy. Ty budou závislé nejen na čase, ale i na aktuálním počtu obyvatel, konkrétně označíme  $\alpha(x, t)$  počet narozených a  $\beta(x, t)$  počet zemřelých obyvatel.

Přírůstek (nebo úbytek) obyvatelstva  $\Delta x$  za dobu  $\Delta t$  můžeme bilancovat na základě diferenciální rovnice

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \alpha(x, t) - \beta(x, t) + f(t),$$

kde  $\alpha$ ,  $\beta$  jsou nezáporné funkce. V souladu s realitou můžeme předpokládat, že  $|\Delta x| \ll x$  a  $|\Delta t| \ll t$ . Pak lze časové změny počtu obyvatel pokládat za spojité, což vede k diferenciální rovnici

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(x, t) - \beta(x, t) + f(t).$$

Ta spolu s počáteční podmínkou  $x(0) = x_0$  tvoří Cauchyho úlohu prvního řádu. V obecnosti jde sice o korektně formulovanou úlohu, avšak řešitelnou zpravidla pouze numericky. Pokud jsou blíže specifikovány funkce  $\alpha$ ,  $\beta$ , je možno postupovat analyticky.

Nejjednodušším příkladem je linearizovaný model izolovaného systému. Pro něj obdržíme homogenní lineární rovnici, která je separovatelná a jejím řešením je exponenciální funkce:

$$\frac{dx}{dt} = (k_1 - k_2)x, \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{(k_1 - k_2)t}.$$

Tento výsledek má tři možné varianty:

1. vyhynutí populace pro  $k_1 < k_2$  (asymptoticky stabilní řešení),
2. přemnožení se pro  $k_1 > k_2$  (nestabilní řešení),
3. konstantní setrvalý stav pro  $k_1 = k_2$  (stabilní řešení).

**1.1.4 Deformace pružného vlákna.** Vlákno napjaté silou  $T$  a upevněné v bodech  $x = 0$  a  $x = L$  je zatíženo silou o hustotě  $f(x)$ . Jeho průhyb  $u(x)$  lze určit řešením známé rovnice

$$\frac{d^2u}{dx^2} = q(x), \quad q(x) = \frac{f(x)}{T}, \quad x \in (0, L),$$

která má pro  $q = konst.$  obecné řešení

$$u(x) = \frac{1}{2}qx^2 + C_1x + C_2,$$

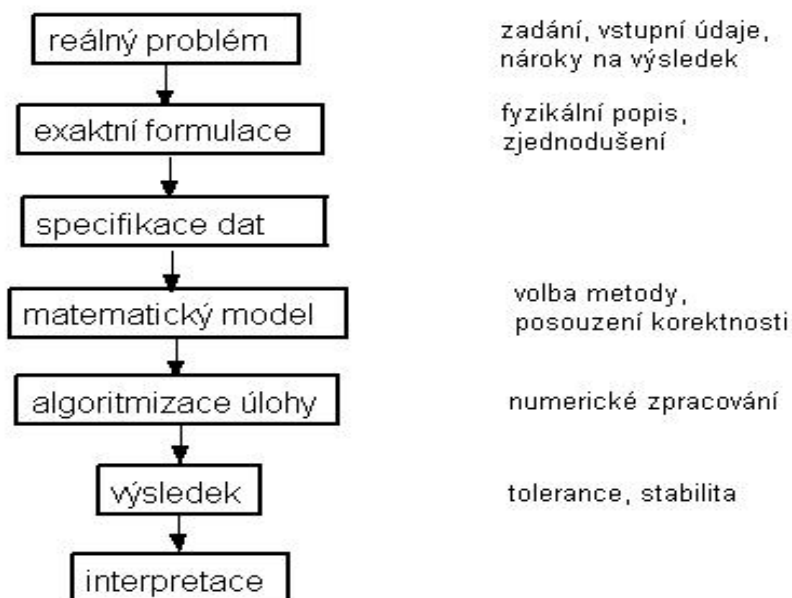
Protože v hraničních bodech platí  $u(0) = u(L) = 0$ , snadno určíme hodnoty konstant  $C_1 = -\frac{1}{2}qL$ ,  $C_2 = 0$ . Řešením je tudíž parabola

$$u(x) = \frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qLx = \frac{1}{2}qx(x - L).$$

## 1.2 Základní pojmy z oblasti modelování

**1.2.1 Schéma modelovacího procesu.** Uvedené příklady ilustrují jednoduché typy modelových úloh z několika naprosto odlišných aplikačních oblastí. Všimněme si však blíže atributů, které mají společné. Ve všech případech bylo třeba zvolit vhodný základní bilanční vztah z příslušného technického oboru a doplnit ho geometrickými a fyzikálními předpoklady a omezeními. Na příslušném stupni abstrakce tak byla formulována matematická úloha, kterou bylo třeba charakterizovat (extremální problém, počáteční nebo okrajová úloha pro diferenciální rovnici) a zvolit odpovídající algoritmus řešení. V závěru pak byly výsledky interpretovány opět ve fyzikálním kontextu.

Tuto strategii – zjednodušeně řečeno – uplatňujeme při řešení většiny aplikačních problémů, které chceme matematizovat a vhodnými nástroji této disciplíny řešit. Hovoříme pak o matematickém modelování, jehož celý proces můžeme znázornit například následujícím schématem.



Obrázek 1.2: Schéma modelovacího procesu.

**1.2.2 Typy úloh.** Je užitečné uvědomit si, s jakými typy úloh se nejčastěji setkáváme při tvorbě matematických modelů. Můžeme je klasifikovat například podle cíle:

- kvantitativní  $\rightarrow$  hodnoty veličin,
- kvalitativní  $\rightarrow$  existence a stabilita řešení,
- simulační  $\rightarrow$  algoritmy,
- $\vdots$

Podle struktury může jít o

- rovnice, nerovnice,
- extrémální úlohy,
- důkazy, ověření,
- simulační úlohy,
- $\vdots$

**1.2.3 Klasifikace reálných jevů.** Základní rozlišení je opět možno provést z několika hledisek, která jsou obvykle uplatňována současně:

- závislost na čase:
  - stacionární jevy (stavy),
  - nestacionární jevy (procesy)

- závislost na počtu potřebných prostorových souřadnic:
  - jednodimenzionální,
  - vícedimenzionální (dvou-, tří-)
- vlastnosti prostředí, v němž je jev popisován:
  - homogenní nebo nehomogenní (podle závislosti na prostorových souřadnicích),
  - izotropní nebo anizotropní (podle závislosti na směru)

**1.2.4 Veličiny a jejich vztahy.** V matematickém modelu procesu nebo jevu vystupuje obvykle větší počet veličin, které však hrají různou roli. Jejich správné zařazení a vyjádření má klíčový význam. Rozlišujeme jednak

- veličiny **lokální** (teplota, rychlost aj.), které mají různé hodnoty v místě a čase,
- veličiny **globální** (hmotnost, elektrický náboj aj.), které uvažujeme obvykle v daném objemu, na ploše apod., resp. v zadaném časovém úseku.

Pro koncipování modelových vztahů je dále velmi důležité specifikovat

- veličiny **tokové** (rychlost, tepelný tok aj.) a
- veličiny **stavové** (potenciál, teplota aj.).

Základem pro popis stavu nebo procesu jsou **bilanční vztahy** pro tokové nebo stavové veličiny, které nazýváme **zákony zachování**. Ty bývají zpravidla doplněny speciálními relacemi mezi oběma typy veličin, které označujeme jako **konstituční vztahy**. V konkrétních aplikacích se uplatňuje specifická terminologie a používá se typické označení veličin. Některé z nejpoužívanějších jsou uvedeny v tabulce na následující straně.

**1.2.5 Veličina a její hustota.** Označme v jednorozměrném případě  $f(x)$  hustotu veličiny  $F$  na intervalu  $\langle x_1, x_2 \rangle$  délky  $d = x_2 - x_1$ . Pak výraz

$$F(d) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

představuje celkové „množství“ veličiny  $F$  na tomto intervalu.

Pro vícerozměrné případy je hustota  $f(x_1, x_2, x_3)$  funkcí více prostorových souřadnic a veličinu  $F$  můžeme definovat na

- křivce  $k$ :  $F(k) = \int_k f ds$  (křivkový integrál prvního druhu),
- ploše  $S$ :  $F(S) = \int_S f dS$  (plošný integrál prvního druhu),
- objemu  $V$ :  $F(V) = \int_V f dV$  (objemový integrál).

V mnoha případech jsou součástí bilančních vztahů tzv. **zdrojové členy**, které vyjadřují celkovou nebo lokální produkci zdrojů na zkoumané oblasti. Je-li  $f(x_1, x_2, x_3)$  hustota rozložení zdrojů, pak veličina  $F$  představuje celkovou produkci zdrojů na příslušné množině (intervalu, křivce, ploše objemu).

Atributy vybraných procesů a jevů

Jev, proces	Bilanční vztah	Stavová veličina	Toková veličina	Konstituční vztah	Materiálové veličiny	Zdrojová veličina je hustotou ...
vedení tepla	zákon zachování energie	teplota $T$	tepelný tok $\mathbf{q}$	$\mathbf{q} = -\lambda \text{ grad } T$	tepelná vodivost $\lambda$	tepelných zdrojů
pružná deformace	rovnováha sil (momentů)	posunutí $\mathbf{u}$	napětí $\sigma$	Hookeův zákon $\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = g(\mathbf{u})$	Youngův modul $E$	vnějších sil
proudění tekutiny	zákon zachování hmotnosti	tlak $p$	rychlost $\mathbf{v}$	$\mathbf{v} = -g(\eta) \text{ grad } p$	viskozita $\eta$	zřídlel
elektrostatické pole	Gaussův zákon	elektrostatický potenciál $\varphi$	elektrostatická indukce $\mathbf{D}$	$\mathbf{D} = -\varepsilon \text{ grad } \varphi$	permitivita $\varepsilon$	nábojů



## Kapitola 2

# Jednorozměrné stacionární modely

V dalším textu se budeme držet následujícího označení:

- $x \in \langle 0, L \rangle$  ... prostorová proměnná,
- $f(x)$  ... hustota zdrojů,
- $u(x)$  ... stavová veličina,
- $v(x)$  ... toková veličina.

### 2.1 Globální bilance

**2.1.1 Zákony zachování.** Uvažujme element  $\langle x_1, x_2 \rangle$  intervalu  $(0, L)$  podle obrázku 2.1. Označíme  $v(x_1), v(x_2)$  toky na koncích elementu, přičemž znaménka  $+ / -$  znamenají výtok (zde), popřípadě vtékání vzhledem k orientaci osy  $x$ .



Obrázek 2.1: K bilanci tokové veličiny.

Bilanci tokové veličiny  $v$  na elementu  $\langle x_1, x_2 \rangle$  můžeme slovy vyjádřit takto: *součet množství veličiny vteklé a vyteklé v koncových bodech je roven množství této veličiny vyprodukovanému na celém intervalu zdroji o hustotě  $f(x)$* . Symbolicky má bilanční vztah tvar

$$\forall x_1, x_2 \in (0, L) : \quad v(x_2) - v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx . \quad (2.1)$$

Formule (2.1) představuje **globální bilanční vztah** pro tokovou veličinu neboli **zákon** jejího **zachování**. Předpokladem jeho platnosti je integrovatelnost funkce  $f(x)$ . Pro detailnější analýzu modelu je dále potřebné disponovat vztahem mezi tokovou a stavovou veličinou, tj. konstituční rovnicí, jak bude ukázáno v další podkapitole.

**2.1.2 Konstituční vztahy.** mohou mít různou podobu. Uvedeme nejobvyklejší variantu, se kterou se lze setkat například při modelování přenosových jevů (sdílení tepla, difuze apod.).

Opět uvažujeme element  $\langle x_1, x_2 \rangle$  a označíme  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Této změně proměnné odpovídá změna stavu

$$\Delta u(x) = u(x_2) - u(x_1).$$

Střední hodnota této změny na elementu je vyjádřena diferenčním podílem  $\Delta u(x)/\Delta x$ . Je-li v globálním měřítku celková změna tokové veličiny  $v(x_2) - v(x_1)$  úměrná střední hodnotě změny stavové veličiny, existuje mezi nimi **konstituční vztah** tvaru

$$v(x_2) - v(x_1) = -p \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}, \quad (2.2)$$

kde  $p > 0$  je konstanta nebo funkce představující koeficient úměrnosti. Znaménko „minus“ vyjadřuje, že tok ve směru klesající stavové funkce je kladný. Koeficient  $p$  obvykle souvisí s materiálovými vlastnostmi prostředí, konkrétně znamená

- $p = \text{konst.}$             homogenní prostředí,
- $p = p(x)$             lineární nehomogenní prostředí,
- $p = p(u)$             nelineární nehomogenní prostředí (jedná se závislost na stavové funkci).

Spojíme-li bilanci tokové veličiny (2.1) s konstituční rovnicí (2.2), obdržíme globální bilanční vztah pro stavovou veličinu  $u(x)$ :

$$-p \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (2.3)$$

V následujících dvou příkladech ukážeme vytvoření konstitučního vztahu v konkrétním modelu a budeme ilustrovat vytvoření bilanční rovnice.

### 2.1.3 Příklad – konstituční relace pro proudění podzemní vody s volnou hladinou.

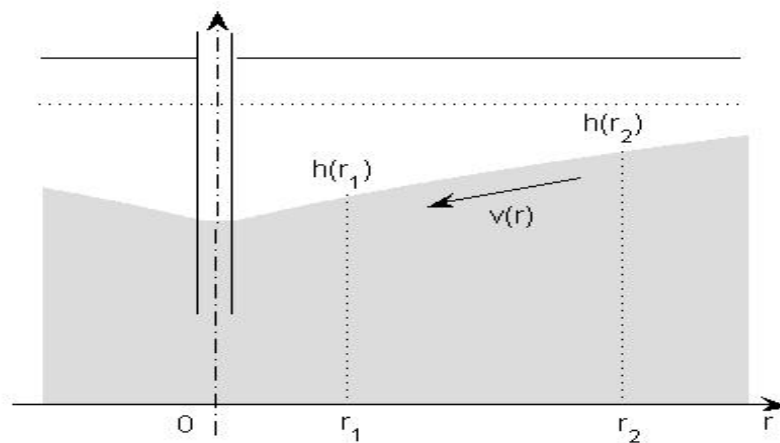
Při čerpání z vrtu zapuštěného do zvodnělé propustné vrstvy s volnou hladinou podzemní vody se ustálí rotačně symetrický profil hladiny (tzv. depresní kužel) – obr 2.2. Naším úkolem je vyjádřit střední rychlost přítoku k vrtu.

Okamžitá rychlost  $v(r)$  ve vzdálenosti  $r$  od vrtu představuje tokovou proměnou. Její změnu  $\tilde{v}(r)$  na úseku  $\langle r_1, r_2 \rangle$  vyjádříme prostřednictvím změny hydraulické výšky  $h(r)$ , která je v této úloze stavovou proměnou. Příslušný vztah má tvar tzv. Darcyho zákona, užívaného v podzemní hydraulice:

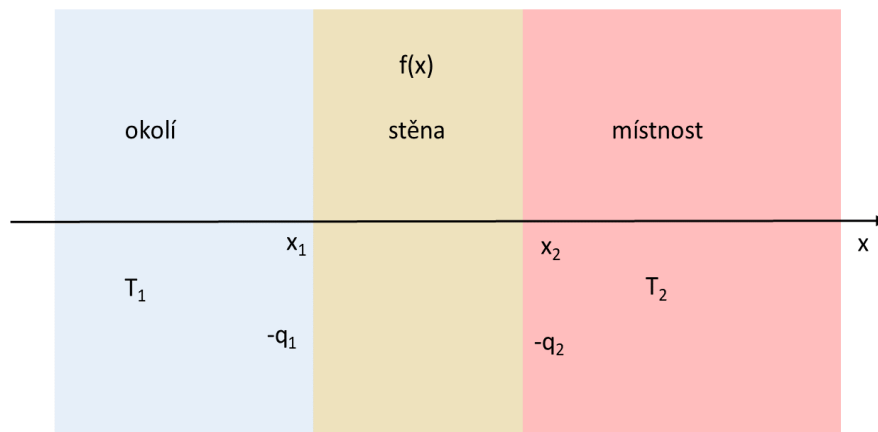
$$v(r_2) - v(r_1) = -k \frac{h(r_2) - h(r_1)}{r_2 - r_1} = -k \frac{\Delta h}{\Delta r}. \quad (2.4)$$

Koeficient úměrnosti  $k$  se nazývá koeficient filtrace a je závislý zejména na materiálových vlastnostech zvodnělé vrstvy. Záporné znaménko odpovídá poklesu hydraulické výšky proti orientaci osy  $r$ . Povšimněme si, že získaný vzorec má podobu identickou s obecným konstitučním vztahem (2.2).

**2.1.4 Příklad – vedení tepla.** Budeme modelovat jednodimenzionální prostup tepla stěnou mezi místností udržovanou na teplotě  $T_2$ , která je větší než teplota okolního prostředí  $T_1$ . Tepelné ztráty ve stěně jsou popsány funkcí  $f(x)$ , stěna je homogenní a má tepelnou vodivost  $\lambda$  [W/(K.m)] - viz obr. 2.3.



Obrázek 2.2: Depresní kužel při čerpání z vrtu.



Obrázek 2.3: K příkladu 2.1.4.

Tepelný tok prochází proti směru osy  $x$ , zdrojová funkce  $f(x)$  reprezentuje tepelné ztráty způsobené akumulací tepla do prostředí stěny (proto ji v bilanční rovnici musíme uvést se znaménkem minus). Stavovou funkcí je teplota  $T(x)$ . Na základě spojitosti toku musí platit

$$-q_2 - (-q_1) = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx ,$$

tj. analogicky jako v obecné bilanční rovnici (2.1):

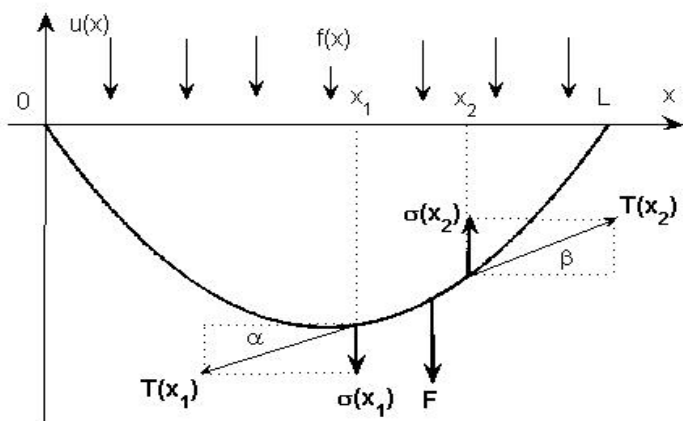
$$q(x_2) - q(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx . \quad (2.5)$$

Konstituční relace bude vypadat podle očekávání takto:

$$q(x_2) - q(x_1) = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} . \quad (2.6)$$

Spojením obou předchozích vztahů obdržíme globální bilanci stavové veličiny, tj. teploty  $T(x)$ .

**2.1.5 Příklad – bilanční rovnice při malém průhybu pružného vlákna.** Uvažujme pružné homogenní vlákno délky  $L$  upevněné v krajních bodech  $x = 0$  a  $x = L$ , které je na celé své délce namáháno silou o hustotě  $f(x)$  – obr. 2.4. Naším úkolem je stanovit globální bilanční rovnici pro jeho střední průhyb  $u(x)$  na úseku  $\langle x_1, x_2 \rangle$ .



Obrázek 2.4: Bilance silových účinků při průhybu vlákna.

Protože vzhledem k zadání můžeme zanedbat průřez vlákna, jedná se jednorozměrnou úlohu, v níž je

- $f(x)$  hustota vnějších sil, která na bilancovaném úseku produkuje silový účinek

$$F = |\mathbf{F}| = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx ;$$

- $\mathbf{T}(x)$  napínající síla o velikosti  $T = |\mathbf{T}|$  v bodě  $x$ ;
- $\sigma(x)$  velikost vertikální složky vektoru  $\mathbf{T}(x)$ , která hraje roli tokové funkce;
- $u(x)$  průhyb (posunutí) jako stavová funkce.

Bilanční rovnice vyjadřuje rovnováhu sil na elementu  $\langle x_1, x_2 \rangle$ :

$$-\sigma(x_1) + \sigma(x_2) = F \quad \Rightarrow \quad \sigma(x_2) - \sigma(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx . \quad (2.7)$$

Konstituční vztahy získáme rozepsáním vertikálních složek vektoru  $\mathbf{T}(x)$  v koncových bodech za použití aproximace, která je korektní v případě malých deformací:

$$\sigma(x_1) = T(x_1) \sin \alpha \approx T(x_1) \operatorname{tg} \alpha \approx T(x_1) \left. \frac{\Delta u}{\Delta x} \right|_{x=x_1} ,$$

$$\sigma(x_2) = T(x_2) \sin \beta \approx T(x_2) \operatorname{tg} \beta \approx T(x_2) \left. \frac{\Delta u}{\Delta x} \right|_{x=x_2} .$$

Střední změna na elementu je rozdílem těchto veličin, tj.

$$\Delta \sigma(x) = \sigma(x_2) - \sigma(x_1) = T(x_2) \left. \frac{\Delta u}{\Delta x} \right|_{x=x_2} - T(x_1) \left. \frac{\Delta u}{\Delta x} \right|_{x=x_1} . \quad (2.8)$$

Poslední formule je konstitučním vztahem mezi namáháním a posunutím (průhybem). Poznamenáváme, že v obecnějších úlohách pružnosti jsou napětí i deformace vyjádřeny tenzorově a jejich vzájemný vztah představuje Hookeův zákon, v němž vystupují materiálové veličiny (elastické moduly).

V našem případě se lze spokojit se získanými konstitučními relacemi, které po dosazení do rovnice rovnováhy (2.7) dávají vzniknout globální bilanční rovnici

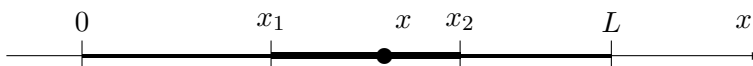
$$T(x_2) \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{x=x_2} - T(x_1) \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx . \quad (2.9)$$

## 2.2 Lokální bilance

**2.2.1 Lokální zákon zachování pro tokovou veličinu.** Uvažujme globální bilanci toku ve tvaru (2.1)

$$v(x_2) - v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx . \quad (2.10)$$

Budeme předpokládat, že element  $\langle x_1, x_2 \rangle \subset (0, L) \subset \mathbb{R}$  lze libovolně zmenšovat ve smyslu hypotézy kontinua (obr. 2.5).



Obrázek 2.5: K lokálnímu zákonu zachování.

Je-li funkce hustoty zdrojů  $f(x)$  **integrovatelná**, pak pro libovolné  $x \in (x_1, x_2)$  musí platit

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x- \\ x_2 \rightarrow x+}} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = 0 .$$

Označíme-li dále  $\lim_{x_1 \rightarrow x-} v(x_1) = v(x-)$ ,  $\lim_{x_2 \rightarrow x+} v(x_2) = v(x+)$ , platí podle (2.10)

$$\forall x : \quad v(x+) - v(x-) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x-) = v(x+) . \quad (2.11)$$

Tento výsledek je **lokálním zákonem zachování pro tokovou veličinu**, který můžeme lapidárně tlumočit tzv. **principem spojitosti toku**: „co vteče do nějakého místa, také z něj také vyteče”.

**2.2.2 Lokální tvar konstitučních vztahů.** Podobně jako jsme vzorcem (2.2) zavedli globální konstituční relaci

$$v(x_2) - v(x_1) = -p(x) \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} \quad (2.12)$$

mezi tokovou funkcí a stavovou funkcí, můžeme definovat její lokální podobu, nahradíme-li na pravé straně diferenční podíl derivací:

$$v(x) = -p(x) \frac{du(x)}{dx} . \quad (2.13)$$

Slovy: tok veličiny  $v(x)$  v bodě  $x$  je úměrný derivaci (lokální změně) stavové funkce  $u(x)$ .

Po dosazení do (2.11) obdržíme jako důsledek podmínku přechodu pro stavovou veličinu

$$p(x-) \frac{du(x-)}{dx} = p(x+) \frac{du(x+)}{dx} . \quad (2.14)$$

**2.2.3 Diferenciální tvar zákona zachování.** Vyjdeme opět z globální bilance tokové veličiny, ale za předpokladu **spojitosti funkce hustoty**. Vydělíme obě strany (2.10) rozdílem  $x_2 - x_1$ ,

$$\frac{v(x_2) - v(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx ,$$

a pak na pravé straně aplikujeme větu o integrální střední hodnotě<sup>1</sup>, takže obdržíme kvazilokální bilanci

$$\frac{v(x_2) - v(x_1)}{x_2 - x_1} = f(\xi) .$$

V limitě pro  $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$  dostáváme **diferenciální lokální zákon zachování pro tokovou veličinu** ve tvaru

$$\frac{dv}{dx} = f(x) , \quad (2.15)$$

protože pro spojitou funkci hustoty  $f(x)$  je  $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$ .

Nyní můžeme přistoupit k formulování **diferenciálního tvaru zákona zachování stavové veličiny**, použijeme-li v(2.15) lokální konstituční rovnici (2.13):

$$- \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x) \quad \forall x \in (0, L) . \quad (2.16)$$

**2.2.4 Příklad – diferenciální rovnice pro malou deformaci pružného vlákna.** Aplikujeme-li právě popsaný postup na globální bilanční vztah (2.9):

$$T(x_2) \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{x=x_2} - T(x_1) \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad \Big| \cdot \frac{1}{x_2 - x_1}$$

a po limitních přechodech  $x_1 \rightarrow x-$ ,  $x_2 \rightarrow x+$  obdržíme hledanou diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dx} \left( T(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x) . \quad (2.17)$$

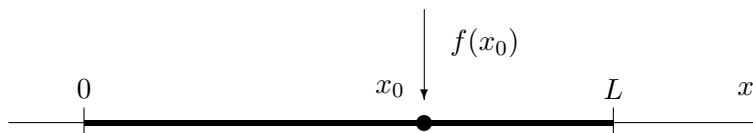
Kladné znaménko na levé straně plyne z orientace sil v souřadném systému na obr. 2.4.

**2.2.5 Charakter zdrojové veličiny a jeho důsledky.** Je třeba si uvědomit, že vztahy (2.11) a (2.15) jsou různými důsledky téhož zákona zachování tokové veličiny, avšak pro různou kvalitu zdrojové funkce. Je-li funkce  $f(x)$  spojitá, jsou tyto vztahy ekvivalentní, a současně je indukována hladkost stavové funkce, tj. existence derivace  $\frac{du}{dx}$  pro každé  $x \in (0, L)$ .

Na druhé straně, hustota  $f(x)$  nemusí být ani integrovatelná, a přesto úloha může mít velmi dobrý fyzikální smysl – představme si jako konkrétní příklad vlákno zatížené v jediném bodě  $x_0 \in (0, L)$  – viz obr. 2.6.

---

<sup>1</sup>  $\exists \xi \in (x_1, x_2) : \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = f(\xi) .$



Obrázek 2.6: Bodové zatížení vlákna.

Funkci hustoty je pak třeba uvažovat v zobecněném smyslu<sup>2</sup>, kdy její formu tvoříme například pomocí Diracovy funkce  $\delta(x)$ . Pro dokreslení situace zapišme odpovídajícím způsobem globální bilanci pro napětí (2.7):

$$\Delta\sigma(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x - x_0) dx \quad (= f(x_0)) .$$

Je pochopitelné, že v důsledku toho bude i stavová veličina  $u(x)$  patřit do obecnější třídy funkcí. Hovoříme pak o **slabém řešení** rovnice (2.17).

**2.2.6 Příklad – prostup tepla stěnou.** Cílem je modelovat lokální bilanci při prostupu tepla stěnou dle formulace v sekci 2.1.4. Lokální podobu konstituční relace  $q(x) = -\lambda dT/dx$  dosadíme do lokální bilanční rovnice toku  $dq/dx = f(x)$ :

$$-\frac{d}{dx} \left( \lambda(x) \frac{dT}{dx} \right) = f(x) \quad (2.18)$$

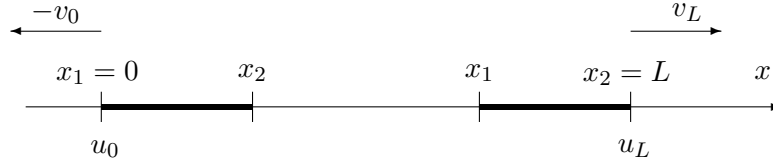
Výsledkem je známá jednorozměrná stacionární Fourierovu rovnici vedení tepla pro určení teploty  $T(x)$  v libovolném bodě stěny.

---

<sup>2</sup>jako tzv. distribuci

## 2.3 Okrajové podmínky

**2.3.1 Bilance v krajních bodech.** Uvažujme opět interval  $(0, L)$ , v jehož krajních bodech máme zadány hodnoty toku  $v_0, v_L$ , popřípadě hodnoty stavové funkce  $u_0, u_L$ . Dále je  $f(x)$  integrovatelná funkce hustoty zdrojů. Se zřetelem k obrázku 2.7 můžeme napsat známým způsobem nejprve **globální bilanci toku** pro oba koncové subintervaly:



Obrázek 2.7: Bilance v krajních bodech.

$$x \in (0, x_1) \quad \dots \quad v(x_1) - v_0 = \int_0^{x_1} f(x) dx, \quad (2.19)$$

$$x \in (x_2, L) \quad \dots \quad v(L) - v(x_2) = \int_{x_2}^L f(x) dx. \quad (2.20)$$

**Lokální bilanci toku** v krajních bodech snadno získáme limitními přechody, při nichž označíme

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^+} v(x_1) = v(0+), \quad \lim_{x_2 \rightarrow L^-} v(x_2) = v(L-).$$

Podobně jako v článku 2.2.1 obdržíme

$$\begin{aligned} v(0+) - v_0 = 0 & \Rightarrow v(0+) = v_0, \\ v_L - v(L-) = 0 & \Rightarrow v(L-) = v_L. \end{aligned}$$

**Lokální bilanci stavové funkce** odvodíme pomocí konstituční rovnice (2.13), v níž provedeme limitní přechody k okrajům intervalu:

$$v(0+) = -p(0+) \frac{du(0+)}{dx}, \quad \text{tj.} \quad -p(0+) \frac{du(0+)}{dx} = v_0, \quad (2.21)$$

$$v(L-) = -p(L-) \frac{du(L-)}{dx}, \quad \text{tj.} \quad -p(L-) \frac{du(L-)}{dx} = v_L. \quad (2.22)$$

Jsou-li na okrajích zadány hodnoty stavové funkce  $u_0, u_L$ , určujeme příslušné toky obvykle **podmínkami přechodu** (přestupu)

$$v_0 = \alpha_0 (u(0+) - u_0), \quad (2.23)$$

$$v_L = \alpha_L (u(L-) - u_L), \quad (2.24)$$

kde  $\alpha_0, \alpha_L \in \mathbb{R}^+$  jsou zadané koeficienty. Dosadíme-li tyto výrazy na pravé strany lokálních bilancí (2.21) a (2.22), dostaneme diferenciální tvar okrajových podmínek pro stavovou funkci:

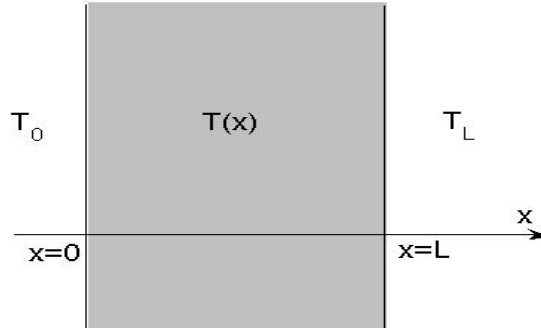
$$-p(0+) \frac{du(0+)}{dx} = \alpha_0 (u(0+) - u_0), \quad (2.25)$$

$$-p(L-) \frac{du(L-)}{dx} = \alpha_L (u(L-) - u_L). \quad (2.26)$$

Protože se jedná o přímý důsledek zákonů zachování, označujeme je jako **přirozené okrajové podmínky**.



**2.3.2 Příklad – prostup tepla stěnou.** Teplotní profil  $T(x)$  v homogenní stěně tloušťky  $L$  je důsledkem okrajových podmínek na každém z jejích povrchů (obr. 2.8). Naším úkolem je zapsat tyto podmínky za předpokladu, že jsou zadány okolní teploty  $T_0$  a  $T_L$  (v kelvinech nebo  $^{\circ}\text{C}$ ) a koeficienty přestupu tepla  $\alpha_0, \alpha_L$  [ $\text{W K}^{-1}\text{m}^{-2}$ ].



Obrázek 2.8: Prostup tepla stěnou.

Materiálovou veličinou je tepelná vodivost  $\lambda$  [ $\text{W K}^{-1}\text{m}^{-1}$ ] – viz tabulku na str. 7, kterou budeme pro homogenní materiál považovat za konstantní, a tedy (ve smyslu dřívějšího označení)

$$p(0+) = p(L-) = \lambda .$$

Přirozené okrajové podmínky pro lokální bilanci na površích stěny budou mít tvar odvozený v předchozím článku:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{dT(0+)}{dx} &= \alpha_0 (T(0+) - T_0) , & \text{neboli} & & -\lambda \frac{dT}{dx} &= \alpha_0 (T - T_0) , & x = 0 , \\ -\lambda \frac{dT(L-)}{dx} &= \alpha_L (T(L-) - T_L) & & & -\lambda \frac{dT}{dx} &= \alpha_L (T - T_L) , & x = L . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Zápis vpravo je přehlednější při konvenci, kdy hodnoty v krajních bodech uvažujeme ve smyslu jednostranných limit.

## 2.4 Formulace okrajových úloh

**2.4.1 Základní úloha.** Na intervalu  $(0, L)$  chceme stanovit stavovou veličinu  $u(x)$  a tokovou veličinu  $v(x)$  za těchto předpokladů:

(a) prostředí je charakterizováno parametrem  $p(x)$ ;

(b)  $u(x)$ ,  $v(x)$  splňují konstituční vztah (2.13), tj.

$$v(x) = -p(x) \frac{du(x)}{dx}, \quad x \in (0, L);$$

(c) toková veličina splňuje bilanční rovnici (2.1):

$$v(x_2) - v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad \forall x_1, x_2 \in (0, L); \quad (2.28)$$

(d) okrajové podmínku uvažujeme ve tvaru (2.25), (2.26);

(e)  $f(x)$ ,  $p(x)$  jsou spojité funkce.

Na základě posledního předpokladu můžeme přejít (viz též (2.16)) k lokální podobě základní okrajové úlohy pro stavovou funkci  $u(x)$ :

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x) \quad \forall x \in (0, L), \quad (2.29)$$

$$p(x) \frac{du(x)}{dx} + \alpha_0 u(x) = g_0, \quad x = 0, \quad (2.30)$$

$$p(x) \frac{du(x)}{dx} + \alpha_L u(x) = g_L, \quad x = L, \quad (2.31)$$

kde  $g_0 = \alpha_0 u_0$ ,  $g_L = \alpha_L u_L$ . Získaná formulace se nazývá **Newtonova okrajová úloha** nebo též úloha s okrajovými podmínkami III. druhu.

**2.4.2 Neumannova okrajová úloha** (= okrajová úloha s podmínkami II. druhu) pro rovnici (2.29) plyne z Newtonovy úlohy pro  $\alpha_0 = \alpha_L = 0$  (rovnice zůstává nezměněna):

$$p(x) \frac{du(x)}{dx} = h_0, \quad x = 0, \quad (2.32)$$

$$p(x) \frac{du(x)}{dx} = h_L, \quad x = L, \quad (2.33)$$

kde  $h_0$ ,  $h_L$  jsou zadané hodnoty derivace stavové funkce v krajních bodech. Ve speciálním případě může být  $h_0 = h_L = 0$  a hovoříme o úloze s **homogenními okrajovými podmínkami**:

$$p(x) \frac{du(x)}{dx} = 0, \quad x = 0, \quad (2.34)$$

$$p(x) \frac{du(x)}{dx} = 0, \quad x = L. \quad (2.35)$$

**2.4.3 Dirichletova okrajová úloha** (= okrajová úloha s podmínkami I. druhu) pro rovnici (2.29) je formulována tak, že na okrajích jsou předepsány přímo hodnoty stavové funkce  $u_0, u_L$ :

$$u(x) = u_0, \quad x = 0, \quad (2.36)$$

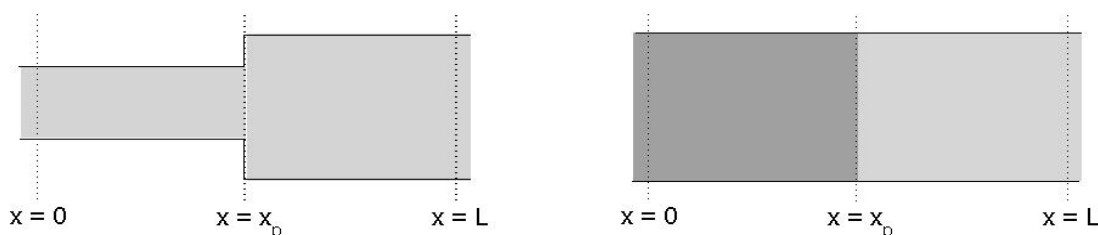
$$u(x) = u_L, \quad x = L. \quad (2.37)$$

Tyto podmínky bychom sice formálně obdrželi z Newtonovy úlohy pro  $p(x) = 0$ , ale nejednalo by se o důsledek žádného z bilančních vztahů. Proto tyto podmínky někdy označujeme jako „nepřirozené“, nicméně jsou běžné v reálných situacích. Opět můžeme zadat i homogenní okrajové podmínky tohoto typu, bude-li  $u_0 = u_L = 0$ .

**2.4.4 Okrajové úlohy s nespojitostí v datech.** Nyní „změkčíme“ požadavky na konstituční parametry  $p(x), q(x)$  a připustíme jejich nespojitost, avšak pouze 1. druhu. Funkce tedy budou mít všude vlastní alespoň jednostranné limity a budou tudíž integrovatelné.

Podívejme se na obr. 2.9 na dva typické příklady nespojitosti funkce  $p(x)$  v bodě  $x_p \in (0, L)$ :

- *geometrická nespojitost*, jakou je například skoková změna průřezu v úloze o proudění tekutiny,
- *materiálová nespojitost*, s níž se můžeme setkat v případě střídání dvou různých materiálů při vedení tepla.



Obrázek 2.9: Geometrická (vlevo) a materiálová nespojitost.

V obou případech bilanční zákon v bodě  $x_p$  platí (při integrovatelné hustotě zdrojů  $f(x)$ ), ale pouze ve formě spojitosti toku (2.11), tj.  $v(x_p-) = v(x_p+)$ , resp. (2.14):

$$p(x_p-) \frac{du(x_p-)}{dx} = p(x_p+) \frac{du(x_p+)}{dx}. \quad (2.38)$$

Tato rovnost se nazývá **podmínka přechodu** nebo také okrajová podmínka IV. druhu, modelujeme-li úlohu s „pomocnou“ hranicí  $x = x_p$ . Je nutno si uvědomit, že i když předpokládáme spojitost stavové funkce,  $u(x_p-) = u(x_p+)$ , nezaručuje podmínka (2.38) spojitost její derivace  $u'(x)$  v bodě  $x_p$ . Musíme totiž akceptovat nespojitost parametru  $p(x)$ , vzhledem k níž

$$p(x_p-) \neq p(x_p+) \quad \Rightarrow \quad u'(x_p-) \neq u'(x_p+).$$

Závěrem si ukažme jednu z četných variant **obecného typu jednodimenzionální okrajové úlohy** s přechodovou podmínkou:

$$-(p(x)u')' = f(x), \quad x \in (0, L), \quad x \neq x_p, \quad (2.39)$$

$$u(0) = u_0, \quad x = 0, \quad (2.40)$$

$$p(L)u'(L) = g_L, \quad x = L, \quad (2.41)$$

$$p(x_p-)u'(x_p-) = p(x_p+)u'(x_p+), \quad x = x_p. \quad (2.42)$$

Pro připomenutí si zrekapitulujeme jednotlivé komponenty této úlohy:

(2.39) ... diferenciální rovnice (lokální bilance pro stavovou funkci),

(2.40) ... Dirichletova podmínka v bodě  $x_0$ ,

(2.41) ... Neumannova podmínka v bodě  $x_L$ ,

(2.42) ... přechodová podmínka v bodě  $x_p$ .

Jak je patrné, okrajové podmínky jsou různého typu, a proto v takových případech používáme označení **smíšená okrajová úloha**.

**2.4.5 Korektnost úlohy (modelu).** Korektní (korektně formulovaná) úloha musí splňovat tři základní podmínky:

1. má řešení (**existence**),
2. řešení je jediné (**jednoznačnost**),
3. řešení je dobře podmíněné (**stabilita** – řešení spojitě závisí na datech).

V obecnosti nemusí být vůbec snadné prověřit splnění těchto podmínek ještě před vlastním řešením úlohy, neboť to vyžaduje důkladnou teoretickou analýzu. V řadě případů však tyto vlastnosti vyplynou v průběhu řešení. Někdy se jako podmínka řešitelnosti používá používá tzv. **kompatibilita úlohy**, což je rozšíření platnosti zobecněné bilance tokové veličiny na celý interval  $(0, L)$ . Proveďte se limitním přechodem pro  $x_1 \rightarrow 0+$ ,  $x_2 \rightarrow L-$  v rovnici (2.1):

$$v(x_2) - v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad \longrightarrow \quad v(L-) - v(0+) = \int_0^L f(x) dx \quad (2.43)$$

(slovy: „celkový výtok je roven celkové produkci zdrojů“).

Obecně nekorektní jsou úlohy s Neumannovými okrajovými podmínkami (2.32), (2.33). Nezachovávají totiž podmínku kompatibility – řešení existuje jen při vhodné konstelaci dat  $f(x)$ ,  $g_0$ ,  $g_L$  a navíc není jednoznačné.

#### 2.4.6 Příklad – prostup tepla stěnou při Newtonových okrajových podmínkách.

Jako ukázkou konkrétní formulace a řešení okrajové úlohy budeme analyzovat model teplotního pole ve stěně v příkladu 2.3.2, a to za těchto předpokladů (viz obr. 2.8):

- uvnitř stěny se nenacházejí žádné zdroje tepla  $\rightarrow f(x) = 0$ ,
- tepelná výměna s okolím probíhá na obou površích stejně  $\rightarrow \alpha_0 = \alpha_L = \alpha$ ,
- teplota na levém povrchu je větší než na pravém  $\rightarrow T_0 > T_L$ .

Naším cílem je nalézt obecné řešení, posoudit korektnost úlohy a aplikovat výsledek na konkrétní data:  $L = 0,5$  m,  $T_0 = 50^\circ\text{C}$ ,  $T_L = 20^\circ\text{C}$ ,  $\lambda = 1$  WK $^{-1}$ m $^{-1}$  (cihlové zdivo),  $\alpha = 2$  WK $^{-1}$ m $^{-2}$ .

Vzhledem k učiněným předpokladům nabývá rovnice (2.39) pro stavovou funkci  $T(x)$  jednoduchého tvaru

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0, \quad x \in (0, L)$$

a okrajové podmínky Newtonova typu (2.30) a (2.31) zapíšeme takto:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{dT}{dx} &= \alpha(T_0 - T), & x = 0, \\ -\lambda \frac{dT}{dx} &= \alpha(T - T_L), & x = L. \end{aligned}$$

Protože je  $T_0 \geq T(x) \geq T_L$  (teplota je klesající funkce proměnné  $x$ , tj. má zápornou derivaci), musíme v první podmínce psát  $T_0 - T > 0$ .

Dvojitou integrací rovnice bez obtíží získáme funkci

$$T(x) = C_1x + C_2,$$

kteřou dosadíme do okrajových podmínek, abychom získali konstanty  $C_1$ ,  $C_2$ :

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \dots \quad -\lambda C_1 &= \alpha(T_0 - C_2), \\ x = L \quad \dots \quad -\lambda C_1 &= \alpha(C_1L + C_2 - T_L). \end{aligned}$$

Výpočtem obdržíme

$$C_1 = -\frac{\alpha}{\alpha L + 2\lambda}(T_0 - T_L), \quad C_2 = T_0 - \frac{\lambda}{\alpha L + 2\lambda}(T_0 - T_L),$$

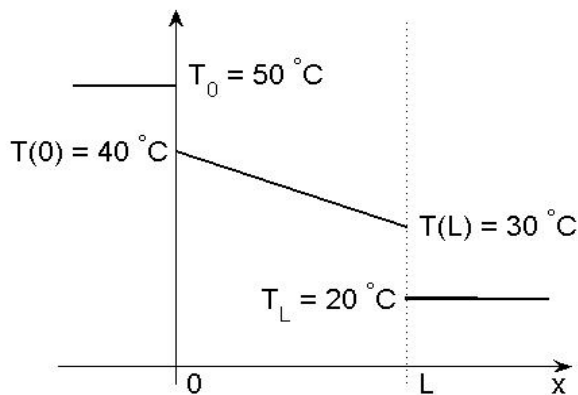
takže hledané řešení je

$$T(x) = T_0 - \frac{\alpha x + \lambda}{\alpha L + 2\lambda}(T_0 - T_L).$$

Snadno se lze přesvědčit, že tato funkce splňuje rovnici i okrajové podmínky.

Jedná se o lineární funkci proměnné  $x$ , která je spojitá na celém intervalu  $\langle 0, L \rangle$ . Tato aposteriorní analýza dokládá, že existující řešení je jednoznačné a dobře podmíněné.

Dosazením konkrétních dat získáme rovnici přímky  $T(x) = 40 - 20x$ ,  $x \in (0, 0,5)$  a následným výpočtem také teploty na stěnách:  $T(0) = 40^\circ\text{C}$ ,  $T(L) = 30^\circ\text{C}$ . Na obr. 2.10 je znázorněn celkový teplotní průběh, který mimo jiné ilustruje skutečnost, že Newtonovy okrajové podmínky nezajišťují spojitost řešení na hranici.

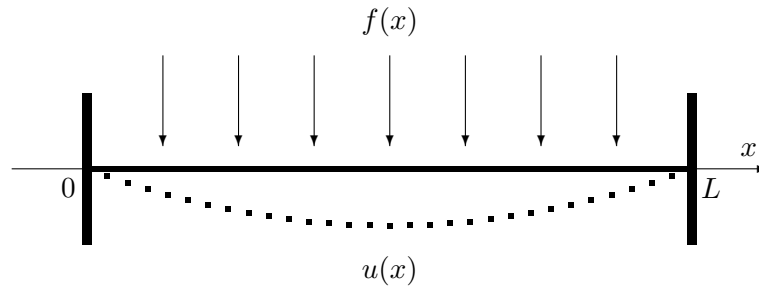


Obrázek 2.10: Teplotní průběh při prostupu stěnou.

**2.4.7 Příklad – okrajové úlohy při deformaci pružného vlákna.** Vlákno napjaté silou  $T$  a upevněné v bodech  $x = 0$  a  $x = L$  je zatíženo silou o hustotě  $f(x)$  – obr. 2.11. Jeho průhyb  $u(x)$  lze určit řešením rovnice (2.17):

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = q(x), \quad q(x) = \frac{f(x)}{T}, \quad x \in (0, L).$$

Budeme formulovat a řešit některé typické úlohy ilustrující poznatky z předchozích článků, a



Obrázek 2.11: Průhyb vlákna.

to za těchto podmínek:

- vlákno z homogenního materiálu je dlouhé a tenké, tj. výrazně dominuje délka nad průřezem (lze modelovat jako jednodimenzionální úlohu),
- uvažujeme pouze příčné namáhání,
- předpokládáme ideální pružnost a malé ohyby.

Nyní provedeme analýzu úlohy se zřetelem k charakteru pravé strany a k okrajovým podmínkám. Je na místě zdůraznit, že model je jistým způsobem idealizovaný, nelze jej například uplatnit pro úlohy na ohyb (homogenního) nosníku.

**A.** Spojitá a ohraničená funkce  $f(x)$ ,  $x \in (0, L)$ .

**A1.**  $f(x) = \text{konst.}$

Rovnice  $u''(x) = q$  ( $= \text{konst.}$ ) má obecné řešení

$$u(x) = \frac{1}{2}qx^2 + C_1x + C_2, \quad (2.44)$$

na které budeme postupně aplikovat několik typů okrajových podmínek.

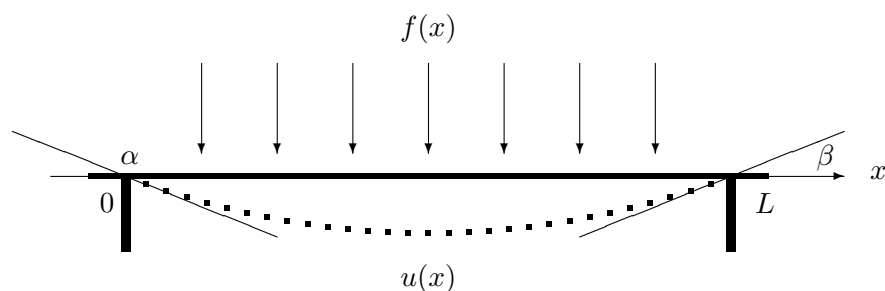
**A1a.** Dirichletova úloha odpovídá pevným koncům, tj. homogenním podmínkám

$$u(0) = u(L) = 0.$$

Hodnoty konstant jsou  $C_1 = -\frac{1}{2}qL$ ,  $C_2 = 0$ , řešením je parabola

$$u(x) = \frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qLx = \frac{1}{2}qx(x - L). \quad (2.45)$$

Graficky jsou zadání i výsledek znázorněny na obr. 2.11, řešení je jednoznačné, jedná se o korektní problém.



Obrázek 2.12: Průhyb vlákna s volnými konci.

**A1b.** Neumannova okrajová úloha znamená, že na koncích jsou předepsány derivace funkce  $u(x)$ , tj. směrnice tečen („volné konce“) – obr. 2.12. Okrajové podmínky zapíšeme takto:

$$u'(0) = k_0, \quad (k_0 = \operatorname{tg} \alpha),$$

$$u'(L) = k_L, \quad (k_L = \operatorname{tg} \beta).$$

Derivace obecného řešení (2.44)  $u' = qx + C_1$  vede v krajních bodech k těmto vztahům:

$$x = 0 \quad \dots \quad k_0 = C_1,$$

$$x = L \quad \dots \quad k_L = qL + C_1.$$

Je zřejmé, že konstanta  $C_2$  může být libovolná, a proto má úloha nekonečně mnoho řešení, která však existují pouze pro  $k_0 = k_L - qL$  ve tvaru

$$u(x) = \frac{1}{2}qx^2 + k_0x + C_2.$$

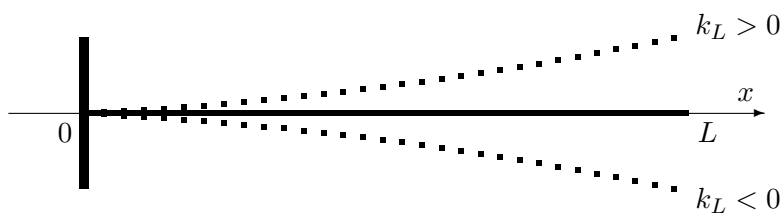
To ovšem znamená, že úhly v koncových bodech jsou vyvolány zadanou silou a nelze je předepsat okrajovými podmínkami. Proto je zadání s Neumannovými podmínkami nekorektní.

**A1c.** Smíšená okrajová úloha může mít řadu podob, jednou z nich je ohyb jednostranně fixovaného tenkého prutu – obr. 2.13. V tomto případě mají okrajové podmínky tvar

$$u(0) = 0 \quad \dots \quad \text{na pevném konci,}$$

$$u'(L) = k_L \quad \dots \quad \text{na volném konci.}$$

Znaménko derivace odpovídá směru deformace – viz obrázek. Pro obecné řešení (2.44)



Obrázek 2.13: Ohyb pružného vlákna.

známým způsobem vypočteme konstanty:  $C_1 = k_L - qL$  a  $C_2 = 0$ . Úloha je tentokrát korektní a dává jednoznačné řešení

$$u(x) = \frac{1}{2}qx^2 + (k_L - qL)x.$$

**A2.** Nechť je hustota síly předepsána spojitou funkcí  $f(x) \neq \text{konst.}$  Pro jednoduchost budeme předpokládat například

$$f(x) = f \sin \frac{\pi x}{L} \quad \Rightarrow \quad q(x) = \frac{f}{T} \sin \frac{\pi x}{L} = q \sin \frac{\pi x}{L}$$

a homogenní Dirichletovy podmínky (jako v případě A1a). Obecné řešení rovnice je

$$u(x) = -\frac{L^2 q}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} + C_1 x + C_2,$$

aplikace okrajových podmínek dává  $C_1 = C_2 = 0$ . To znamená, že výsledný průhyb koresponduje s tvarem zatěžovací síly:

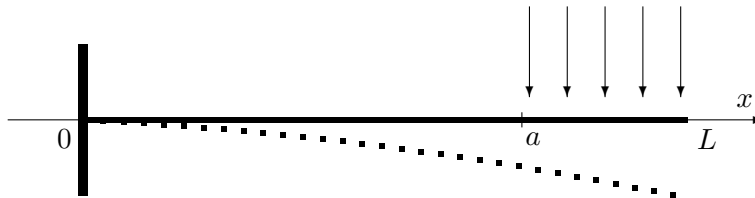
$$u(x) = -\frac{L^2 q}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L}.$$

I nyní se jedná o korektně formulovanou úlohu s jednoznačným hladkým řešením.

**B.** Nespojité (omezená) pravá strana

**B1.** Funkce  $f(x)$  je po částech spojitá (speciálně: po částech konstantní).

Budeme uvažovat stejnou okrajovou úlohu jako v případě A1c, avšak konstantní zatížení  $q = f/T$  bude působit pouze na části vlákna, konkrétně na úseku  $\langle a, L \rangle$ ,  $0 < a < L$  (obr. 2.14). Jednou z cest, jak přistoupit k modelování takovéto úlohy, je uvažovat dílčí řešení



Obrázek 2.14: K úloze B1.

na každém z úseků vlákna:

$$q(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0, a \rangle, \\ q, & x \in \langle a, L \rangle, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \langle 0, a \rangle, \\ u_2(x), & x \in \langle a, L \rangle. \end{cases}$$

Parciální řešení jsou svázána v bodě  $x = a$  přechodovými podmínkami, které vyplývají z principu spojitosti toku (jinak řečeno: vlákno zůstává při deformaci neporušené). Zároveň je podle předpokladu spojitá (konstantní) toková funkce  $T$ . Na základě závěrů článku 2.4.4 dostáváme podmínky přechodu

$$u_1(a) = u_2(a), \quad u_1'(a) = u_2'(a),$$



kterými doplníme okrajové úlohy

$$\begin{aligned} u_1'' &= 0, & x \in (0, a), & & u_2'' &= q, & x \in (a, L), \\ u_1(0) &= 0, & & & u_2'(L) &= k_L. \end{aligned}$$

Čtyři konstanty v jejich obecných řešeních

$$u_1(x) = C_1x + C_2, \quad u_2(x) = \frac{1}{2}qx^2 + D_1x + D_2$$

získáme aplikací výše uvedených podmínek v krajních bodech a v bodě přechodu  $a$ . Výsledné řešení má tvar

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) = (k_L - qL + aq)x, & x \in (0, a), \\ u_2(x) = \frac{1}{2}qx^2 + (k_L - qL)x + \frac{1}{2}qa^2, & x \in (a, L). \end{cases}$$

Snadno se lze přesvědčit, že tato funkce vyhovuje jak diferenciálním rovnicím, tak okrajovým podmínkám.

- B2.** Specifická situace nastává, působí-li zatížení  $f(x)$  pouze v jediném bodě  $x_0 \in (0, L)$ . Modelování této – z fyzikálního hlediska rozumné – úlohy po matematické stránce naráží na otázku, v jaké množině funkcí máme očekávat řešení, když pravá strana vlastně funkcí v klasickém slova smyslu není. Lze ji zapsat například jako distribuci za použití Diracova impulsu  $q(x) = q\delta(x - x_0)$  a při výpočtu pak využít následující vlastnosti<sup>3</sup>:

$$\int \delta(x - x_0) dx = h(x) = \begin{cases} C_1, & x < x_0, \\ C_2, & x > x_0, \end{cases} \quad \int h(x) dx = \begin{cases} C_1x + C_3, & x < x_0, \\ C_2x + C_4, & x > x_0. \end{cases}$$

Sestavíme-li modelovou úlohu analogicky jako v příkladu B1, nemůžeme v podmínkách přechodu v bodě  $x_0$  předpokládat spojitost derivace stavové funkce, neboť je nyní  $u_1'(x_0) \neq u_2'(x_0)$ . Jako čtvrtou podmínku, která už nemá lokální charakter, ale je formulována globálně na intervalu  $\langle 0, L \rangle$ , musíme aplikovat rovnováhu momentů

$$\frac{T}{L} \int_0^L u(x) dx = \int_0^L f(x) \delta(x - x_0) dx,$$

kde pravá strana je rovna  $f(x_0)$  pro libovolný bod vlákna.

---

<sup>3</sup>Je nutno zdůraznit, že tyto vztahy nejsou přísně exaktní, nýbrž mají pouze formální charakter. Jejich použití v uvedeném kontextu však vede k požadovaným výsledkům.

## 2.5 Úlohy

**2.5.1** Formulujte a řešte smíšenou okrajovou úlohu pro jednorozměrný ohřev zdi. Na vnější straně je zadána konstantní teplota  $T_0 = 32^\circ\text{C}$ , na vnitřním povrchu dochází k přestupu tepla s koeficientem přestupu tepla  $\alpha$  do prostředí o teplotě  $T_L = 18^\circ\text{C}$ . Řešte za stejných předpokladů jako v příkladu 2.4.6 s hodnotami  $L = 0,3\text{ m}$ ,  $\lambda = 0,2\text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 4\text{ WK}^{-1}\text{m}^{-2}$ . Určete teplotu vnitřní stěny, výsledný teplotní profil znázorněte graficky.

**2.5.2** Řešte zadání 2.4.7A1a, je-li vlákno napjaté silou  $T$  zatíženo na svém vnitřním úseku  $\langle x_0 - a, x_0 + a \rangle$  silou o konstantní hustotě  $f$ . Sestavte s využitím přechodových podmínek příslušnou okrajovou úlohu. Vypočtěte průhyb vlákna v bodě  $x_0$  pro následující data:

- $L = 3\text{ m}$ ,  $x_0 = L/3$ ,  $a = L/6$ ,
- $f = 12\text{ Nm}^{-1}$ ,  $T = 325\text{ N}$ .

**2.5.3** Oboustranně upevněné vlákno délky  $L$  je napjato silou  $T = 60\text{ N}$  a namáháno zátěží o velikosti  $f = 10\text{ Nm}^{-1}$  v bodě  $x_0$ , který dělí jeho délku v poměru 1:2. S využitím poznatků z úlohy 2.4.7 formulujte a řešte okrajovou úlohu, jejímž cílem je stanovit tvar výsledného průhybu vlákna a jeho maximální hodnotu.

## Kapitola 3

# Jednorozměrné nestacionární úlohy

### 3.1 Výchozí vztahy

**3.1.1 Globální bilance.** Na intervalu  $\langle 0, L \rangle$  uvažujeme opět hustotu zdrojů  $f$ , tokovou funkci  $v$  a stavovou funkci  $w$ , které však závisejí kromě prostorové proměnné  $x$  také na čase  $t \in \langle 0, \infty \rangle$ :

$$f = f(x, t), \quad v = v(x, t), \quad w = w(x, t) .$$

**Celková produkce zdrojů** na elementu  $\langle x_1, x_2 \rangle \subset (0, L)$  a pro  $\langle t_1, t_2 \rangle \subset (0, \infty)$ :

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(x, t) dt dx . \quad (3.1)$$

**Tok bodem**  $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$  v časovém intervalu  $\langle t_1, t_2 \rangle$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} v(x, t) dt .$$

**Změna tokové bilance jako odezva na časovou změnu stavové funkce:**

$$\int_{x_1}^{x_2} [w(x, t_2) - w(x, t_1)] dx .$$

**Globální bilance** pro prostorově-časovou oblast  $\langle x_1, x_2 \rangle \times \langle t_1, t_2 \rangle$ :

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} v(x_2, t) dt}_{(a)} - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} v(x_1, t) dt}_{(b)} = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(x, t) dt dx}_{(c)} - \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} [w(x, t_2) - w(x, t_1)] dx}_{(d)} . \quad (3.2)$$

Význam jednotlivých členů bilanční rovnice je následující:

- (a) tok v bodě  $x_2$ ,
- (b) tok v bodě  $x_1$ ,
- (c) produkce zdrojů v úseku  $\langle x_1, x_2 \rangle$ ,
- (d) charakter tohoto výrazu se liší podle typu modelovaného děje; u relaxačních a přenosových bilancí jde o disipaci energie (změna na jiný druh energie vlivem tření, viskozity, absorpce apod.), u pohybových rovnic má podobu setrvačného členu, případně se nemusí v úloze vyskytovat vůbec.

**3.1.2 Lokální bilance ve vnitřním bodě.** Pro libovolný bod  $[x, t] \in (x_1, x_2) \times (t_1, t_2)$  předpokládáme možnost limitních přechodů

$$x_1 \rightarrow x-, \quad x_2 \rightarrow x+, \quad t_1, t_2 \rightarrow t.$$

Budeme-li postupně zvyšovat nároky na funkce vystupující v globální bilanci (3.2), obdržíme limitními přechody různé bilanční rovnice.

(A) Jsou-li funkce  $f(x, t)$ ,  $w(x, t)$  pouze integrovatelné, přejde (3.2) v pouhou spojitost toků:

$$v(x-, t) = v(x+, t). \quad (3.3)$$

(B) Jsou-li funkce  $f(x, t)$ ,  $w(x, t)$  spojité v proměnné  $t$  a současně  $w(x, t)$  je diferencovatelná v této proměnné, pak v limitě vzhledem k  $t$  dostáváme

$$v(x_2, t) - v(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} dx. \quad (3.4)$$

(C) Jsou-li navíc k předchozím předpokladům funkce  $f(x, t)$ ,  $w(x, t)$  spojité i v proměnné  $x$ , bude výsledkem lokální bilanční rovnice

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = f(x, t) - \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Lze dokázat, že diferencovatelnost funkce  $v(x, t)$  podle  $x$  plyne z uvedených předpokladů.

(D) Uvažujme již dříve zavedený lokální konstituční vztah mezi tokovou a stavovou veličinou, modifikovaný pro závislost na čase,

$$v(x, t) = -p(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Jeho aplikací v předchozí rovnici obdržíme lokální diferenciální zákon zachování pro stavovou veličinu:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = f(x, t) - \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Jedná se o parciální diferenciální rovnici druhého řádu v závislosti na struktuře funkce  $w(x, t)$ .

**3.1.3 Okrajové podmínky.** Nebudeme již bilancovat vnitřní přechodové podmínky jako v případě stacionárních úloh, nýbrž zaměříme se přímo na generování okrajových podmínek na základě bilance v koncových bodech  $x = 0$  a  $x = L$  uvažovaného intervalu. Budeme uvažovat opět situaci znázorněnou na obr. 2.7. Již předem můžeme konstatovat, že bilanční vztahy budou mít stejnou podobu jako v kapitole 2.3 s tím rozdílem, že klíčové veličiny jsou (spojitými) funkcemi času, jejichž hodnoty v krajních jsou brány ve smyslu jednostranných limit.

(A) Jsou-li na koncích jsou **zadány toky**  $v_0(t)$ ,  $v_L(t)$ , můžeme od bilancí tokové veličiny

$$v(0, t) = v_0(t), \quad v(L, t) = v_L(t) \quad (3.8)$$

přejít pomocí konstitučního vztahu (3.6) k bilancím stavové veličiny  $u(x, t)$ :

$$p(0) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = v_0(t), \quad p(L) \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = v_L(t). \quad (3.9)$$

(B) Jestliže jsou na koncích **zadány podmínky přestupu** s koeficienty  $\alpha_0, \alpha_L$  a známými funkcemi  $u_0(t), u_L(t)$ , obdržíme bilanci toků ve tvaru

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \alpha_0[u(0, t) - u_0(t)] , \\ v_L(t) &= \alpha_L[u(L, t) - u_L(t)] . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Lokální bilance stavové veličiny vznikne opět aplikací konstituční rovnice:

$$\begin{aligned} p(0) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \alpha_0[u(0, t) - u_0(t)] , \\ p(L) \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} &= \alpha_L[u(L, t) - u_L(t)] . \end{aligned} \quad (3.11)$$

(C) V případě, že na okrajích máme **zadány hodnoty stavové funkce**, zapisujeme podmínky přímo pro ni:

$$u(0, t) = u_0(t), \quad u(L, t) = u_L(t) . \quad (3.12)$$

Shrnutím předchozích výsledků docházíme ke zjištění, že jsme formulovali základní případy nestacionárních hraničních podmínek, konkrétně

- Neumannovy podmínky (3.9),
- Newtonovy podmínky (3.11),
- Dirichletovy podmínky (3.12).

**Poznámka.** Nelze-li v některém z hraničních bodů (například  $x = L$ ) okrajové podmínky předepsat, je možno uvažovat a předepsat (není-li to v rozporu z fyzikální realitou)

$$u(x, t) \longrightarrow u_0(t) \quad \text{pro} \quad x \longrightarrow \infty .$$

Často stačí pouze předpokládat ohraničenost řešení pro  $x \rightarrow \infty$  – viz například úlohu 3.4.3.

**3.1.4 Počáteční podmínky.** Zkoumáme-li časový vývoj stavové funkce  $u(x, t)$  pro  $t > 0$ , potřebujeme znát stav na počátku děje

$$u(x, 0) = \varphi(x) .$$

Charakter počátečních podmínek může být i poněkud obecnější, je-li navíc požadována hodnota derivace podle času (například počáteční rychlost v pohybových úlohách):

$$u(x, 0) = \varphi(x) , \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad \dots . \quad (3.13)$$

Tyto podmínky mohou mít i odlišný význam, nejde-li o závislost na čase. Hledáme-li kupříkladu řešení procházející zadaným bodem nebo zadanou křivkou, jedná se v principu o obdobný problém, obvykle pak hovoříme o tzv. Cauchyho úloze.

**3.1.5 Formulace 1D nestacionárních úloh.** Úplná formulace okrajové nestacionární úlohy pak sestává z rovnice (3.7), počátečních podmínek (3.13) a okrajových podmínek některého z typů (3.9), (3.11), (3.12), případně smíšených.

## 3.2 Modelové 1D nestacionární úlohy

**3.2.1 Vedení tepla v tyči.** Pro jednorozměrné nestacionární pole teploty  $T(x, t)$  (stavová funkce) a tepelný tok  $q(x, t)$  (toková funkce) zapíšeme globální bilanci na oblasti  $\langle x_1, x_2 \rangle \times \langle t_1, t_2 \rangle$  pro úlohu bez vnitřních zdrojů ( $f = 0$ ):

$$\int_{t_1}^{t_2} q(x_1, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} q(x_2, t) dt + \int_{x_1}^{x_2} c\rho(x) [T(x, t_2) - T(x, t_1)] dx, \quad (3.14)$$

kde  $c$  [ $\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ] je měrné teplo a  $\rho$  [ $\text{kg m}^{-3}$ ] je hustota (na jednotku délky). Disipační funkce  $w(x, t) = c\rho(x)T(x, t)$  na pravé straně vyjadřuje akumulaci tepla v daném materiálu podle vztahu  $\Delta Q = c\rho\Delta T$ . Je-li  $\lambda$  tepelná vodivost tyče, pak příslušná konstituční relace má známý tvar

$$q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}.$$

Po dosažení do lokální bilanční rovnice (3.7) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) = c\rho(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Předpokládáme-li homogenní materiálové prostředí, přechází tento vztah do známé Fourierovy rovnice vedení tepla,

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.16)$$

kde  $a = \lambda/(c\rho)$  je tzv. teplotní vodivost.

Podle klasifikace podané v kapitole 6.2 se jedná o parabolickou parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Následující tři modelové příklady ilustrují formulaci okrajových úloh s touto rovnicí.

**3.2.2 Kmity struny.** Budeme se nyní zabývat odvozením nestacionární okrajové úlohy popisující kmity pružného vlákna (struny). Zobecníme-li lokální tvar stacionární stavové rovnice odvozené v článku 2.2.4 pro okamžitou výchylku  $u(x, t)$  při napínající síle  $T(x)$  a hustotě vnějších sil  $f(x, t)$  při kladně orientované souřadném systému (srv. diferenciální rovnici (D) v kapitole 3.1.2):

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( T(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = f(x, t) - \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3.17)$$

Budeme-li uvažovat netlumené kmity vyvolané pouze počátečními podmínkami bez vlivu vnějších sil, bude třeba pro adekvátní popis časově proměnné výchylky nejen uvažovat závislost na další proměnné  $t$ , ale musíme do globální bilance (3.2) doplnit setrvačný člen. Ten je generován hybností

$$w(x, t) = \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t},$$

tudíž při veličinách spojitých v čase bude mít pro element  $\langle x_1, x_2 \rangle$  o hustotě  $\rho(x)$  tvar

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) a(x, t) dx, \quad a(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Zde  $a(x, t)$  je zrychlení, takže výsledek odpovídá druhému Newtonovu zákonu  $F = ma$ . Výsledná pohybová rovnice netlumených kmitů struny pak v lokální formulaci nabývá podoby

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (3.18)$$

Je-li síla  $T$  konstantní, získáváme klasickou „vlnovou“ rovnici

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (3.19)$$

kde parametr  $c$  zpravidla označujeme jako tuhost struny. Jak známo (viz kap. 6), jde o hyperbolickou parciální diferenciální rovnici druhého řádu.

Okrajové podmínky Dirichletova typu vyjadřují upevnění struny v koncových bodech 0 a  $L$ :

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.20)$$

Počáteční podmínky musí být dvě vzhledem k parciální derivaci druhého řádu podle času. První z nich charakterizuje počáteční výchylku,

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, L), \quad (3.21)$$

druhá popisuje počáteční rychlost, jde tudíž o první derivaci výchylky podle času,

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in (0, L). \quad (3.22)$$

Vlnová rovnice (3.19) s hraničními podmínkami (3.20) a počátečními podmínkami (3.21) a (3.22) tvoří úplnou formulaci nestacionární úlohy pro netlumené kmity struny. Její řešení lze v konkrétním případě provést Fourierovou metodou separace.

**3.2.3 Volná konvekce.** Předpokládejme velmi dlouhý vodní tok, v němž lze proudění považovat za jednorozměrné o rychlosti  $v = v(x, t)$ . Ve vodě je v určitém okamžiku  $t = 0$  koncentrace znečištění popsána spojitou funkcí  $c = c(x, 0) = c_0(x)$ . V důsledku proudění dochází k přenosu kontaminantu – tzv. volnou konvekci. Ve sledovaném úseku se navíc mohou vyskytovat další lokální zdroje znečištění o hustotě  $q(x, t)$ . Naším úkolem je sestavit bilanční rovnici pro stanovení míry znečištění  $c = c(x, t)$  v libovolném čase a místě.

Zapišeme nejprve globální bilanci koncentrace polutantu pro časový interval  $\langle t_1, t_2 \rangle$  na úseku  $\langle x_1, x_2 \rangle$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} [c(x_2, t)v(x_2, t) - c(x_1, t)v(x_1, t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx dt - \int_{x_1}^{x_2} [c(x, t_2) - c(x, t_1)] dx. \quad (3.23)$$

Levá strana vyjadřuje celkovou změnu tokové funkce  $c.v$ , pravou stranu jako celek lze považovat za produkční člen, v němž je  $w(x, t) = c(x, t)$ . Vidíme zde přímou analogii s obecnou globální bilancí (3.2). Jelikož koncentrace i rychlost proudění jsou v čase spojitě, vydělíme obě strany přírůstkem  $\Delta t$  a provedeme limitní přechod pro  $\Delta t \rightarrow 0$  s tímto výsledkem:

$$c(x_2, t)v(x_2, t) - c(x_1, t)v(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial c}{\partial t} dx. \quad (3.24)$$

Nyní tento postup zopakujeme v proměnné  $x$ ; výsledkem bude tentokrát parciální diferenciální rovnice prvního řádu

$$\frac{\partial}{\partial x} (c.v) + \frac{\partial c}{\partial t} = q(x, t) \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial c}{\partial x} v + c \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = q(x, t). \quad (3.25)$$

### 3.3 Konvekce – řešení úloh metodou charakteristik

Modely konvekce vedou obvykle na parciální diferenciální rovnice prvního řádu, jak bylo ukázáno v článku 3.2.3. Pro analytické řešení tohoto typu úloh je možno použít tzv. metodu charakteristik, jejíž princip je podrobněji objasněn v kapitole 6.1.

**3.3.1 Volná konvekce – modelové příklady.** Řešte rovnici (3.25) bez vnitřních zdrojů ( $q = 0$ ) a počáteční stav

$$c_0(x) = \frac{c_{max}}{\cosh kx}, \quad k > 0.$$

(a) Pro konstantní rychlost proudění  $v = v_0 = konst.$

(b) Při časově závislé rychlosti

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \alpha^2 t^2}.$$

(c) Pro rychlost závislejší na prostorové souřadnici  $x$  podle vztahu

$$v(x) = v_0 e^{-kx}.$$

Ve všech případech lze použít metodu charakteristik (viz kapitola 6). Lze ukázat, že v prvních dvou úlohách ji lze zredukovat na použití substituce

$$\xi = x - vt, \quad \text{resp.} \quad \xi = x - \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Varianta (b) je diskutována jako příklad v článku 6.1.5, variantu (c) rozebereme podrobněji.

Přepíšeme-li (3.25) do tvaru

$$v(x) \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = -v'(x)c,$$

je zřejmé, že se jedná o kvazilineární rovnici. Ukážeme její řešení metodou charakteristik (viz 6.1.7). Ze systému charakteristických rovnic

$$\frac{dx}{v(x)} = \frac{dt}{1} = -\frac{dc}{v'(x)c}$$

vybereme dvojici, z níž výhodně určíme charakteristiky  $\varphi, \psi$ :

$$\frac{dx}{v(x)} = dt \quad \rightarrow \quad \varphi(x, t, c) = t - \int \frac{dx}{v(x)} = K_1,$$

$$\frac{dx}{v(x)} = -\frac{dc}{v'(x)c} \quad \rightarrow \quad \psi(x, t, c) = v(x)c(x, t) = K_2.$$

Vzhledem k zadání dostáváme konkrétně

$$\varphi = t - \frac{1}{v_0} \int e^{kx} dx = t - \frac{1}{v_0 k} e^{kx},$$

$$\psi = v_0 e^{-kx} \frac{c_{max}}{\cosh kx} = \frac{2v_0 c_{max}}{e^{2kx} + 1}.$$



Parametrizaci počáteční podmínky zavedeme relacemi  $x = \xi$ ,  $t = 0$ ,  $c = c_0(\xi)$ . Po dosazení do rovnic charakteristik vychází

$$e^{k\xi} = -v_0 k K_1, \quad \frac{2v_0 c_{max}}{e^{2k\xi} + 1} = K_2.$$

Po dosazení z prvního vztahu do druhého za  $e^{k\xi}$  získáme formuli

$$K_2 - \frac{2v_0 c_{max}}{v_0^2 k^2 K_1^2 + 1} = 0,$$

do níž dosadíme funkce  $\varphi$ ,  $\psi$  za  $K_1$ ,  $K_2$  a upravíme na konečný tvar:

$$c(x, t) = \frac{2c_{max} e^{kx}}{(v_0 k t - e^{kx})^2 + 1}.$$

Snadno se dosazením přesvědčíme, že funkce vyhovuje zadané úloze včetně počáteční podmínky.

Bez zajímavosti není posouzení výsledku pro konkrétní číselná data. Můžeme si například představit, že emise o koncentraci  $c(x, t)$  jsou unášeny větrem o rychlosti  $v(x)$ , kde  $v_0 = 40$  km/hod, který ustává se vzdáleností od místa vzniku exhalací s parametrem  $k = 0,05$  km<sup>-1</sup>. Určíme nejprve, za jakou dobu se maximum znečištění projeví například ve vzdálenosti  $x_m = 10$  km. Jelikož maximum nastává vždy pro  $v_0 k t - e^{kx} = 0$ , dostáváme

$$t_m = \frac{1}{k v_0} e^{k x_m} = \dots \approx 49,5 \text{ min.}$$

Koncentrace emisí ve zvoleném bodě bude

$$c(x_m, t_m) = c_{max} e^{k x_m} = 1,65 c_{max} > c_{max}.$$

Jak je patrné, v místech s nižší konvektivní rychlostí se maximum koncentrace zvyšuje v porovnání s počátečním stavem a teoreticky by stále narůstalo se vzdáleností od místa vzniku. Jde však o důsledek poněkud zjednodušeného modelu (vítr neváne stále stejně ani neomezeně dlouho).

**3.3.2 Příklad. Kontaminace vody** v okolí místa znečištění ( $x = 0$ ) je popsána koncentrací škodlivin předpisem

$$c_0(x) = \frac{c_m}{1 + (bx)^2},$$

kde  $x \geq 0$  je vzdálenost v metrech a  $b$  [m<sup>-1</sup>] zadaný parametr. Voda proudí ve vodoteči (potoce apod., jehož hydraulické vlastnosti neuvažujeme) rychlostí

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + e^{-at}},$$

přičemž  $a > 0$  je zadaný faktor charakterizující zpomalování toku. Určete, v jaké vzdálenosti od místa vzniku se bude maximum znečištění nacházet za 15 minut. Výpočet proveďte s těmito vstupními daty:  $b = 1$ ,  $a = 10^{-3}$  s<sup>-1</sup>,  $v_0 = 0,1$  ms<sup>-5</sup>.

**3.3.3 Tepelná konvekce.** Vytvořte matematický model konvektivního ochlazování média proudícího dlouhým úzkým potrubím za těchto předpokladů:

- (a) rychlost proudění je konstantní;
- (b) jedná se o adiabatický děj;

- (c) na povrchu potrubí dochází k přestupu tepla do vnějšího prostředí, jehož teplota  $T_0$  je konstantní;
- (d) teplotní změny v proudícím médiu se projeví okamžitě a stejně v celém průřezu (potrubí je úzké); vzhledem k tomu je nutno koeficient přestupu tepla vztáhnout na jednotku objemu, tj.  $[\alpha] = \text{WK}^{-1}\text{m}^{-3}$ ;
- (e) na vstupu do potrubí má médium konstantní teplotu  $T_1 > T_0$ , jeho hustota  $\rho$  a měrné teplo  $c$  jsou konstantní po celé průtočné délce;
- (f) na počátku je teplota v celém potrubí rovna teplotě okolí.

Najděte řešení úlohy (vedle metody charakteristik je vhodná například Laplaceova transformace) a výsledek použijte k výpočtu a grafickému znázornění

- teplotního profilu v potrubí na úseku od počátku do vzdálenosti 250 m v čase  $t_k = 15$  minut,
- časové změny teploty v bodě  $x_p = 200$  m v rozmezí prvních dvaceti minut.

Vstupní data:

$$\alpha = 700 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-3}, c = 4186 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}, \rho = 1000 \text{ kgm}^{-3}, v = 0,2 \text{ ms}^{-1}, T_0 = 5^\circ\text{C}, T_1 = 85^\circ\text{C}.$$

### 3.4 Fourierova metoda separace

U modelů vedoucích na parciální diferenciální rovnice druhého řádu patří ke klasickým postupům řešení Fourierova metoda separace. Její podstata je vysvětlena v kapitole 6.2 s aplikací na tzv. eliptické rovnice. Stejný princip lze aplikovat také na rovnice hyperbolického nebo parabolického typu (viz klasifikaci v článku 6.2.1). Do posledně jmenované skupiny náleží rovnice pro nestacionární vedení tepla, kterými se nyní budeme zabývat.

**3.4.1 Příklad – vedení tepla v tenké tyči konečné délky I.** Máme vyšetřit teplotní pole v homogenní tyči délky  $\ell$ , která je na jednom konci ( $x = 0$ ) udržována na konstantní teplotě  $T_0$  a na druhém je tepelně izolována. Počáteční rozložení teploty je zadáno funkcí  $T_0(1 + \sin \pi x/\ell)$ .

Je zřejmé, že půjde o řešení Fourierovy rovnice (3.16) na oblasti  $\Omega_{x,t} = (0, \ell) \times (0, \infty)$  s počáteční podmínkou

$$T(x, 0) = T_0 \left( 1 + \sin \frac{\pi x}{\ell} \right). \quad (3.26)$$

Zadané hraniční podmínky zapíšeme takto:

$$T(0, t) = T_0, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = \ell. \quad (3.28)$$

Dále je třeba zajistit asymptotickou stabilitu řešení v čase podmínkou

$$T(x, t) < \infty \quad \text{pro } t \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Před vlastním řešením je vhodné zavést označení, která usnadní výpočet:

$$u(x, t) = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad \kappa = \frac{a}{\ell^2}. \quad (3.30)$$

Po příslušných úpravách obdržíme zjednodušenou formulaci jednorozměrné smíšené nestacionární okrajové úlohy pro parabolickou parciální diferenciální rovnici:

$$\kappa u''_{\xi\xi} = u'_t \quad \text{na } (0, 1) \times (0, \infty), \quad (3.31)$$

1.  $u(\xi, 0) = \sin \pi \xi$ ,
2.  $u(0, t) = 0$ ,
3.  $u'_\xi(1, t) = 0$ ,
4.  $u < \infty$ .

Řešení provedeme Fourierovou metodou separace, jejíž princip je vyložen v kapitole 6.2 tohoto textu. Položíme-li  $u(\xi, t) = w(\xi) \cdot v(t)$ , dostáváme po dosazení do rovnice:

$$\frac{w''}{w} = \frac{1}{\kappa} \frac{v'}{v} = -\alpha^2.$$

Záporné znaménko u konstanty plyne z podmínky 4 vyžadující ohraničenost řešení. Úloha se nyní rozštěpí na dvojici obyčejných diferenciálních rovnic

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \rightarrow \quad w(\xi) = A \cos \alpha \xi + B \sin \alpha \xi, \quad (3.32)$$

$$v' = \kappa v \quad \rightarrow \quad v(t) = e^{-\alpha^2 \kappa t}. \quad (3.33)$$

Z podmínky číslo 2 plyne, že  $A = 0$ , podmínka 3 vede k rovnici

$$B \cos \alpha \xi = 0, \quad \text{odkud} \quad \alpha_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Touto cestou získáme reprezentaci hledaného řešení ve tvaru nekonečného rozvoje

$$u(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\xi) \cdot v_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \alpha_n \xi e^{-\alpha_n^2 \kappa t}. \quad (3.35)$$

Zbývá poslední podmínka číslo 1, jejíž aplikací získáme koeficienty  $B_n$  ze vztahu

$$\sin \pi \xi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \alpha_n \xi. \quad (3.36)$$

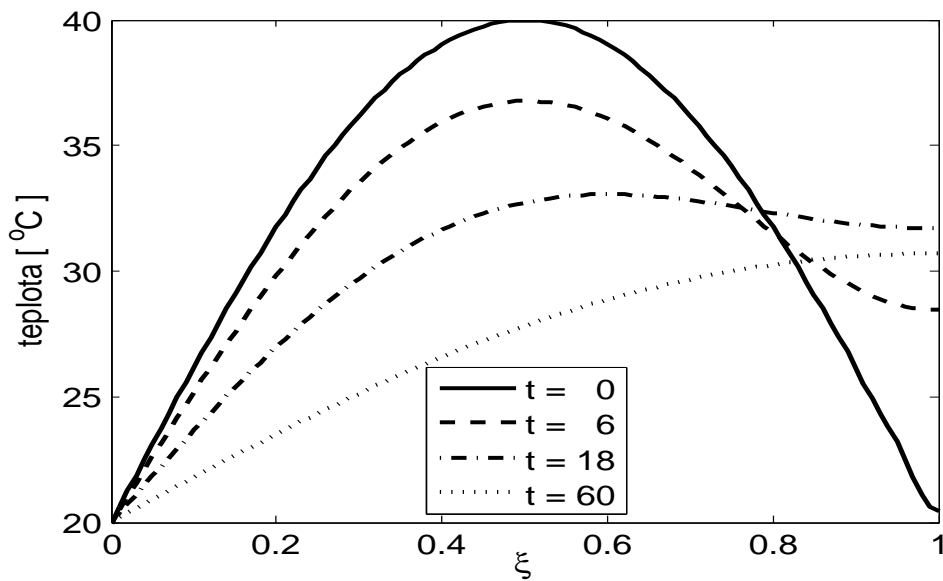
Použijeme k tomu ortogonalitu systému vlastních funkcí  $\{\sin \alpha_n \xi\}_1^\infty$  na intervalu  $[0, 1]$ , z níž plyne, že

$$\int_0^1 \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_m \xi \, d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } m = n, \\ 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (3.37)$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice (3.36) funkcí  $\sin \alpha_m \xi$  a provedeme integraci od 0 do 1, vede výpočet k výsledku

$$B_n = \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n - 3)(2n + 1)}. \quad (3.38)$$

Na obrázku 3.1 je znázorněna počáteční podmínka (plná čára) a řešení v dalších třech časových bodech.



Obrázek 3.1: Časový vývoj teplotního profilu (údaje v legendě jsou v sekundách).

**3.4.2 Příklad – vedení tepla v tenké tyči konečné délky II.** Úkolem je formulovat okrajovou úlohu s počáteční podmínkou pro nestacionární vedení tepla v tenké homogenní tyči za těchto předpokladů:

1. na počátku má celá tyč délky  $L$  konstantní teplotu  $T_0$  rovnou teplotě okolí,
2. na jednom konci je udržována konstantní teplota  $T_1 > T_0$  (tyč je zahřívána),
3. druhý konec je tepelně izolován,
4. po celé délce tyče probíhá výměna tepla s okolím o teplotě  $T_0$  při koeficientu přestupu tepla  $\alpha = \text{konst.} [\text{WK}^{-1}\text{m}^{-2}]$ .

Naším úkolem je najít lokální formulaci úlohy pro určení teploty  $T(x, t)$  v libovolném bodě  $x \in (0, L)$  a čase  $t > 0$ . Pro řešení plynou ze zadání důležité rysy matematického modelu, jimiž se musíme zabývat nejdříve:

- tyč je tenká, proto lze předpokládat okamžité vyrovnávání teploty v celém průřezu a uvažovat závislost pouze na jedné proměnné (1D úloha);
- v jednodimenzionální úloze musíme předpoklad číslo 4 realizovat zavedením zdrojového členu (závislého na stavové funkci  $T(x, t)$ ):

$$f(x, t, T) = \frac{\alpha}{L}(T - T_0), \quad x \in (0, L), \quad t > 0; \quad (3.39)$$

- tyč je homogenní, a proto je na místě položit tepelnou vodivost  $\lambda = \text{konst.} [\text{WK}^{-1}\text{m}^{-1}]$ .

Při sestavování lokálního bilančního vztahu použijeme diferenciální rovnici (3.15), do níž dodáme zdrojový člen (3.39). To mimo jiné znamená, že je třeba vstupní data modelu doplnit o měrné teplo  $c$  [ $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ] a hustotu  $\rho$  [ $\text{kgm}^{-3}$ ]. Výsledkem bude nehomogenní parciální diferenciální rovnice 2. řádu

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{L}(T - T_0), \quad x \in (0, L), \quad t > 0. \quad (3.40)$$

Je vhodné se přesvědčit, že všechny členy rovnice mají týž fyzikální rozměr  $\text{Wm}^{-3}$ , což představuje hustotu tepelného toku jako lokálně bilancovanou veličinu.

Počáteční podmínka je dána předpokladem číslo 1, tj.

$$T(x, 0) = T_0, \quad x \in \langle 0, L \rangle. \quad (3.41)$$

Předpoklad 2 můžeme bez újmy na obecnosti uplatnit v krajním bodě  $x = 0$  a předpoklad 3 pro  $x = L$ . První z nich tvoří Dirichletovu podmínku

$$T(0, t) = T_1, \quad t > 0, \quad (3.42)$$

druhý zapíšeme jako homogenní Neumannovu podmínku

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0, \quad x = L, t > 0. \quad (3.43)$$

Rovnice (3.40) s podmínkami (3.41)–(3.43) představuje hledanou formulaci nestacionární okrajové úlohy. Její řešení by bylo možné opět nalézt například Fourierovou metodou separace.

**3.4.3 Příklad – vedení tepla v dlouhé tenké tyči.** Uvažujme nyní velmi dlouhou tenkou tyč, která má na počátku teplotu  $T_0$ . V tomto okamžiku je na jednom z konců zahřáta na teplotu  $T_1 > T_0$  a na ní udržována nadále. Naším úkolem je určit teplotu  $T(x, t)$  v libovolném místě a čase.

V porovnání s předchozí úlohou bude mít rovnice jednodušší podobu, neboť zde nevystupuje zdrojový člen uvnitř tyče:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0, \infty), \quad t \in (0, \infty). \quad (3.44)$$

Na jednom konci tyče (předpokládáme ho v bodě  $x = 0$ ) je zadána Dirichletova podmínka

$$T(0, t) = T_1, \quad t > 0, \quad (3.45)$$

Na rozdíl od předchozího modelu nelze zadat hraniční podmínku na druhém konci tyče. Jelikož je podle předpokladu velmi dlouhá, lze za oblast řešení považovat polopřímku  $x > 0$ , a předpokládat ohraničenost řešení v nekonečnu. Konkrétně lze v souladu s fyzikální představou uvažovat

$$T(x, t) = T_1, \quad x \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty. \quad (3.46)$$

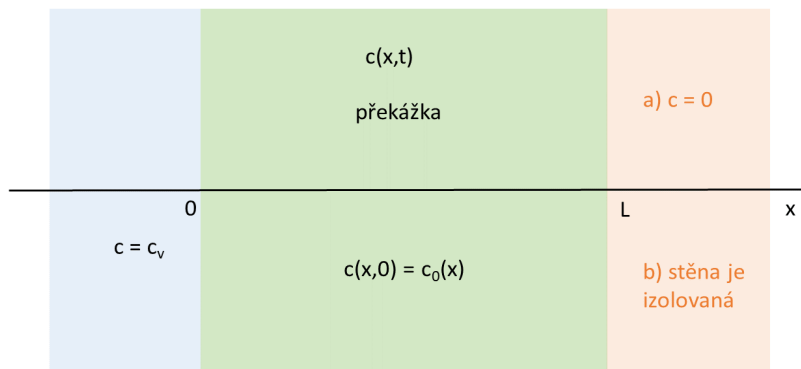
Počáteční podmínka takřka nezmění podobu, je ovšem vázána na nekonečný interval:

$$T(x, 0) = T_0, \quad x \in \langle 0, \infty \rangle. \quad (3.47)$$

**3.4.4 Příklad – kmity struny.** Formulujte úlohu pro netlumené kmity struny délky  $L$  o tuhosti  $c$  při počáteční výchylce  $\varphi(x)$  a počáteční rychlosti  $\psi(x)$ . Řešte pro tato vstupní data:

$$\varphi(x) = \frac{1}{50} \left( x - \frac{x^2}{L} \right), \quad \psi(x) = 0,$$

$L = 1$  m,  $c = 0.3$  m/s. Graficky znázorněte okamžitou výchylku struny v časech 1, 3, 5 a 7 sekund.



Obrázek 3.2: Difuze přes zábranu - schema.

**3.4.5 Nestacionární difuze přes homogenní překážku.** Uvažujme situaci dle obrázku 3.2. Z prostředí o konstantní koncentraci polutantu  $c = c_v$  se kontaminant šíří difuzí přes homogenní překážku tloušťky  $L$ , která je charakterizována koeficientem difuze  $k$ . Budeme uvažovat dva různé scénáře, pro které je cílem stanovit rozložení koncentrace zmečištění  $c(x, t)$  uvnitř překážky, která slouží jako ochranná bariéra.

1. Koncentrace kontaminantu za překážkou je nulová (v zábraně jsou nečistoty zadrženy).
2. Pravá stěna zábrany je izolovaná.

Úkolem je sestavit a řešit příslušné okrajové úlohy pro zadané počáteční rozložení polutantu v překážce  $c(x, 0) = c_0(x)$ .

# Kapitola 4

## Vícerozměrné úlohy

Podstatná část výkladu je zaměřena na stacionární modely, nestacionární úlohy jsou diskutovány v části 4.3.

### 4.1 Bilanční vztahy

**4.1.1 Základní pojmy.** Zavedeme následující označení:

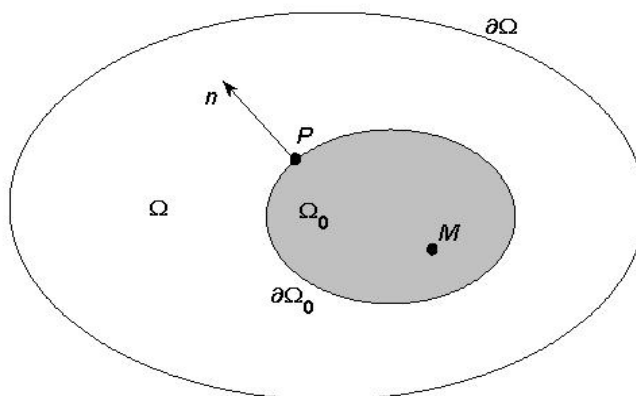
$\Omega$  ... jednoduše souvislá oblast v  $\mathbb{R}^2$  nebo v  $\mathbb{R}^3$ ,

$\partial\Omega$  ... její hranice – (po částech) hladká křivka v  $\mathbb{R}^2$  nebo plocha v  $\mathbb{R}^3$ ,

$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  ... omezená uzavřená oblast,

$\Omega_0 \subset \Omega$  ... referenční podoblast,

$\mathbf{n}$  ... jednotkový vektor vnější normály k hranici  $\partial\Omega_0$ .



Obrázek 4.1: K základním pojmům.

Dále bude (viz obr. 4.1)

$M \in \Omega_0$  ... vnitřní bod,

$P \in \partial\Omega_0$  ... hraniční bod,

$u = u(M)$  ... stavová funkce (obvykle skalární veličina),

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(M)$  ... toková funkce (obvykle vektorová veličina),

$f = f(M)$  ... zdrojová funkce, hustota zdrojů (integrovatelná funkce).

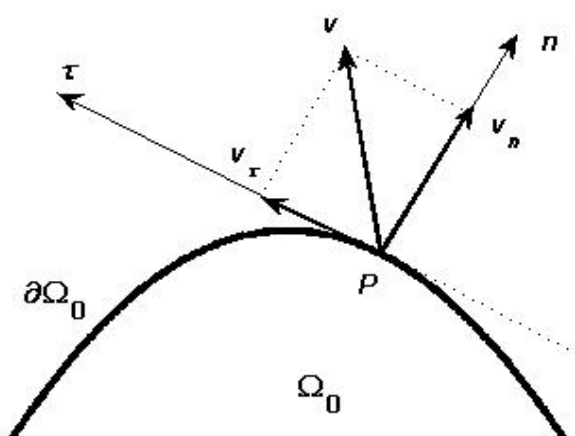
V případě, že uvedené funkce mají konkrétní fyzikální či jinou interpretaci, označujeme je také jako **pole**.

Důležitými pojmy jsou **normálový a tečný tok** podle obr. 4.2. Označíme  $\boldsymbol{\tau}$  tečný vektor (v  $\mathbb{R}^3$  leží v rovině určené vektory  $\boldsymbol{n}$  a  $\boldsymbol{v}$ ) a  $\boldsymbol{n}_0$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0$  příslušné jednotkové vektory – normálový a tečný. Pak můžeme vyjádřit průměty toku  $\boldsymbol{v}$  do tečného a normálového směru: normálový tok

$$\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_0) \boldsymbol{n}_0, \quad v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_0, \quad (4.1)$$

tečný tok

$$\boldsymbol{v}_\tau = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_0) \boldsymbol{\tau}_0, \quad v_\tau = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (4.2)$$



Obrázek 4.2: Tečný a normálový průmět toku  $\boldsymbol{v}$ , přičemž  $\boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v}$ .

### Příklad

Je dána oblast  $\Omega$  s hranicí  $\partial\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; z = 14 - x^2 - 4y^2, z \geq 0\}$ . Pro tokovou funkci  $\boldsymbol{v} = (2xz, -y^2z, xy)$  vypočteme normálový a tečný tok v bodě  $P = [2, 1, ?] \in \partial\Omega$ .

Pro normálový vektor platí

$$\boldsymbol{n}(x, y) = (-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 8y, 1).$$

Po snadném výpočtu máme  $P = [2, 1, 6]$  a  $\boldsymbol{n}(P) = (4, 8, 1)$ ,  $\|\boldsymbol{n}\| = 9$ . Dále je  $\boldsymbol{v}(P) = (24, -6, 2)$  a tedy v bodě  $P$

$$v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_0 = \frac{50}{9}.$$

Pak

$$\boldsymbol{v}_n = v_n \boldsymbol{n}_0 = \frac{50}{81}(4, 8, 1)$$

a snadno dopočítáme tečný tok  $\boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_n$ .

**4.1.2 Globální a lokální charakteristiky polí.** Pro skalární, resp. vektorovou funkci  $u$ ,  $\boldsymbol{v} \in C^1(\Omega_0)$  definujeme globální integrální charakteristiky takto:



- celková produkce zdrojů v  $\Omega_0$

$$F = \int_{\Omega_0} f(M) dV , \quad (4.3)$$

- cirkulace pole  $\mathbf{v}$  po uzavřené křivce  $K \subset \Omega_0$

$$C = \oint_K \mathbf{v}(M) \cdot d\mathbf{l} , \quad (4.4)$$

- tok pole  $\mathbf{v}$  plochou  $S$

$$T = \int_S \mathbf{v}(P) d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{v}(P) \cdot \mathbf{n} dS . \quad (4.5)$$

Lokálně můžeme v libovolném bodě oblasti  $\Omega_0$  sledovat

1. změny skalárního pole  $\varphi$  v zadaném směru  $\mathbf{s}$  prostřednictvím směrové derivace

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{s}_0 \cdot \text{grad } \varphi ,$$

kde  $\mathbf{s}_0$  je normovaný směrový vektor a gradient pole

$$\text{grad } \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

udává směr největší změny funkce  $\varphi$ ,

2. zřídlovost pole na základě jeho divergence, neboť

- $\text{div } \mathbf{v} \neq 0$  pro zřídlové pole,
- $\text{div } \mathbf{v} = 0$  pro nezřídlové pole,

3. vírovost pole vzhledem k jeho rotaci, protože

- $\text{rot } \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$  pro vírové pole,
- $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{o}$  pro nevírové (potenciálové) pole.

**4.1.3 Přechod od globálních charakteristik k lokálním.** V případě vícerozměrných modelů je třeba věnovat této otázce potřebnou pozornost. Přechod je vždy realizován limitním procesem, při němž zmenšujeme objem (plochu, křivku), kde je globálně bilancována jistá veličina, až do jediného bodu. Následující výklad je proveden v poněkud zjednodušené podobě.

Nejprve připomeneme některé integrální formule známé z vektorové analýzy. Gaussova–Ostrogradského formule vyjadřuje rovnost objemového integrálu divergence pole na oblasti a celkového toku přes její hranici:

$$\int_{\Omega_0} \text{div } \mathbf{v} dV = \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} . \quad (4.6)$$

Podobná tvrzení platí pro objemové integrály z gradientu a rotace:

$$\int_{\Omega_0} \text{grad } u dV = \int_{\partial \Omega_0} u d\mathbf{S} , \quad (4.7)$$

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dV = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{v} \times d\mathbf{S} . \quad (4.8)$$

Pro úplnost si ještě připomeňme Stokesovu větu, s jejíž pomocí lze vyjádřit cirkulaci toku  $\mathbf{v}$  po uzavřené křivce  $K$ :

$$\oint_K \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} , \quad (4.9)$$

kde  $S$  je libovolná hladká plocha procházející křivkou  $K$  a s ní souhlasně orientovaná.

Zavedeme veličinu  $\mu(\Omega_0)$  jako míru oblasti  $\Omega_0$ , například její objem, povrch, poloměr apod. Dále budeme předpokládat, že hustota je na referenční oblasti spojitá funkce,  $f \in C(\bar{\Omega}_0)$ . Pak proces spojitého zmenšování oblasti  $\Omega_0$  až do nějakého bodu  $M$  můžeme symbolicky vyjádřit relací

$$\Omega_0 \longrightarrow M \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\Omega_0) \longrightarrow 0 .$$

Aplikujeme-li tento princip na objemový integrál představující celkovou produkci zdrojů na  $\Omega_0$ , obdržíme zobecněnou definici střední integrální hodnoty pro hustotu:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\Omega_0)} \int_{\Omega_0} f \, dV = f(M) . \quad (4.10)$$

Výše uvedený limitní přechod dává výsledek, kterým je možno podle (4.6) definovat divergenci pole  $\mathbf{v}$  jako lokální charakteristiku v bodě  $M$ :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\Omega_0)} \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{v} . \quad (4.11)$$

V analogii s předchozím případem je tedy divergence pole hustotou (mírou) jeho zřídlovosti. Podobně lze lokálně definovat s využitím formulí (4.7) a (4.8) zbývající dva diferenciální operátory:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\Omega_0)} \int_{\partial\Omega_0} u \, d\mathbf{S} = \operatorname{grad} u , \quad (4.12)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\Omega_0)} \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{v} \times d\mathbf{S} = \operatorname{rot} \mathbf{v} . \quad (4.13)$$

**4.1.4 Bilanční rovnice.** Budeme uvádět modely obvyklé v praktických úlohách, výklad opět jako u 1D modelů směřuje od globálních bilancí k lokálním.

#### (A) Zákony zachování

##### Globální zákon zachování pro tokovou veličinu

$$\forall \Omega_0 \subset \Omega : \quad \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega_0} f(M) \, dV . \quad (4.14)$$

Slovy: celkový tok hranicí je roven celkové produkci vnitřních zdrojů.

##### Lokální tvar zákona zachování pro tokovou veličinu

Provedeme-li v rovnici (4.14) limitní přechod popsany v předchozím článku, obdržíme podle (4.10) a (4.6) **lokální zákon zachování** (neboli **rovnici kontinuity toku**) ve známém tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(M) = f(M) . \quad (4.15)$$

**(B) Bilance na rozhraních**

Budeme nejprve studovat situaci na vnitřní hranici  $\Gamma$ , která rozděluje oblast  $\Omega$  na dvě části. Uvažujme opět bilanční podoblast  $\Omega_0$ , pro kterou podle obr. 4.3 platí:

$$\Gamma_0 = \Omega_0 \cap \Gamma, \quad \partial\Omega_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 .$$

Nebudou-li uvnitř  $\Omega_0$  žádné vnitřní zdroje, bude platit

$$\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (4.16)$$

Uskutečníme-li limitní přechod  $\mu(\Omega_0) \rightarrow 0$  ve směru normály  $\mathbf{n}$  z vnitřku oblasti  $\Omega_0$  a proti jejímu směru z vnějšku, bude  $\mu(\Gamma_1) \rightarrow 0$ ,  $\mu(\Gamma_3) \rightarrow 0$ , ale hranice  $\Gamma_0 = \Gamma \cap \Omega_0$  se zachová. Na ní bude platit globální bilance

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\Omega_0)} \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Gamma_0} [\mathbf{v}(P+) - \mathbf{v}(P-)] \cdot \mathbf{n} dS \quad \forall P \in \Gamma_0 \quad \forall \Gamma_0 \subset \Gamma . \quad (4.17)$$

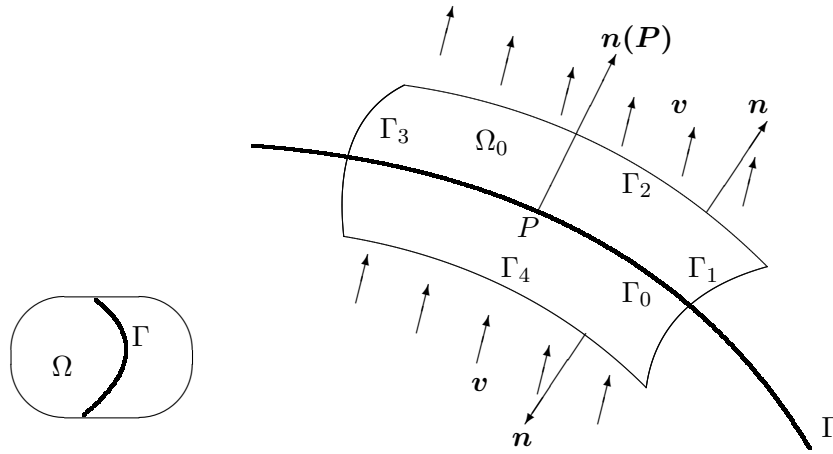
Lokálním důsledkem bilance (4.16) pro libovolný bod  $P$  hranice  $\Gamma$  je tudíž rovnost

$$[\mathbf{v}(P+) - \mathbf{v}(P-)] \cdot \mathbf{n} = 0 .$$

Po jejím normování (tj. vydělení velikostí normálového vektoru  $n = \|\mathbf{n}\|$ ) dostáváme podle (4.1)

$$v_n(P+) = v_n(P-) . \quad (4.18)$$

Získaný výsledek se nazývá **lokální podmínka spojitosti normálových toků** nebo také

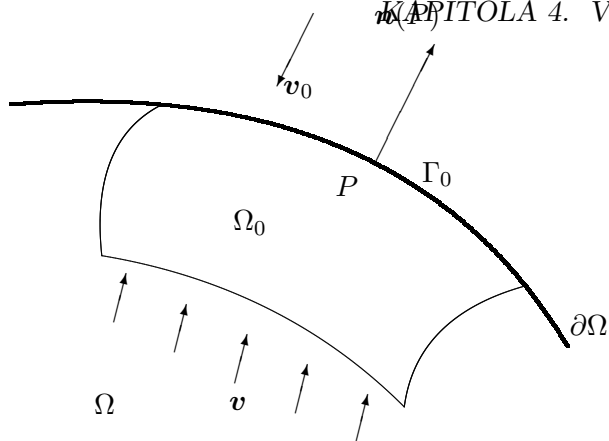


Obrázek 4.3: K bilanci toku na vnitřním rozhraní.

**podmínka přechodu.****(C) Bilance na hranici oblasti**

Nyní obrátíme pozornost k vnější hranici  $\partial\Omega$ , na níž budeme uvažovat zadaný vnější tok  $\mathbf{v}_0(P)$  (obr. 4.4). Limitní přechod uskutečníme na stejném principu jako v případě vnitřní hranice s tímto výsledkem:

$$[\mathbf{v}(P+) - \mathbf{v}_0(P)] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_n(P) = v_{0n}, \quad v_{0n} = \mathbf{v}_0(P) \cdot \mathbf{n}_0 . \quad (4.19)$$

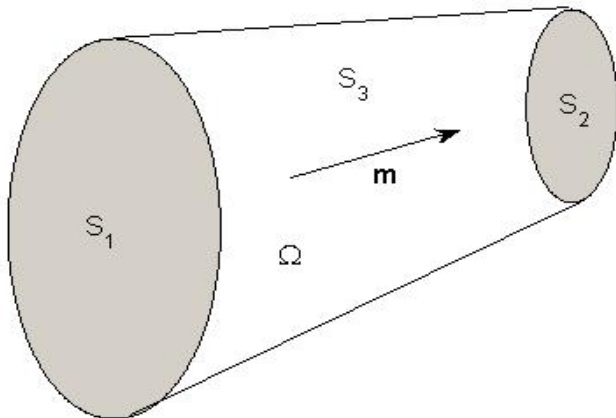


Obrázek 4.4: Bilance toku na vnější hranici.

**4.1.5 Příklad – ustálené laminární proudění ideální kapaliny.** Úkolem je vytvořit lokální matematický model laminárního proudění v zadané oblasti (obr. 4.5).

Výchozím vztahem je globální bilance hmotnostního toku  $\mathbf{m}$  [ $kg \cdot m^{-2} s^{-1}$ ] v objemu  $\Omega$ , v němž je produkce zdrojů popsána hustotou  $f$  [ $kg \cdot m^{-3} s^{-1}$ ], tj. za jednotku času v jednotkovém objemu. Zapišeme ji přímo pro ideální tekutinu, která je bez vnitřního tření (neviskózní) a nestlačitelná (tento předpoklad uplatníme později):

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{m} d\mathbf{S} = \int_{\Omega} f dV .$$



Obrázek 4.5: Laminární proudění.

Postupem popsaným v kap. 4.1 obdržíme lokální bilanci tokové veličiny:

$$\operatorname{div} \mathbf{m} = f \quad \text{na } \Omega .$$

Z praktických důvodů je obvyklé místo hmotnostního toku pracovat s rychlostí proudění  $\mathbf{v}$ , k níž přejdeme na základě vztahu  $\mathbf{m} = \rho \mathbf{v}$ , kde  $\rho$  je hustota kapaliny. Výslednou rovnici

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = f$$

nyní dále zjednodušíme ve smyslu zadání. Divergenci součinu skalární funkce  $\rho$  a vektorové funkce  $\mathbf{v}$  lze rozepsat za použití známé operátorové identity:

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = f .$$

Zde první sčítanec představuje tzv. zřídlový člen, druhý nazýváme advektivním členem. Nyní vezmeme v úvahu nestlačitelnost ideální kapaliny, tj. podmínku  $\rho = \text{konst.}$  Výsledkem je rovnice

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = f \quad (4.20)$$

kteřá v oblasti bez zdrojů přechází ve známou **rovnici kontinuity**  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .

Nyní se budeme zabývat předpokladem laminárního proudění, které je charakterizováno tím, že cirkulace rychlostního pole po libovolné uzavřené křivce v zadané oblasti je nulová:

$$C = \oint_K \mathbf{v} \, d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{S} = 0 \quad \forall K \subset \Omega .$$

Zde jsme aplikovali Stokesovu větu, z níž vyplývá, že rychlostní pole je na oblasti  $\Omega$  nevírové, tj.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{o} .$$

Dalším důsledkem je skutečnost, že rychlost je gradientem jisté skalární funkce, kterou v tomto případě označujeme jako rychlostní potenciál  $\psi$ :

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \psi .$$

Po dosazení do (4.20) dostáváme

$$\rho \operatorname{div} (\operatorname{grad} \psi) = f \quad (4.21)$$

a pro  $f = 0$  klasickou Laplaceovu rovnici pro rychlostní potenciál  $\Delta \psi = 0$ .

K jinému vyjádření rovnice kontinuity pro prostředí bez zdrojů můžeme dospět přímo z globální bilance:

$$\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{S} = \int_{S_1} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{S} + \int_{S_2} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{S} + \int_{S_3} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{S} = 0 .$$

Plochy  $S_1$  a  $S_2$  mají opačně orientované normály, tok pláštěm  $S_3$  je nulový. To znamená, že pro  $\rho = \text{konst.}$  dostáváme známou relaci

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 .$$

## 4.2 Konstituční vztahy a jejich důsledky

**4.2.1 Konstituční relace.** Budeme je definovat v lokální podobě obvyklé u přenosových jevů vztahem

$$\mathbf{v}(M) = -p(M) \operatorname{grad} u(M) , \quad M \in \Omega . \quad (4.22)$$

Jestliže tento vztah vynásobíme skalárně jednotkovým vektorem normály, získáme vyjádření normálového toku pro aplikaci v hraničních podmínkách:

$$v_n = -p(M) \mathbf{n}_0 \cdot \operatorname{grad} u = -p(M) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} . \quad (4.23)$$

Obecnější tvar konstitučního vztahu obdržíme za předpokladu, že materiálová funkce  $p$  závisí i na stavové veličině  $u$ :

$$\mathbf{v}(M) = -p(M, u) \operatorname{grad} u(M) . \quad (4.24)$$

**4.2.2 Lokální důsledky zákona zachování** postupně obdržíme, vyjádříme-li v klíčových vztazích z kapitoly 4.1 tokovou funkci  $\mathbf{v}$  pomocí konstituční rovnice (4.22), v níž předpokládáme spojitost materiálové funkce  $p$ .

(A) Ve vnitřním bodě  $M \in \Omega$ , hustota  $f$  je spojitá na  $\Omega$ :

$$(4.15) \quad \Rightarrow \quad -\operatorname{div}(p \cdot \operatorname{grad} u) = f . \quad (4.25)$$

(B) V hraničním bodě  $P \in \Gamma$  – přechod na vnitřní hranici:

$$(4.18) \quad \Rightarrow \quad p(P+) \operatorname{grad} u(P+) \cdot \mathbf{n} = p(P-) \operatorname{grad} u(P-) \cdot \mathbf{n} ,$$

neboli za použití (4.23)

$$p(P+) \frac{\partial u(P+)}{\partial \mathbf{n}} = p(P-) \frac{\partial u(P-)}{\partial \mathbf{n}} . \quad (4.26)$$

(C) V bodě  $P \in \partial\Omega$  – na vnější hranici je zadán tok  $\mathbf{v}_0(P)$  :

$$(4.19) \quad \Rightarrow \quad -p(P+) \frac{\partial u(P+)}{\partial \mathbf{n}} = v_{0n} , \quad v_{0n} = \mathbf{v}_0(P) \cdot \mathbf{n} . \quad (4.27)$$

V přenosových jevech často klademe

$$v_{0n} = \alpha(u(P+) - u_0(P)) , \quad (4.28)$$

kde  $u_0(P)$  je zadaná funkce a  $\alpha$  koeficient přestupu. Pak výše uvedená podmínka nabývá tvaru

$$p(P+) \frac{\partial u(P+)}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u(P+) = \alpha u_0(P) , \quad (4.29)$$

resp. pro bezprostředně zadanou pravou stranu  $g(P)$ ,

$$p(P+) \frac{\partial u(P+)}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u(P+) = g(P) . \quad (4.30)$$

## 4.3 Formulace okrajových úloh

**4.3.1 Typy hraničních podmínek.** Uvažujeme bilanční rovnici pro stavovou funkci  $u$  v lokálním tvaru

$$-\operatorname{div}(p \cdot \operatorname{grad} u) = f \quad \text{na } \Omega , \quad (4.31)$$

která spolu s některou z níže uvedených hraničních podmínek tvoří příslušnou okrajovou úlohu. Klasifikace hraničních podmínek (okrajových úloh) je obdobná jako u jednorozměrných modelů.

1. **Newtonova podmínka** (4.30) v poněkud obecnější podobě:

$$p \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u = g \quad \text{na } \partial\Omega \quad (4.32)$$

pro zadané vstupy  $p$  na  $\bar{\Omega}$ ,  $g$ ,  $f$  na  $\Omega$  a  $\alpha$ ,  $g$  na  $\partial\Omega$ .

2. **Neumannova podmínka.** Na hranici je zadán gradient stavové funkce – získáme ji formálně z předchozího vztahu (4.32) pro  $\alpha = 0$ :

$$p \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{na } \partial\Omega . \quad (4.33)$$

Bude-li  $\alpha = 0$  ve (4.29), resp.  $g = 0$  ve (4.33), obdržíme homogenní Neumannovu úlohu.

3. **Dirichletova podmínka.** Na hranici oblasti je zadána stavová funkce:

$$u = u_0 \quad \text{na } \partial\Omega . \quad (4.34)$$

Jestliže jsou na různých částech hranice zadány hraniční podmínky odlišného typu, hovoříme o smíšené okrajové úloze.

**4.3.2 Korektnost vícerozměrných úloh.** V zásadě klademe stejné požadavky jako u 1D úloh, pouze jejich interpretace je zobecněná.

1. Existence řešení (**řešitelnost**), přičemž vlastnosti řešení jsou dány nejen **kvalitou dat** ( $f, p, \dots$ ) jako u 1D úloh, ale také **kvalitou oblasti**  $\Omega$  a její hranice.
2. **Jednoznačnost** řešení pro úlohy výše uvedeného typu spočívá v principu na splnění podmínek, pro něž má homogenní úloha

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) &= 0 && \text{na } \Omega , \\ p \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u &= 0 && \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.35)$$

pouze triviální řešení  $u = 0$ , jsou-li  $f$  a  $p$  dostatečně hladké.

3. Dobrá **podmíněnost** – viz 1D úlohy.

**4.3.3 Příklad – teplotní pole v obdélníkové desce.** Úkolem je formulovat okrajovou úlohu pro stacionarizovaný stav chladnutí obdélníkové desky (obr. 4.6) za těchto předpokladů:

- (1) materiál je homogenní (tepelná vodivost  $\lambda = \text{konst.}$ ),
- (2) uvnitř se nenacházejí žádné zdroje tepla,
- (3) strany 1 a 4 jsou tepelně izolované,
- (4) strana 3 je udržována na konstantní teplotě  $T_0$ ,
- (5) na straně 2 dochází k tepelným ztrátám, které jsou vyjádřeny normálovým tepelným tokem  $q(y) \geq 0$  v jednotkách  $\text{Wm}^{-2}$ .

*Rovnice*

Vnitřek desky představuje oblast  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ , kde  $a, b$  jsou velikosti stran obdélníka. Bilanční rovnici ve tvaru lokálního zákona zachování zapíšeme pro teplotu  $T(x, y)$  jako stavovou veličinu:

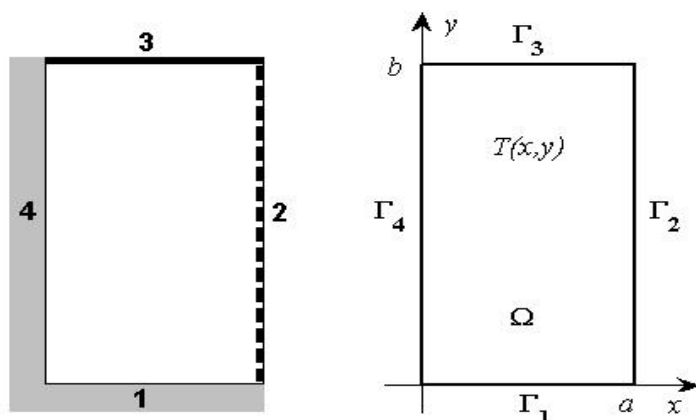
$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = f(x, y) \quad \text{na } \Omega . \quad (4.36)$$

Díky prvním dvěma předpokladům v zadání se rovnice dále zjednoduší:

$$\left. \begin{aligned} (1) &\Rightarrow -\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T = f \\ (2) &\Rightarrow f(x, y) = 0 \end{aligned} \right\} \Delta T(x, y) = 0 \quad \text{na } \Omega . \quad (4.37)$$

*Okrajové podmínky*

Označíme jednotlivé strany ve shodě s číslováním v zadání po řadě  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , takže  $\partial\Omega =$



Obrázek 4.6: K modelu teplotního pole v obdélníkové desce.

$\cup \Gamma_i, i = 1, \dots, 4$  (obr. 4.6). Jednotlivé podmínky, formulované slovně, musíme vyjádřit matematicky. Situace je zjednodušena tím, že normálové vektory stran jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Proto místo gradientů na hranicích můžeme psát přímo parciální derivace podle příslušných proměnných, přičemž je třeba uvážit tvar a orientaci vektoru normály  $\mathbf{n}$ :

- Třetí podmínka znamená, že na hranici  $\Gamma_3$  je ideální tepelný kontakt s okolím, jedná se o Dirichletovu hraniční podmínku

$$T = T_0 \quad \text{pro } y = b. \quad (4.38)$$

- Podle čtvrtého předpokladu jsou hranice  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_4$  tepelně izolované; neprochází jimi tedy tepelný tok, a proto se uplatní homogenní Neumannovy podmínky.

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{pro } y = 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{pro } x = 0. \quad (4.40)$$

- Poslední podmínka na hranici  $\Gamma_2$  je Newtonova typu a zapíšeme ji obvyklým způsobem:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q(y) \quad \text{pro } x = a. \quad (4.41)$$

### Poznámky

- (a) Rovnice  $\Delta T = 0$  sama o sobě má malou vypovídací hodnotu, vše podstatné, co tvoří okrajovou úlohu (tvar oblasti, charakter hranic atd.), je obsaženo v hraničních podmínkách.
- (b) Ověříme, že úloha je korektní. Kriteřiem je spojitost vstupů (zde konstanty) a spojitost hraničních podmínek.  
Okrajové podmínky jsou spojité na všech hranicích, které jsou hladké s výjimkou "rohů", kde musíme situaci posoudit zvlášť (proved'te samostatně).

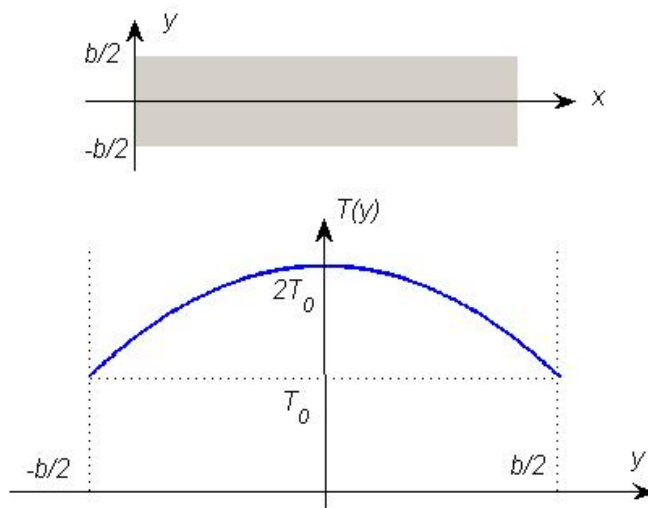
### Řešení úlohy

Analyticky lze řešení najít například Fourierovou metodou separace popsané v kapitole 6.2.



## 4.4 Úlohy k samostatnému řešení

**4.4.1 Ustálené teplotní pole.** Je dán homogenní polopás dle obr. 4.7. Teplotní průběh na straně konečné délky je parabolický s osou v ose  $x$ , přičemž maximální teplota  $2T_0$  je v počátku souřadného systému. Vodorovné strany polopásu jsou udržovány na teplotě  $T_0$ . Vytvořte matematický model ustáleného teplotního pole v polopásu. Vypočtete a znázorněte průběh teploty na ose pásu. (Pozn.: využijte osové souměrnosti úlohy.)



Obrázek 4.7: K úloze 3.4.1. Teplotní profil na konečné hraně polopásu.

**4.4.2 Elektrostatické potenciálové pole.** Úkolem je určit rozložení elektrostatického potenciálu na homogenním obdélníku o stranách  $a$ ,  $b$ , v němž se nevyskytují volné elektrické náboje. Na straně o délce  $b$  je nulový potenciálový spád, průběh potenciálu na sousední straně je popsán funkcí

$$\varphi_0 \frac{r^2}{a^2},$$

kde  $r$  je proměnná vzdálenost od společného vrcholu. Dvojice protějších stran má stejný konstantní potenciál  $\varphi_0$ .

Pro  $\varphi_0 = 24$ ,  $a = 10$ ,  $b = 5$  znázorněte ve vhodném měřítku ekvipotenciální hladiny a elektrické siločáry. Určete hodnotu potenciálu v těžišti obdélníka.

**4.4.3 Difuzní kontaminace.** Zjistěte rozložení kontaminující látky v obdélníkové vodorovně uložené vodní nádrži o rozměrech  $L$  a  $d$  za uvedených podmínek (jako lokální bilanci použijte stacionární variantu případu (a) v článku 4.5.4):

- jde o stacionarizovaný stav,
- dvě sousední strany jsou izolované,
- protější strana k izolované straně o délce  $L$  je „čistá“ (udržuje se na ní nulová koncentrace kontaminantu),

- protější strana k izolované straně o délce  $d$  působí zdroj znečištění, které je zadáno spádem koncentrace; ten je nulový u čisté strany a lineárně roste směrem k sousednímu rohu, kde má velikost  $c_0/d$ ,
- koeficient difuze je  $k$ , působení gravitace nebereme v úvahu.

Pro hodnoty  $L = 20$  m,  $d = 10$  m,  $c_0 = 5$  g/m<sup>2</sup> a  $k = 0,1$  m<sup>-1</sup> znázorněte výsledek graficky.

## 4.5 Vícerozměrné nestacionární modely

**4.5.1 Bilanční vztahy.** Vezmeme-li za základ zákon zachování (4.14) pro tokovou funkci ve stacionárním případě,

$$\forall M \in \Omega, P \in \partial\Omega : \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(P) \, d\mathbf{S} = \int_{\Omega} f(M) \, dV, \quad (4.42)$$

bude třeba obecně nestacionární bilanci rozšířit – podobně jako v jednodimenzionálním případě – o člen, reprezentující časovou změnu stavové funkce. Za předpokladu spojitosti veličin  $f$  a  $w$  v čase obdržíme rovnici analogickou k jednodimenzionální variantě (3.4):

$$\forall M \in \Omega, P \in \partial\Omega : \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(P, t) \, d\mathbf{S} = \int_{\Omega} f(M, t) \, dV - \int_{\Omega} \frac{\partial w(M, t)}{\partial t}. \quad (4.43)$$

Obdrželi jsme zákon zachování pro tokovou veličinu v nestacionární vícedimenzionální podobě. Nyní přejdeme za předpokladu spojitosti veličin vzhledem k prostorovým proměnným k lokální formulaci. Na levé straně aplikujeme Gaussovu-Ostrogradského větu a provedeme limitní přechod pro  $\mu(\Omega) \rightarrow 0$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(M, t) = f(M, t) - \frac{\partial w(M, t)}{\partial t}. \quad (4.44)$$

Zavedením nestacionární konstituční relace

$$\mathbf{v} = -p(M) \operatorname{grad} u(M, t) \quad (4.45)$$

získáme lokální bilanci pro stavovou funkci  $u(M, t)$  ve tvaru parciální diferenciální rovnice druhého řádu:

$$-\operatorname{div} (p \cdot \operatorname{grad} u) = f - \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{na } \Omega. \quad (4.46)$$

V závislosti na konkrétním zadání můžeme z jiných výchozích bilancí vyvodit další varianty, například vlnovou rovnici pro 2D kmity membrán, konvektivně-difuzní model kontaminace apod.

**4.5.2 Okrajové podmínky a formulace úloh.** Nadále se opíráme o předpoklad spojitosti dat v prostorových proměnných, který rozšíříme o závislost na čase. Protože není nutné do detailu opakovat postupy použité v kapitole 3.1 u stacionárních modelů, zaměříme se přímo na lokální podobu základních vztahů.

(A) *Hraniční podmínky* ( $P \in \partial\Omega$ ,  $t > 0$ ) při zadaných funkcích  $p(P, t)$  a  $g(P, t)$ :

- Newtonovy podmínky – viz (4.32)

$$p(P, t) \frac{\partial u(P, t)}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u(P, t) = g(P, t). \quad (4.47)$$

- Neumannovy podmínky – viz (4.33)

$$p(P, t) \frac{\partial u(P, t)}{\partial \mathbf{n}} = g(P, t) ; \quad (4.48)$$

- Dirichletovy podmínky – viz (4.34)

$$u(P, t) = g(P, t) . \quad (4.49)$$

(B) *Počáteční podmínky* ( $M \in \Omega$ ,  $t = 0$ ) popisují počáteční rozložení stavové funkce (popřípadě jejích derivací podle času)

$$u(M, 0) = u_0(M) , \quad (4.50)$$

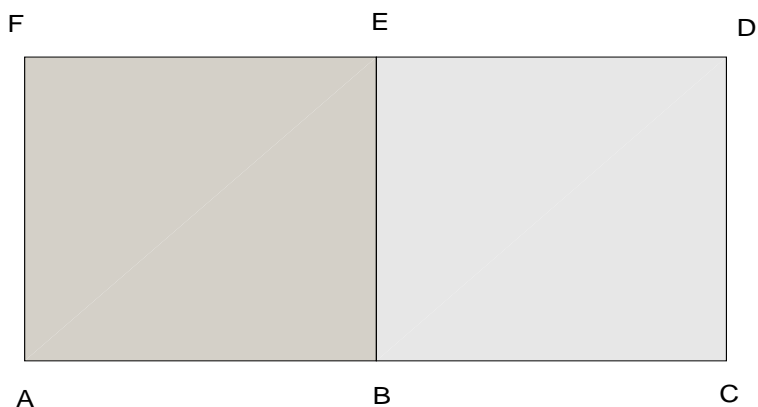
případně dále

$$\left. \frac{\partial u(M, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(M) . \quad (4.51)$$

Také formulace a klasifikace základních okrajových úloh odpovídá stacionárním případům v kapitole 3.3, doplněným o závislost na čase a počáteční podmínky, jak je ilustrováno následujícím příkladem na teplotní relaxaci. Z hlediska matematického modelování jde o situaci, kdy je známa lokální bilanční rovnice (Fourierova rovnice vedení tepla) a pozornost je třeba věnovat pouze okrajovým podmínkám.

**4.5.3 Nestacionární 2D teplotní pole.** Sestavte matematický model chladnutí obdélníkové desky složené ze dvou čtvercových částí o straně  $a$  (viz obrázek) na základě těchto vstupních údajů:

1. teplota okolního prostředí je  $T_0$ ;
2. počáteční teplota desky  $T_p > T_0$  je v obou částech stejná, vnitřní zdroje neuvažujeme;
3. tepelná vodivost v segmentu ABEF je  $\lambda_1$ , v sousedním  $\lambda_2$  (obě konstantní); teplotní vodivosti jsou po řadě  $a_1$  a  $a_2$ ;
4. strany AC, AF a EF jsou tepelně izolované;
5. na zbývající části vnější hranice dochází k přestupu tepla do okolí s koeficientem  $\alpha$ ;
6. na vnitřním rozhraní BE je ideální kontakt.



Obrázek 4.8: K úloze 4.3.3.

Označíme  $\Omega_1$  čtverec ABEF a  $\Omega_2$  čtverec BCDE, které uvažujeme jako otevřené množiny. Souřadný systém zvolíme tak, že obdélník leží v prvním kvadrantu, vrchol A je v počátku a vrchol F na ose  $y$ . Problém budeme modelovat jako dvojici okrajových úloh pro teplotní pole  $T_1(x, y, t)$ ,  $T_2(x, y, t)$  na každé z oblastí  $\Omega_1, \Omega_2$ . Na společné hranici dochází k vazbě ve formě podmínek přechodu.

Spojíme-li předchozí poznatky o lokálních bilančních rovnicích (3.16), (4.37) a (4.46), můžeme vzhledem k předpokladům 2 a 3 psát

$$a_j \Delta T_j(x, y, t) = \frac{\partial T_j(x, y, t)}{\partial t} \quad \text{na } \Omega_j, \quad j = 1, 2. \quad (4.52)$$

Také počáteční podmínka je pro obě oblasti stejná (viz 2):

$$T_j(x, y, t = 0) = T_p, \quad j = 1, 2. \quad (4.53)$$

Jednotlivé segmenty hranice jsou úsečky rovnoběžné se souřadnými osami, a proto normálové derivace ve vztazích (4.47), (4.48) přejdou v parciální derivace podle jednotlivých proměnných (viz např. článek 3.3.3). Podmínky na izolovaných segmentech budou homogenní Neumannova typu, na stranách CD a DE půjde o podmínky Newtonovy. Přechodové podmínky na společné hranici BE obsahují kromě obligátní spojitosti toků také rovnost teplot, jak plyne z požadavku 6:

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}, \quad x = a, \quad y \in \langle 0, a \rangle. \quad (4.54)$$

**4.5.4 Difuze s konvekcí.** Jedná se o jednu z typických situací, na níž lze ukázat modelovací postupy u nestacionárních vícerozměrných problémů. Úkolem je odvodit globální a lokální bilanci kontaminace ovzduší v oblasti  $\Omega$  – viz obrázek 4.9. Míra znečištění je vyjádřena bezrozměrnou koncentrací škodlivin  $c(M, t)$ ,  $M \in \Omega$ ,  $t > 0$ . K přenosu kontaminantů dochází jednak konvekcí (proudění vzduchu) rychlostí  $\mathbf{v}(M, t)$ , jednak difuzí s koeficientem difuze  $k(M)$ . Tokovou funkci  $\mathbf{q}(M, t)$  musíme tudíž uvažovat ve tvaru

$$\mathbf{q} = \mathbf{v}c - k \operatorname{grad} c. \quad (4.55)$$

Hustota vnitřních zdrojů znečištění (např. lokální topeniště) je  $f(M, t)$ .

Výchozím bilančním vztahem bude zákon zachování hmotnosti, která je vyjádřena koncentrací škodlivin v jednotce objemu. Vyjádříme jí skutečnost, že produkce vnitřních zdrojů je rovna součtu výměny s okolím přes hranici  $\partial\Omega$  zprostředkované tokovou funkcí  $\mathbf{q}$  a časové změny množství kontaminantu v objemu  $\Omega$ , která je alternativou disipačního členu – srv. (3.25):

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} f(M, t) dV - \int_{\Omega} \frac{\partial c(M, t)}{\partial t} dV. \quad (4.56)$$

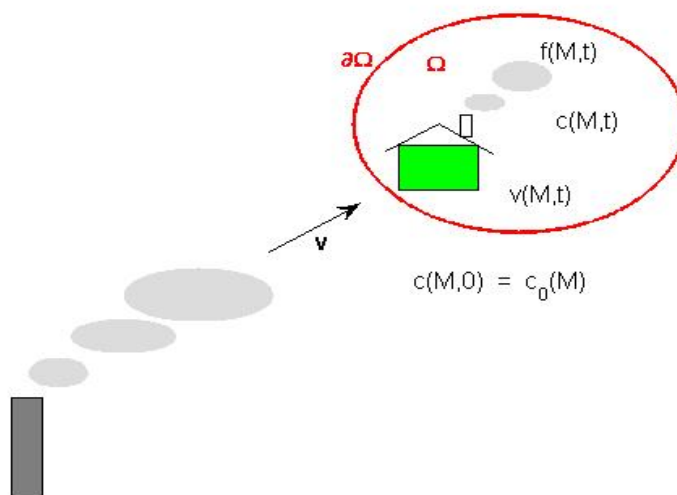
Od globální bilance přejdeme k lokální formulaci dříve popsaným postupem. Nejprve uplatníme na levé straně Gaussovu–Ostrogradského větu, aby byly všechny členy ve formě objemových integrálů:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}c - k \operatorname{grad} c) dV = \int_{\Omega} f(M, t) dV - \int_{\Omega} \frac{\partial c(M, t)}{\partial t} dV. \quad (4.57)$$

Poté provedeme limitní přechod pro  $\mu(\Omega) \rightarrow 0$  s tímto výsledkem:

$$\operatorname{div}(c\mathbf{v}) - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} c) = -\frac{\partial c}{\partial t} + f. \quad (4.58)$$

Na levé straně figurují postupně konvekční a difuzní člen. Podle jejich váhy může rovnice měnit svůj charakter, jak ukážeme na následujících speciálních případech, v nichž předpokládáme  $f(M, t) = 0$  a  $k = \text{konst.}$  na oblasti  $\Omega$ .



Obrázek 4.9: K úloze 4.3.3.

- (a) Je-li  $\|\mathbf{v}\| \ll 1$ , dominuje difuzní charakter děje a obdržíme parabolickou rovnici druhého řádu

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k \Delta c, \quad (4.59)$$

kteřá je někdy nazývána Fickův zákon.

- (b) Pro  $k \rightarrow 0$ , resp.  $\|\mathbf{v}\| \gg 1$ , převládne konvektivní přenos vyjádřený tentokrát parciální rovnicí prvního řádu

$$-\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{v}c). \quad (4.60)$$

Na její pravé straně je vhodné pro názornost rozepsat operátor divergence,

$$-\frac{\partial c}{\partial t} = c \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} c. \quad (4.61)$$

V jednodimenzionálním případě přejde tato rovnice do tvaru (3.25).

**4.5.5 Příklad - nestacionární difuze na obdélníku.** Mělká obdélníková nádrž o stranách  $a, b$  ( $a > b$ ) je na dvou sousedních stěnách izolovaná. Stěnou protější ke kratší straně dochází k průsaku kontaminantu, jehož koncentrace je maximální uprostřed (dosahuje v libovolném okamžiku desetinásobku normální hodnoty  $c_0$  a lineárně klesá k okrajům, kde dosahuje rovněž normální hodnoty. Na zbývajících stěnách probíhá filtrace, udržující po celé její délce rovněž hodnotu  $c_0$ . Počáteční znečištění je v normě, tj. má hodnotu  $c_0$  v celé nádrži.

Sestavte matematický model časového vývoje rozložení polutantu v nádrži při dominantním difuzním přenosu (konvekci tedy neuvažujte). Najděte řešení použitím Fourierovy metody separace.

# Kapitola 5

## Vybrané aplikační oblasti

### 5.1 Populační a logistické modely

Při modelování úloh s diskretizovanými daty, jako je například počet jedinců v populaci, počet osob v ekonomických analýzách apod., může být rovněž použito modelů založených na diferenciálních rovnicích. Je však třeba akceptovat předpoklad, že přírůstky veličin jsou velmi malé ve srovnání s četností souborů, jejichž chování modelujeme.

**5.1.1 Reprodukce s migrací - otevřený lineární systém.** Sestavte úlohu na vývoj populace, je-li migrační člen periodická funkce

$$f(t) = x_m \sin \omega t, \quad x_m \ll x_0 .$$

Použijte formulaci z příkladu 1.1.3 a a najděte řešení úlohy za těchto podmínek: jednotkou času je 1 den,  $x_0 = 6000$ ,  $x_m = 5$ ,  $\omega = 0,1$  1/den. Proveďte diskuzi řešení pro všechny tři varianty rozdílu  $k_1 - k_2$ . Vypočtete a graficky znázorněte výsledek pro  $k_1 = 1,18 \cdot 10^{-3}$  1/den,  $k_2 = 1,15 \cdot 10^{-3}$  1/den v průběhu prvních tří let. Stanovte počet obyvatel v populaci po uplynutí této doby.

**5.1.2 Model systému kořist–dravec.** Je dán uzavřený ekologický systém obsahující (v redukovaném pojetí) populaci dravců a populaci kořisti, která je jejich potravou. Sestavte model časového vývoje počtu jedinců v obou populacích za předpokladu spojitých změn. Uvažujte pouze lineární model s následujícími vlivy:

- reprodukční schopnost každé z populací,
- úbytek kořisti působením dravců,
- přírůstek populace dravců jako důsledek dostatku potravy.

Model vytvořte nejprve obecně a poté řešte linearizovanou verzi s konstantními koeficienty  $a = 0,05$ ,  $d = -0,05$  po řadě pro reprodukční schopnost kořisti a dravců,  $b = -0,02$  pro úbytek kořisti působením predátorů a  $c = 0,17$  pro přírůstek populace dravců vlivem dostatku potravy. Výchozí stavy populací jsou 600 (kořist), 10 (dravci), počáteční rychlosti změn stavů v populacích (vztahované na jeden den) jsou 0,2 u kořisti a 0,02 u dravců.

Úlohu řešte v časovém rozmezí jednoho roku – znázorněte graficky průběh vývoje obou populací a charakterizujte systém z hlediska stability.

**5.1.3 Účinnost reklamy.** Vyráběný produkt má  $N$  potenciálních spotřebitelů, kterým je ho třeba nabídnout, na počátku je však o něm informováno pouze  $N_0$  zákazníků. Proto je zahájena reklamní kampaň, při níž je rychlost šíření informace (přírůstek počtu informovaných spotřebitelů za jednotku času) přímo úměrná geometrickému průměru počtu informovaných a počtu neinformovaných klientů. Sestavte matematický model pro stanovení efektivity reklamy při výše uvedených předpokladech, jako jednotku času uvažujte jeden den. Určete dobu  $t_p$ , které je zapotřebí k plné informovanosti zákazníků, víte-li, že na konci prvního týdne je s reklamou seznámeno  $N_7$  zákazníků. Řešte obecně a následně pro tato vstupní data:  $N = 5000$ ,  $N_0 = 50$ ,  $N_7 = 737$ .

Označíme  $n(t)$  počet informovaných zákazníků v čase  $t$ . Výchozí bilanční vztah snadno zformulujeme:

$$\frac{\Delta n(t)}{\Delta t} = k\sqrt{n(N-n)},$$

kde  $k$  je konstanta úměrnosti, kterou určíme později. Pro malé časové přírůstky  $\Delta t$  je  $\Delta n \ll N$ , takže můžeme uvažovat diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$\frac{dn(t)}{dt} = k\sqrt{n(N-n)}, \quad n(0) = N_0. \quad (5.1)$$

Jedná se o separovatelnou rovnici s obecným řešením

$$\arcsin \frac{2n - N}{N} = kt + C,$$

v němž konstantu  $C$  obdržíme po aplikaci počáteční podmínky pro  $t = 0$ :

$$C = \arcsin \frac{2N_0 - N}{N}.$$

Funkce  $n(t)$  je pak dána výrazem

$$n(t) = \frac{N}{2} [1 + \sin(kt + C)], \quad (5.2)$$

kde  $C$  je dáno předchozím vzorcem. Zbývá určit konstantu úměrnosti  $k$ , víme-li, že pro  $t = 7$  je  $n = N_7$ . Po dosazení do získaného řešení máme

$$N_7 = \frac{N}{2} [1 + \sin(7k + C)],$$

odkud

$$k = \frac{1}{7} \left[ \arcsin \frac{2N_7 - N}{N} - \arcsin \frac{2N_0 - N}{N} \right].$$

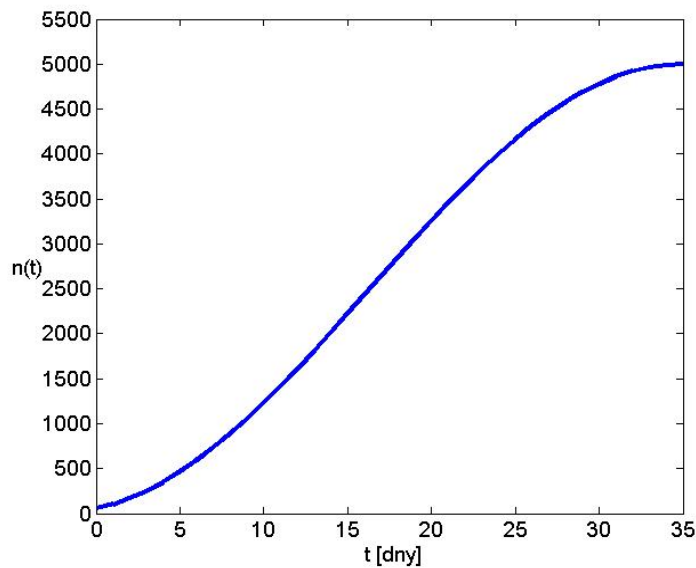
Nyní můžeme přikročit k odpovědi na zadání tak, že položíme  $n = N$  ve vztahu (5.2). Po úpravě dostáváme

$$t_p = \frac{1}{k} \left( \frac{\pi}{2} - C \right). \quad (5.3)$$

Dosazením vstupů do veličin  $k$  a  $C$  vypočteme, že potřebná doba je pět týdnů. Grafický průběh nárůstu informovanosti je na obrázku 5.1.

**5.1.4 Účinnost reklamy 2.** Matematický model pro úlohu 5.1.3 modifikujte v souladu s následujícím zadáním:

1. Rychlost šíření reklamy je přímo úměrná současně počtu informovaných i počtu neinformovaných spotřebitelů (tedy jejich součinu).
2. Cílem je určit procento informovaných zákazníků na konci desátého dne, je-li  $N = 3000$ ,  $N_0 = 60$  a  $k = 0,0002$ .



Obrázek 5.1: K úloze 5.1.4.

**5.1.5 Boj s epidemií.** V populaci čítající  $10^6$  osob se šíří infekce. Denně onemocní 8 procent z dosud zdravých osob. V okamžiku, kdy jsou nemocná 3 procenta obyvatelstva, je zahájena očkovací akce, při níž je denně ochráněno před infekcí 600 lidí. Určete, za jak dlouho (jednotkou času je jeden den) hrozba epidemie vymizí, tj. počet ohrožených obyvatel klesne na nulu.

## 5.2 Přenosové a relaxační modely

**5.2.1 Časově omezená tepelná konvekce.** Vytvořte matematický model konvektivního ochlazování vody proudící dlouhým úzkým potrubím za těchto předpokladů:

- rychlost proudění  $v$  je konstantní;
- jedná se o adiabatický děj; hustota média  $\rho$  a jeho měrné teplo  $c$  jsou konstantní po celé průtočné délce;
- na povrchu potrubí dochází k přestupu tepla do vnějšího prostředí, jehož teplota  $T_0$  je konstantní;
- teplotní změny v proudící vodě se projeví okamžitě a stejně v celém průřezu (potrubí je úzké); vzhledem k tomu je nutno koeficient přestupu tepla vztáhnout na jednotku objemu, tj.  $[\alpha] = \text{WK}^{-1}\text{m}^{-3}$ ;
- na vstupu do potrubí má voda konstantní teplotu  $T_1 > T_0$ , přítok teplé vody trvá po dobu  $t_k = 5$  minut, pak její teplota skokově klesne opět na hodnotu  $T_0$ ;
- na počátku je teplota v celém potrubí rovna teplotě okolí.

Sestavte matematický model a výsledek použijte k výpočtu (vhodná je například Laplaceova transformace) a grafickému znázornění

- teplotního profilu v potrubí na úseku od počátku do vzdálenosti 250 m v čase  $t_s = 15$  minut,
- časové změny teploty v bodě  $x_p = 200$  m v rozmezí prvních dvaceti minut.

Vstupní data:

$\alpha = 700 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-3}$ ,  $c = 4186 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kgm}^{-3}$ ,  $v = 0,4 \text{ ms}^{-1}$ ,  $T_0 = 5^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = 85^\circ\text{C}$ .



**5.2.2 Ochlazování válce.** Vnějšík pláště dlouhého homogenního válce o poloměru  $R$  je udržován na konstantní teplotě  $T_0$ . Určete rozložení teploty v osové rovině válce jako funkci času a vzdálenosti od osy, znáte-li počáteční rozložení teploty. Využijte osové souměrnosti úlohy – uvažujte jedinou prostorovou souřadnici  $r$  (vzdálenost od osy válce). Zadaná data jsou následující:

- (1) válec je z oceli (teplotní vodivost lze nalézt v tabulkách),
- (2) jeho poloměr je 10 cm,
- (3) počáteční rozložení teploty je popsáno funkcí

$$T_0(1 + f(r)), \quad f(r) = \left(\frac{R-r}{R}\right)^2,$$

přičemž  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ .

Znáznorněte v jednom grafu teplotní profily v časech 0, 10 a 30 sekund.

**5.2.3 Nestacionární difuze.** Ve svislém jímacím vrtu, který je v klidovém režimu, je hladina vody ve výšce  $h$  nade dnem. Na dně je zdroj znečištění, z něhož difuzí dochází k šíření kontaminace. V okamžiku odstranění zdroje je koncentrace polutantu popsána funkcí  $c_0(x)$ , kde  $x$  je výška nade dnem. Určete při zadaném koeficientu difuze  $k$  rozložení kontaminantu ve vrtu po uplynutí jedné minuty. Pracujte s těmito vstupními údaji:

- (1)  $h = 50$  m,  $k = 1,5$ ,
- (2)  $c_0(x) = c_0 e^{-\beta x}$ ,  $c_0 = 3$ ;  $\beta = 0,03$  m<sup>-1</sup> je koeficient útlumu v důsledku gravitace.

**5.2.4 Teplotní relaxace.** Tenká tyč délky  $L$  o konstantní teplotní vodivosti  $a$  je na jednom konci udržována na konstantní teplotě  $T_0$  a na druhém je tepelně izolována. Počáteční teplotní profil v tyči je popsán funkcí

$$T_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{L}\right),$$

kde  $x$  je délková souřadnice měřená od konce s konstantní teplotou. Sestavte a řešte modelovou úlohu, jejímž výstupem budou teplotní profily v zadaných časových bodech. Výpočet proveďte pro  $L = 1$  m,  $a = 0,03$  ms<sup>-2</sup>,  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  a výsledky graficky znázorněte pro časy 0, 1, 2, 4 a 10 sekund.

**5.2.5 Šíření emisí.** Počáteční koncentrace emisí v ovzduší dosahuje ve sledované oblasti konstantní podlimitní hodnotu  $c_0 = 0,01$  g/m<sup>3</sup>. Jakmile začne vát vítr rychlostí

$$v(x) = v_0(1 + e^{-ax}), \quad x > 0,$$

rozložení emisí se bude měnit. Na modelové úloze ukažte, že největší koncentrace se vyskytuje v bodě  $x = 0$ . Zjistěte, za jak dlouho bude v tomto místě překročena limitní hodnota  $c_{krit} = 0,04$  g/m<sup>3</sup>. Znáznorněte graficky rozložení koncentrace emisí v úseku 0 až 50 km ve směru větru na počátku a v časech 5 a 10 hodin. Uvažujte vstupní data  $v_0 = 8$  km/hod.,  $a = 0,007$  km<sup>-1</sup>.

## 5.3 Elektromagnetické pole

**5.3.1 Zákony zachování.** Při tvorbě modelových úloh v oblasti elektromagnetismu se často uplatňuje několik zákonů zachování souběžně, neboť se navzájem doplňují. Jde o důsledek toho, že současně popisujeme navzájem vázané stavy nebo děje v elektrickém a magnetickém poli. Nadále budeme předpokládat izotropní prostředí bez konvekčních proudů a magnetizace, takže vystačíme se základní skupinou tokových veličin:

- $\mathbf{D}$  elektrická indukce,
- $\mathbf{B}$  magnetická indukce,
- $\mathbf{E}$  elektrická intenzita,
- $\mathbf{H}$  magnetická intenzita.

Kromě toho označíme  $q$  hustotu elektrického náboje a  $\varepsilon$ ,  $\mu$  po řadě permitivitu a permeabilitu prostředí. Poslední dvě materiálové charakteristiky figurují ve dvojici specifických konstitučních relací

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} .$$

Čtveřice základních bilančních rovnic v globálním tvaru má za výše uvedených předpokladů a při potřebné hladkosti veličin toto složení:

1. Ampèrův zákon

$$\oint_K \mathbf{H} \, dl = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} ,$$

2. Faradayův zákon

$$\oint_K \mathbf{E} \, dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} .$$

V těchto dvou případech je cirkulace intenzit po uzavřené křivce rovna časové změně elektrického, resp. magnetického indukčního toku. Na pravé straně se integruje přes libovolnou souhlasně orientovanou hladkou plochu  $S$  procházející křivkou  $K$ .

3. Gaussův zákon pro elektrické pole

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = \int_{\Omega} q \, dV ,$$

4. Gaussův zákon pro magnetické pole

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0 .$$

Třetí vztah má standardní podobu rovnosti mezi celkovým (elektrickým) indukčním tokem přes uzavřenou hranici  $\partial\Omega$  a celkovou produkcí zdrojů. Poslední rovnice vyjadřuje absenci vnitřních zdrojů magnetizace, jakož i uzavřenost magnetických indukčních čar. Celá čtveřice tvoří soustavu Maxwellových rovnic elektromagnetického pole v integrálním (globálním) tvaru.

Pro přechod k lokální podobě Maxwellových rovnic použijeme poznatky z úvodu kapitoly 3. Nejprve Stokesovu větu pro první dvě rovnice s výsledkem

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} \, d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} , \quad \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} ,$$

a pak Gaussovu-Ostrogradského větu pro druhou dvojici rovnic. Limitními přechody pro  $\mu(S) \rightarrow 0$ ,  $\mu(\Omega) \rightarrow 0$  dostáváme diferenciální (lokální) Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} , & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= q , & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 . \end{aligned}$$

Při řešení úloh z elektromagnetismu je při formulaci zadání snahou zredukovat počet tokových funkcí, respektive – je-li to možné – přejít k funkcím stavovým. Alespoň ve stručnosti zmíníme jednu stacionární a jednu nestacionární úlohu, které lze z Maxwellových rovnic v tomto duchu odvodit.

**5.3.2 Elektrostatické pole.** Jak název napovídá, soustředíme pozornost na rovnice s vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{D}$ , přičemž je potlačena závislost na čase. Je tudíž

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{o} .$$

Pole elektrické intenzity je tedy nevírové a proto lze podle známé operátorové identity psát

$$\mathbf{E} = - \operatorname{grad} \varphi ,$$

kde elektrostatický potenciál  $\varphi$  představuje v této typické konstituční relaci stavovou funkci. Spojíme-li tento výsledek prostřednictvím vztahu  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  s Gaussovým divergenčním teorémem pro vektor  $\mathbf{D}$ , dostáváme parciální diferenciální rovnici druhého řádu pro potenciál,

$$- \operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = q .$$

V případě homogenního prostředí ( $\varepsilon = \text{konst.}$ ) jde o známou Poissonovu rovnici

$$- \Delta \varphi = \frac{q}{\varepsilon} ,$$

která v úloze bez volných nábojů ( $q = 0$ ) přechází v rovnici Laplaceovu. Spolu s příslušnými hraničními podmínkami tak můžeme modelovat okrajovou úlohu pro potenciál elektrostatického pole – viz následující příklady.

**5.3.3 Elektrostatické pole – řešený příklad.** Vytvořte matematický model pro výpočet rozložení elektrostatického potenciálu na čtverci o straně  $a$ , v němž se nenacházejí volné náboje. Tři strany mají potenciál  $\varphi_0$ , na čtvrté je potenciál  $\varphi_0 + \varphi_0 g(x, y)$ .

Zvolíme umístění čtverce do souřadného systému tak, aby hranice s nekonstantní okrajovou podmínkou byla na některé ze souřadných os – například na ose  $x$ . Matematický model bude mít podobu Dirichletovy úlohy pro 2D Laplaceovu diferenciální rovnici:

$$\Delta \varphi(x, y) = 0 \quad \text{na} \quad \Omega = (0, a) \times (0, a) ,$$

$$\varphi(a, y) = \varphi(x, a) = \varphi(0, y) = 0, \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0 + \varphi_0 g(x) .$$

Dále zjednodušíme hraniční podmínky zavedením substituce  $u(x, y) = \varphi - \varphi_0$ :

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{na} \quad \Omega ,$$

1.  $u(a, y) = 0,$
2.  $u(x, a) = 0,$
3.  $u(0, y) = 0,$
4.  $u(x, 0) = \varphi_0 g(x).$

Řešení provedeme metodou separace, při níž

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y), \quad X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x, \quad Y(y) = C \cosh \mu y + D \sinh \mu y.$$

Nyní budeme postupně aplikovat hraniční podmínky, a to ve výhodném pořadí počínaje homogenními.

$$3. \quad x = 0 \quad \dots \quad 0 = A \quad \Rightarrow \quad X(x) = B \sin \mu x.$$

$$2. \quad y = a \quad \dots \quad 0 = C \cosh \mu a + D \sinh \mu a \quad \Rightarrow \quad D = -C \coth \mu a \quad \Rightarrow$$

$$Y(y) = \frac{\sinh \mu(a - y)}{\sinh \mu a}.$$

$$1. \quad x = a \quad \dots \quad 0 = A \Rightarrow X(x) = B \sin \mu a \quad \Rightarrow \quad \mu_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vlastní funkce okrajové úlohy mají tedy tvar

$$u_n(x, y) = \beta_n \sin \mu_n x \frac{\sinh \mu_n(a - y)}{\sinh \mu_n a}, \quad \beta_n = B_n C_n.$$

$$4. \quad y = 0 \quad \dots \quad \varphi_0 g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \mu_n x.$$

Posledním krokem bude, jak je patrné, vyjádření funkce  $g(x)$  Fourierovým rozvojem vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí  $\{\sin \mu_n x\}$  a výpočet koeficientů  $\beta_n$ .

Řešením je superpozice vlastních funkcí ve tvaru

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\sinh \mu_n a} \sin \mu_n x \sinh \mu_n(a - y).$$

**5.3.4 Elektromagnetické vlnění.** Budeme pro zjednodušení uvažovat  $q, \varepsilon, \mu = \text{konst.}$  a vrátíme se k Maxwellovým diferenciálním rovnicím s operátorem rotace:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Aplikujeme-li na druhou z nich opět rotaci, obdržíme

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{H}).$$

Na levé straně je první člen nulový, protože  $\text{div } \mathbf{E} = q/\varepsilon = \text{konst.}$ , vpravo uplatníme první Maxwellovu rovnici. Výsledkem bude známá vektorová vlnová rovnice, představují soustavu hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic pro složky elektrické intenzity:

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Analogicky lze odvodit

$$\Delta \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Vektory intenzit jsou zpravidla harmonickými funkcemi času. Při úhlové frekvenci  $\omega$  lze pak psát

$$\mathbf{E} = e e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = h e^{i\omega t},$$

kde funkce  $e$ ,  $h$  závisí pouze na polohových souřadnicích. Z vlnových rovnic pro ně obdržíme tzv. Helmholtzovy rovnice

$$\Delta e + \omega^2 \varepsilon \mu e = 0, \quad \Delta h + \omega^2 \varepsilon \mu h = 0.$$

**5.3.5 Elektrostatické pole - úloha.** Jsou dány dva dlouhé souosé homogenní válce o poloměrech  $R/2$  a  $R$ . Vnitřní má potenciál 40 V, vnější 20 V. Využijte osové souměrnosti a modelujte úlohu pro určení potenciálu mezi válci v osové rovině jako funkce poloměru. Řešte a graficky znázorněte pro  $R = 10$ .

## 5.4 Kinematické úlohy

**5.4.1 Pohyb v gravitačním poli.** Hmotný bod je vržen šikmo vzhůru pod úhlem  $\alpha$  rychlostí  $v_0$  a pohybuje se v gravitačním poli Země bez odporu prostředí. Sestavte a řešte modelovou úlohu pro výpočet jeho trajektorie, maximální výstupné výšky a vzdálenosti dopadu. Dále sestavte úlohu pro popis pohybu v odporujícím prostředí (pro odporovou sílu uvažujte vztah  $\mathbf{F}_r = -r \cdot \mathbf{v}$ , kde  $r$  je koeficient odporu a  $\mathbf{v}$  okamžitá rychlost).

**5.4.2 Pohyb nabité částice v magnetickém poli.** Do homogenního magnetického pole je pod úhlem  $\alpha$  k magnetickým indukčním čarám emitována částice o hmotnosti  $m$  nesoucí elektrický náboj  $Q$ . Úkolem je sestavit matematický model pro výpočet trajektorie částice a provést diskuzi výsledku se zřetelem k úhlu  $\alpha$ . Magnetické pole má indukci  $B = \text{konst.}$  a jeho účinek na nabitou částici vyjadřuje Lorentzova síla. Působení gravitace neuvažujeme.

**5.4.3 Výtok vody z nádoby.** V nádobě, která má tvar tělesa vytvořeného rotací křivky  $S(x)$  kolem osy  $x$ , je hladina vody ve výšce  $h$ . U dna je malý kruhový otvor o poloměru  $r$ , kterým voda volně vytéká rychlostí

$$v = k\sqrt{2gh}$$

( $k$  je konstanta, jejíž hodnota pro vodu je asi 0,6).

1. Sestavte a řešte matematický model pro určení doby, za kterou se nádoba vyprázdní.
2. Odvoďte tvar nádoby, při němž bude hladina klesat rovnoměrně (jde o princip tzv. vodních hodin).

# Kapitola 6

## Parciální diferenciální rovnice

Kapitola obsahuje poznatky nezbytné pro analytické řešení lokálních modelových úloh v podobě jednodušších typů parciálních diferenciálních rovnic. Jsou demonstrovány analytické metody řešení, a to metoda charakteristik pro rovnice prvního řádu, resp. Fourierova metoda separace pro rovnice druhého řádu. V některých případech je možno použít aparát Laplaceovy transformace z předchozí kapitoly.

### 6.1 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

**6.1.1 Základní pojmy.** Budeme se zabývat hledáním funkce dvou proměnných  $u(x, y)$ , která vyhovuje rovnici

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right) = 0. \quad (6.1)$$

Zaměříme se na rovnice **lineární**, resp. **kvazilineární**, které neobsahují další výrazy s derivacemi funkce  $u$ , jak ilustrují následující ukázky:

- (a)  $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \dots \quad$  lineární rovnice,
- (b)  $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = xyu^2 \quad \dots \quad$  kvazilineární rovnice,
- (c)  $y \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - x \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2 \quad \dots \quad$  nelineární rovnice.

Je-li pravá strana navíc rovna nule, jako je tomu v případě (a), jedná se o rovnici homogenní.

Řešením rovnice na oblasti  $\Omega$  je každá funkce  $u(x, y)$  vyhovující rovnici a mající na oblasti spojitě parciální derivace prvního řádu. Poslední vlastnost zapisujeme relací  $u \in C^1(\Omega)$ .

**6.1.2 Metoda charakteristik pro homogenní lineární rovnici.** Tato rovnice má obecný tvar

$$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (6.2)$$

kde koeficienty  $P, Q$  jsou funkce spojitě na oblasti  $\Omega$ , na níž hledáme řešení, tj.  $P, Q \in C(\Omega)$ . Každé řešení  $u(x, y)$  představuje integrální plochu, jejíž ekvivalární hladiny

$$\varphi(x, y) = C \quad (6.3)$$

se nazývají charakteristiky. Pro jejich stanovení nejprve diferencujeme jejich průměty do roviny  $z = 0$ , pro něž podle (6.3) platí

$$\varphi(x, y(x)) = C.$$

Pak

$$\varphi'_x + \varphi'_y \cdot y' = 0, \quad \text{odkud} \quad \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = -y' = -\frac{dy}{dx}. \quad (6.4)$$

Charakteristiky rovněž vyhovují původní rovnici, a proto

$$P\varphi'_x + Q\varphi'_y = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = -\frac{Q}{P}. \quad (6.5)$$

Spojením posledních dvou výsledků obdržíme **charakteristickou rovnici** pro zadanou parciální diferenciální rovnici:

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}. \quad (6.6)$$

Obecné řešení původní úlohy má tuto podobu:

$$u(x, y) = G(\varphi(x, y)), \quad (6.7)$$

kde  $G(\varphi)$  je libovolná diferencovatelná funkce. Tento fakt ověříme dosazením do levé strany (6.2):

$$PG'_x + QG'_y = PG'_\varphi u'_x + QG'_\varphi u'_y = G'_\varphi (Pu'_x + Qu'_y).$$

Výraz v poslední závorce je v souladu s původní rovnicí roven nule, což dokazuje správnost tvrzení.

Zbývá ukázat, jak se určí konkrétní tvar funkce  $G$  ze zadaných podmínek. Můžeme je demonstrovat tak, že hledáme graf funkce  $u(x, y)$  (tj. plochu) procházející křivkou o parametrických rovnicích  $x = x(\tau)$ ,  $y = y(\tau)$ ,  $z = z(\tau)$ ,  $\tau \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ . Po dosazení do (6.3) za  $x$  a  $y$  obdržíme závislost  $\varphi(\tau) = C$ , z níž vyjádříme  $\tau$  a dosadíme do vztahu  $u = z(\tau)$ . Názornou ukázkou je následující úloha.

**6.1.3 Homogenní rovnice – příklad.** Budeme hledat řešení rovnice (a) z článku 6.1.1, které prochází

1) parabolou s parametrizací  $x = \tau$ ,  $y = \tau$ ,  $z = \tau^2$ ,  $\tau \in \langle -1, 1 \rangle$ ,

2) kružnicí  $x = 1$ ,  $y = \cos \tau$ ,  $z = \sin \tau$ ,  $\tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

V rovnici

$$yu'_x - xu'_y = 0$$

je  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = -x$ , dostáváme tudíž charakteristickou rovnici

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}, \quad \text{tj.} \quad ydy = -xdx.$$

Její obecné řešení

$$x^2 + y^2 = C$$

je současně vyjádřením charakteristik. Obecné řešení parciální diferenciální rovnice lze pak psát ve tvaru

$$u(x, y) = G(x^2 + y^2).$$

Výpočet pro zadané podmínky pak probíhá takto:

1) Dosazením do obecného řešení dostáváme

$$\varphi(\tau) = 2\tau^2;$$

současně je vzhledem k parametrizaci

$$u = z = \tau^2 \quad \text{neboli} \quad u = \varphi/2 = G(\varphi) ;$$

konečným výsledkem je funkce

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) ,$$

jedná se tedy o rotační parabolickou plochu.

2) V tomto případě plyne z rovnice charakteristik

$$\varphi(\tau) = 1 + \cos^2 \tau = 2 - \sin^2 \tau ;$$

jelikož podle parametrizace máme  $z = \sin \tau = u$ , bude  $\varphi = 2 - u^2$  a tedy

$$x^2 + y^2 + u^2 = 2 ,$$

což je rovnice kulové plochy; doplníme, že zde je  $G(\varphi) = \sqrt{2 - \varphi}$ .

**6.1.4 Existence a jednoznačnost řešení.** Pro úlohy výše uvedeného typu je v obecném případě používána následující formulace pod názvem **Cauchyho úloha** nebo **počáteční úloha** pro parciální diferenciální rovnici (PDR) prvního řádu:

$$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 , \quad u(x(\tau), y(\tau)) = z(\tau), \tau \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle . \quad (6.8)$$

Bez důkazu uvádíme **větu o jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy**:

Mějme funkce  $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Nechť je dána křivka  $K$  s parametrizací  $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ ,  $\tau \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$  taková, že rovinná křivka  $k = \{x(\tau), y(\tau)\}$  leží v oblasti  $\Omega$ . Jestliže pro každé  $\tau \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$  v Cauchyho úloze (6.8) platí, že

$$\begin{vmatrix} P(x(\tau), y(\tau)) & Q(x(\tau), y(\tau)) \\ \dot{x}(\tau) & \dot{y}(\tau) \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

pak existuje podooblast  $\Omega^* \subset \Omega$  obsahující křivku  $k$  taková, že řešení úlohy je na ní jednoznačné.

Ukažme aplikaci této věty na úlohu 2) v článku 7.1.3. Příslušný determinant nabývá tvaru

$$\begin{vmatrix} \tau & -\tau \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\tau .$$

Tento výsledek znamená, že získané řešení je jednoznačné v libovolné oblasti neobsahující bod  $\tau = x = y = 0$ , tj. počátek souřadného systému a současně vrchol parabolické plochy.

**6.1.5 Aplikace – volná konvekce.** Ukážeme použití metody charakteristik k řešení úlohy 4.2.8(b). Budeme uvažovat volnou konvekci bez vnitřních zdrojů ( $q = 0$ ), takže se jedná o homogenní lineární diferenciální rovnici pro koncentraci  $c(x, t)$ ,

$$v(t) \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0 , \quad v(t) = \frac{v_0}{1 + \alpha^2 t^2} , \quad (6.9)$$



kde  $v_0, \alpha$  jsou zadané konstanty. Počáteční podmínka je reprezentována funkcí

$$c(x, 0) = c_0(x) = \frac{c_{max}}{\cosh kx} ,$$

$c_{max}$  a  $k > 0$  jsou další vstupní data.

Nejprve odvodíme rovnice charakteristik. V úloze je

$$P(x, t) = v(t) , \quad Q(x, t) = 1 ,$$

což vede na diferenciální rovnici

$$\frac{dx}{v(t)} = dt \quad \text{neboli} \quad dx = v(t) dt .$$

Pro charakteristiky tak obdržíme výraz

$$\varphi(x, t) = x - \int v(t) dt = K .$$

Dalším krokem je parametrizace počáteční podmínky, kterou zavedeme takto:

$$x = \tau, \quad t = 0, \quad c = c_0(\tau) .$$

Položíme-li nyní ve vztahu pro charakteristiku  $t = 0$ , bude  $\varphi = x = \tau$  a podle třetí parametrizační rovnice dostáváme výsledek

$$c(x, t) = c_0(\varphi(x, t)) = c_0 \left( x - \int v(t) dt \right) . \quad (6.10)$$

Pro konkrétní výstup provedeme integraci

$$\int v(t) dt = \frac{v_0}{\alpha} \arctan \alpha t$$

a dosadíme do počáteční podmínky:

$$c(x, t) = \frac{c_{max}}{\cosh \left[ k \left( x - \frac{v_0}{\alpha} \arctan \alpha t \right) \right]} . \quad (6.11)$$

Doplňme ještě stručnou diskuzi tohoto výsledku. V konkrétním časovém okamžiku  $t_k$  se bude maximum koncentrace nacházet v bodě minima jmenovatele, tj. pro

$$x = \frac{v_0}{\alpha} \arctan \alpha t_k .$$

Jelikož  $v(t) \rightarrow 0$  pro  $t \rightarrow \infty$ , konvektivní proces s rostoucím časem ustává. Koncentrace se ustálí tak, že její maximum se bude nacházet v bodě

$$x_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_0}{\alpha} \arctan \alpha t = \frac{v_0}{\alpha} \frac{\pi}{2} .$$

**6.1.6 Metoda charakteristik pro kvazilineární rovnici.** Hledáme funkci vyhovující rovnici

$$P(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u), \quad (6.12)$$

kde koeficienty  $P, Q, R \in C(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$ . Její charakteristiku předpokládáme ve tvaru

$$\varphi(x, y, u(x, y)) = C.$$

Vyjádříme parciální derivace této rovnice podle proměnných  $x, y$ :

$$\varphi'_x + \varphi'_u u'_x = 0,$$

$$\varphi'_y + \varphi'_u u'_y = 0.$$

Vynásobíme první rovnici funkcí  $P(x, y, u)$ , druhou rovnici funkcí  $Q(x, y, u)$  a sečteme je:

$$P\varphi'_x + Q\varphi'_y + \varphi'_u(Pu'_x + Qu'_y) = 0.$$

Výraz v závorce je ovšem podle (6.12) roven  $R(x, y, u)$ , takže píšeme

$$P\varphi'_x + Q\varphi'_y + R\varphi'_u = 0.$$

Obdrželi jsme homogenní rovnici pro funkci tří proměnných  $\varphi(x, y, u)$ . Nebudeme odvozovat její řešení, ale použijeme podobný princip pro původní úlohu. Diferencováním rovnice charakteristik  $\varphi(x, y, u) = C$  obdržíme rovnost

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_u du = 0.$$

Aby poslední dva vztahy platily současně, musí být splněny relace

$$\frac{dx}{P(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} = \frac{du}{R(x, y, u)}. \quad (6.13)$$

Obdrželi jsme trojici charakteristických rovnic, z nichž libovolné dvě vyřešíme a určíme tak dvě různé charakteristiky

$$\varphi(x, y, u) = C_1, \quad \psi(x, y, u) = C_2. \quad (6.14)$$

Dosazením do původní kvazilineární rovnice (6.12) lze ověřit, že její obecné řešení lze psát ve tvaru

$$G(\varphi, \psi) = 0, \quad (6.15)$$

kde  $G$  je libovolná funkce dvou proměnných diferencovatelná na oblasti  $\Omega$ .

Cauchyho úlohu zadáváme analogicky jako pro homogenní rovnici ve formě křivky, kterou musí integrální plocha procházet. Postup při jejím řešení bude následující:

1. určíme obecné rovnice charakteristik (6.14) postupem uvedeným výše;
2. dosadíme do nich parametrizaci zadané křivky  $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ , takže bude

$$\varphi(\tau) = C_1, \quad \psi(\tau) = C_2;$$

3. z těchto vztahů vyloučíme parametr  $\tau$ , čímž obdržíme formuli

$$G(C_1, C_2) = 0;$$

4. za  $C_1$  a  $C_2$  dosadíme charakteristiky  $\varphi$  a  $\psi$ .

Jednoznačnost řešení tentokrát vyžaduje, aby matice

$$\begin{bmatrix} P(\tau) & Q(\tau) & R(\tau) \\ \dot{x}(\tau) & \dot{y}(\tau) & \dot{z}(\tau) \end{bmatrix}$$

měla hodnotu 2 pro předepsaný interval parametru  $\tau$ .

**6.1.7 Kvazilineární rovnice – příklad.** Úkolem je určit řešení rovnice

$$xu'_x + yu'_y = u, \quad (6.16)$$

které prochází průsečnicí kulové plochy  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  s rovinou  $y = 1$ .

1. Koeficienty rovnice  $P = x$ ,  $Q = y$ ,  $R = u$  jsou spojité funkce a vedou na soustavu charakteristických rovnic

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}.$$

Snadno vypočteme, že například  $y = C_1x$ ,  $u = C_2x$ , takže

$$\varphi(x, y, u) = \frac{y}{x} = C_1, \quad \psi(x, y, u) = \frac{u}{x} = C_2. \quad (6.17)$$

2. Zadanou křivkou je kružnice o poloměru 2 v rovině  $y = 1$  (tučně čárkovaná na obr. 6.1). Její parametrické rovnice jsou

$$x = 2 \cos \tau, \quad y = 1, \quad z = 2 \sin \tau, \quad \tau \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Matice

$$\begin{bmatrix} P(\tau) & Q(\tau) & R(\tau) \\ \dot{x}(\tau) & \dot{y}(\tau) & \dot{z}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos \tau & 1 & 2 \sin \tau \\ -2 \sin \tau & 0 & 2 \cos \tau \end{bmatrix}$$

má hodnotu 2 v celém intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , řešení bude tudíž jednoznačné.

3. Parametrizační vztahy dosadíme do charakteristik a vyloučíme parametr  $\tau$ :

$$C_1 = \frac{y}{x} = \frac{1}{2 \cos \tau}, \quad C_2 = \frac{u}{x} = \frac{\sin \tau}{\cos \tau} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \sqrt{4C_1^2 - 1}.$$

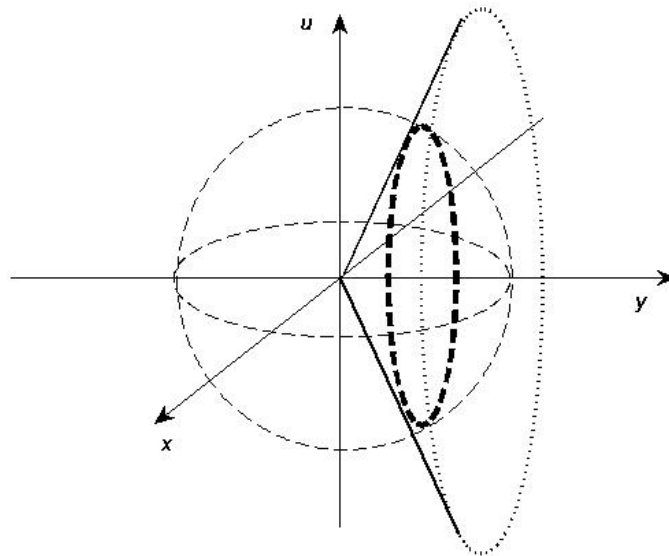
Po dosazení funkcí  $\varphi$ ,  $\psi$  za  $C_1$ ,  $C_2$  obdržíme hledaný výsledek:

$$u(x, y) = \sqrt{4y^2 - x^2}. \quad (6.18)$$

Jednoduchou úpravou tohoto vztahu zjistíme, že jde o kuželovou plochu

$$y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + u^2)$$

s osou v ose  $y$  a vrcholem v počátku souřadného systému (na obr. 6.1 je její část pro  $\tau \geq 0$ ).



Obrázek 6.1: K příkladu 6.1.7.

### 6.1.8 Rovnice 1. řádu – příklady k procvičení.

1. Najděte řešení procházející přímkou  $x = -1$ ,  $y = \tau$ ,  $z = \tau + 1$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  a stanovte podmínku jeho jednoznačnosti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$$

$$\left( u(x, y) = \frac{xy+2y+1}{xy+y+1}, y \neq 0 \right)$$

$$2. \quad yu'_x - xu'_y = 2xy, \quad u(x, x) = 2x^2 - 1, \quad \left( u(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 \right)$$

$$3. \quad 2yu'_x - xu'_y = 4xyu^2, \quad u(x, x) = 1/x^2, \quad \left( u(x, y) = \frac{3}{4y^2 - x^2} \right)$$

4. Určete plochu konstantního spádu daného vektorem  $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$ , která prochází křivkou  $x^2 + 4y^2 = 4$ ,  $z = 0$ .  
(eliptická válcová plocha  $(u - x - y)^2 + (u + x)^2 = 4$ )

## 6.2 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

**6.2.1 Úvod.** Podobně jako u rovnic prvního řádu se omezíme na lineární úlohy se dvěma prostorovými proměnnými. Parciální diferenciální rovnici 2. řádu pro funkci  $u(x, y)$  lze za uvedených předpokladů psát ve tvaru

$$a_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y \right) . \quad (6.19)$$

Při řešení na oblasti předpokládáme spojitost koeficientů  $a_{ij}$  a jejich prvních derivací a také spojitost funkce  $f$  na pravé straně.

Při klasifikaci rovnic 2. řádu jsou určující koeficienty u druhých derivací. Zapišeme je do matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

a vyjádříme její determinant

$$\det(\mathbf{A}) = \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \quad (6.21)$$

Matice  $\mathbf{A}$  je symetrická a reprezentuje kvadratickou formu, které můžeme přiřadit některou z kuželoseček v rovině. Podle jejího typu, který nejsnáze určíme z determinantu  $\delta$ , pak označujeme i příslušnou PDR 2. řádu na základě následující definice.

Má-li  $\delta$  na oblasti  $\Omega$  stálé znaménko, pak parciální diferenciální rovnice 2. řádu se na této oblasti nazývá

- eliptická, je-li  $\delta > 0$ ,
- parabolická, je-li  $\delta = 0$ ,
- hyperbolická, je-li  $\delta < 0$ .

Příklady typických rovnic a jejich klasifikace:

- (a)  $\Delta u = 0$  neboli  $u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \quad \dots$  eliptická ( $\delta = 1 > 0$ ),
- (b) totéž platí pro Poissonovu rovnici  $\Delta u = f$ ,
- (c)  $a\Delta u = u'_t \quad \dots$  parabolická ( $\delta = 0$ ),
- (d)  $a\Delta u = u''_{tt} \quad \dots$  hyperbolická ( $\delta < 0$ ),
- (e)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = h(x, y) \quad \dots$  hyperbolická ( $\delta = -1/4 < 0$ ),
- (f)  $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots$  eliptická v 1. a 3. kvadrantu, hyperbolická ve 2. a 4. kvadrantu ( $\delta = xy$ ).

Analyticky lze řešit jen některé rovnice a příslušné okrajové úlohy. Zde se podrobněji seznámíme s Fourierovou metodou založenou na vlastnostech ortogonálních systémů.

**6.2.2 Ortogonální rozvoje.** Pro reálné funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  definované na intervalu  $\langle a, b \rangle$  definujeme jejich **skalární součin** vztahem

$$\int_a^b f(x) g(x) dx. \quad (6.22)$$

Tímto součinem je indukována **norma funkce**  $f(x)$  tak, že platí

$$\|f(x)\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (6.23)$$

Nadále budeme uvažovat funkce integrovatelné s kvadrátem, tj. takové, pro něž  $\|f(x)\| < \infty$ .

Posloupnost funkcí  $\{g_n(x), x \in \langle a, b \rangle\}_{n=1}^{\infty}$  se nazývá **ortogonální systém** na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , jestliže

$$\int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0 \quad \text{pro } m \neq n . \quad (6.24)$$

Je-li  $\|g_n(x)\| = 1$ , jde o systém **ortonormální**. Z každého ortogonálního systému  $\{g_n(x)\}$  lze tedy vytvořit ortonormální systém  $\{g_n(x)/\|g_n(x)\|\}$  normováním jeho prvků.

Mějme na intervalu  $\langle a, b \rangle$  ortogonální systém  $\{g_n(x)\}$  a funkci  $f(x)$ . Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) \quad (6.25)$$

se nazývá **rozvoj funkce  $f(x)$  vzhledem k systému  $\{g_n(x)\}$** , platí-li pro koeficienty  $a_n$  vztah

$$a_n = \frac{1}{\|f(x)\|^2} \int_a^b f(x) g(x) dx . \quad (6.26)$$

Tuto skutečnost formálně zapisujeme relací

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) . \quad (6.27)$$

Kdybychom totiž obě strany této relace vynásobili funkcí  $g_m(x)$  a integrovali přes interval  $\langle a, b \rangle$ , obdržíme vzhledem k ortogonalitě systému dle (6.24) na pravé straně nuly s výjimkou integrálu pro  $m = n$ , který je roven kvadrátu normy. Je však zřejmé, že je třeba nalézt odpověď na dvě základní otázky (vztahované k danému intervalu):

1. Konverguje řada?
2. Konverguje-li, je jejím součtem funkce  $f(x)$ ?

Odpověď vyjadřují následující dvě tvrzení.

(1) Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$  konverguje (v normě  $\|\cdot\|$ ), právě když platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \quad (\text{Besselova nerovnost}). \quad (6.28)$$

(2) Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$  konverguje na intervalu  $\langle a, b \rangle$  k funkci  $f(x)$ , právě když

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \quad (\text{Parsevalova rovnost}). \quad (6.29)$$

Teprve nyní tedy platí

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) . \quad (6.30)$$

**6.2.3 Příklad.** Budeme uvažovat interval  $\langle 0, 2\pi \rangle$  a na něm systém funkcí

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \right\} \quad (6.31)$$

Dokážeme, že je ortogonální a provedeme jeho normování.

K důkazu postačí použít následující integrály:

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \pi & , \quad m = n \neq 0 \\ 2\pi & , \quad m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \pi & , \quad m = n \neq 0 \\ 0 & , \quad m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$$

Vidíme, že skalární součin jakékoli dvojice různých funkcí systému (6.31) je roven nule. Tím je ověřena ortogonalita. Dále vypočteme normy funkcí ze zadaného systému:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi.$$

Ortonormální systém příslušný k (6.31) má pak tuto podobu:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}. \quad (6.32)$$

**6.2.4 Fourierovy řady.** Budeme-li k funkci  $f(x)$  integrovatelné na  $\langle 0, 2\pi \rangle$  hledat rozvoj vzhledem k systému (6.31), resp. (6.32), obdržíme na základě formulí (6.26) a (6.27) výsledek ve tvaru

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (6.33)$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.34)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (6.35)$$

Řada (6.33) se nazývá **Fourierův rozvoj funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$** , jehož koeficienty jsou dány formulemi (6.34) a (6.35).

Tyto vzorce lze snadno zobecnit pro interval  $\langle 0, L \rangle$  transformací  $x \rightarrow 2\pi x/L$ :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right), \quad (6.36)$$

kde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi nx}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.37)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi nx}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (6.38)$$

Problematiku konvergence Fourierovy řady shrnuje následující tvrzení.

**Dirichletova věta.** Nechť má funkce  $f(x)$  tyto vlastnosti:

(D1) je na intervalu  $\langle 0, L \rangle$  integrovatelná,

(D2) má na tomto intervalu konečný počet extrémů.

Pak k ní na intervalu  $\langle 0, L \rangle$  existuje jednoznačně určený Fourierův rozvoj tvaru

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right)$$

s koeficienty definovanými výše uvedenými vzorci, který konverguje

- k funkci  $f(x)$  v každém bodě intervalu  $(0, L)$ , v němž je spojitá,
- k aritmetickému průměru jednostranných limit v bodech nespojitosti uvnitř intervalu  $(0, L)$ ,
- k periodickému prodloužení  $\tilde{f}(x)$  vně intervalu  $(0, L)$ , resp. k aritmetickém průměrům jednostranných limit v jeho bodech nespojitosti.

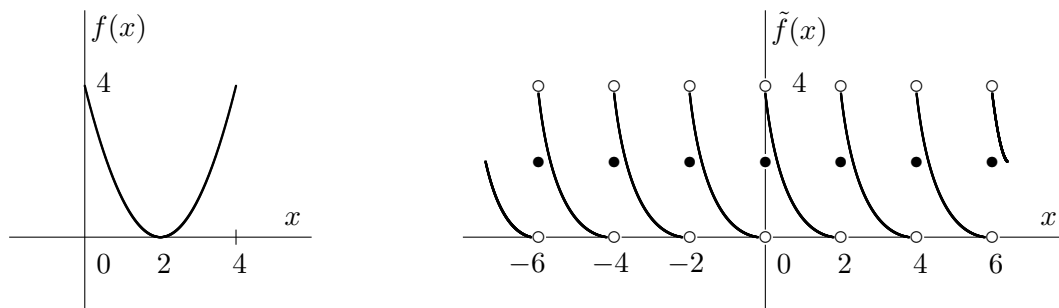
Pro libovolné  $x \in \langle 0, L \rangle$  tedy platí:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right) = \begin{cases} f(x), & \text{jde-li o bod spojitosti,} \\ \frac{f(x+) + f(x-)}{2} & \text{v bodech nespojitosti.} \end{cases} \quad (6.39)$$

**6.2.5 Příklad.** Je dána funkce  $f(t) = (t - 2)^2$ ,  $t \in \langle 0, 2 \rangle$ . Vytvoříme graf periodického prodloužení a vyjádříme ji na zadaném intervalu Fourierovou řadou.

Parabola  $f(t) = (t - 2)^2$  je na obr. 6.2 vlevo s vyznačeným úsekem v intervalu  $\langle 0, 4 \rangle$ . Zadaná funkce je spojitá, a proto její periodizací vzniknou body nespojitosti pouze na rozhraní period. Zde bude řada konvergovat k aritmetickým průměrům jednostranných limit. Opakujeme-li





Obrázek 6.2: Periodické prodloužení.

základní interval délky  $L = 2$ , dojdeme k periodickému prodloužení na obr. 6.2 vpravo. Fourierovy koeficienty vypočteme podle vzorců (6.37), (6.38):

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^2 (x-2)^2 dx = \frac{8}{3}, \\ a_n &= \int_0^2 (x-2)^2 \cdot \cos n\pi x dx = \\ &= \left[ \frac{(x-2)^2}{n\pi} \sin n\pi x - \frac{2}{n\pi} \left( -\frac{x^2}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin n\pi x \right) \right]_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}, \\ b_n &= \int_0^2 (x-2)^2 \cdot \sin n\pi x dx = \\ &= \left[ -\frac{(x-2)^2}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{2}{n\pi} \left( \frac{x-2}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right) \right]_0^2 = \frac{4}{n\pi}. \end{aligned}$$

Vyjádření funkce  $f(x)$  Fourierovým rozvojem má tvar

$$f(x) \sim \frac{4}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2} + \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \right), \quad x \in \langle 0, 2 \rangle.$$

V bodech nespojitosti na okrajích periody konverguje řada k hodnotě 1, což je aritmetický průměr jednostranných limit.

**6.2.6 Fourierova metoda pro eliptické rovnice.** Podstatu metody ukážeme na jednoduché úloze pro Laplaceovu diferenciální rovnici s Dirichletovými okrajovými podmínkami na obdélníku:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{na } \Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}, \quad (6.40)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad y = 0, \quad x \in \langle 0, a \rangle, \quad (6.41)$$

$$u(a, y) = 0, \quad x = a, \quad y \in \langle 0, b \rangle, \quad (6.42)$$

$$u(x, b) = \varphi(x), \quad y = b, \quad x \in \langle 0, a \rangle, \quad (6.43)$$

$$u(0, y) = 0, \quad x = 0, \quad y \in \langle 0, b \rangle. \quad (6.44)$$

Budeme nejprve zjišťovat, zda má úloha řešení ve tvaru  $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ . Dosazením do Laplaceovy rovnice dostáváme po úpravě

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \quad \text{na } \Omega.$$

Levá strana závisí pouze na proměnné  $x$ , zatímco pravá strana jen na  $y$ . Má-li být tato rovnice splněna v libovolném bodě  $(x, y) \in \Omega$ , musí se obě strany rovnat téže konstantě. Označíme ji  $-\mu^2$  s tím, že důvod volby znaménka vysvětlíme později. Obdržíme tak dvojici obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu s nulovou pravou stranou:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) - \mu^2 Y(y) = 0.$$

Jejich obecným řešením jsou funkce

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x, \quad Y(y) = C \cosh \mu y + D \sinh \mu y. \quad (6.45)$$

Jak je patrné, můžeme řešení skutečně hledat ve tvaru navrženého součinu

$$u(x, y) = (A \cos \mu x + B \sin \mu x)(C \cosh \mu y + D \sinh \mu y). \quad (6.46)$$

Popsaný krok se nazývá Fourierova separace proměnných.

**6.2.7 Aplikace hraničních podmínek.** Konstanty  $A, B, C, D$  a veličinu  $\mu$  stanovíme z hraničních podmínek. Výhodné je začít s homogenními (nulovými) podmínkami na nulových hranicích. Proto jako první uvážíme podmínku (6.41), podle níž musí být pro libovolné  $x \in \langle 0, a \rangle$

$$0 = (A \cos \mu x + B \sin \mu x) \cdot C.$$

Je tedy  $C = 0$  a

$$u(x, y) = (\alpha \cos \mu x + \beta \sin \mu x) \sinh \mu y, \quad \text{kde } \alpha = AD, \beta = BD.$$

Dále vezmeme v úvahu podmínku (6.44):

$$0 = \alpha \sinh \mu y, \quad \text{odkud } \alpha = 0$$

a tedy

$$u(x, y) = \beta \sin \mu x \sinh \mu y.$$

Následuje podmínka (6.42) pro  $x = a$ :

$$0 = \beta \sin \mu a \sinh \mu y.$$

Protože musí být  $\sinh \mu y \neq 0$  skoro všude pro  $y \in \langle 0, b \rangle$ ,

$$\sin \mu a = 0, \quad \text{tj. } \mu a = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Obdrželi jsme nekonečnou posloupnost tzv. vlastních čísel

$$\mu_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (6.47)$$

kterým odpovídají vlastní funkce

$$u_n(x, y) = \sin \mu_n x \sinh \mu_n y. \quad (6.48)$$

Hledané řešení je jejich superpozicí, a proto

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \mu_n x \sinh \mu_n y \quad (6.49)$$

(pro  $n = 0$  je  $u_0(x, y) = 0$ ). Tento rozvoj musí pro  $y = b$  splňovat podmínku (6.43) neboli

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \mu_n x \sinh \mu_n b .$$

Znamená to, že na intervalu  $\langle 0, a \rangle$  je uvedená řada Fourierovým rozvojem funkce  $\varphi(x)$ , neboť

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n \sin \mu_n x \quad \text{kde} \quad \tilde{\beta}_n = \beta_n \sinh \mu_n b . \quad (6.50)$$

S použitím vzorce z článku 7.1.3 lze ukázat, že funkce  $g_n(x) = \sin \mu_n x$  tvoří na uvedeném intervalu ortogonální systém, jelikož

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \begin{cases} \frac{a}{2} = \|\sin \mu_n x\|^2 & , \quad m = n, \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases} .$$

Nyní můžeme koeficienty  $\tilde{\beta}_n$  určit dvojím způsobem. Jednak lze modifikovat obecné vyjádření Fourierových koeficientů pro sinový rozvoj anebo bezprostředně využít ortogonalitu. Uplatníme-li druhou možnost, vynásobíme rovnici (6.50) funkcí  $g_m(x) = \sin \mu_m x$  a integrujeme přes periodu  $L = a$ :

$$\int_0^a \varphi(x) \sin \mu_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n \int_0^a \sin \mu_m x \sin \mu_n x dx .$$

Pouze pro  $m = n$  jsou integrály na pravé straně nenulové, takže

$$\int_0^a \varphi(x) \sin \mu_m x dx = \tilde{\beta}_n \frac{a}{2} .$$

Je tedy

$$\tilde{\beta}_n = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x) \sin \mu_n x dx \quad \text{a} \quad \beta_n = \frac{\tilde{\beta}_n}{\sinh \mu_n b} . \quad (6.51)$$

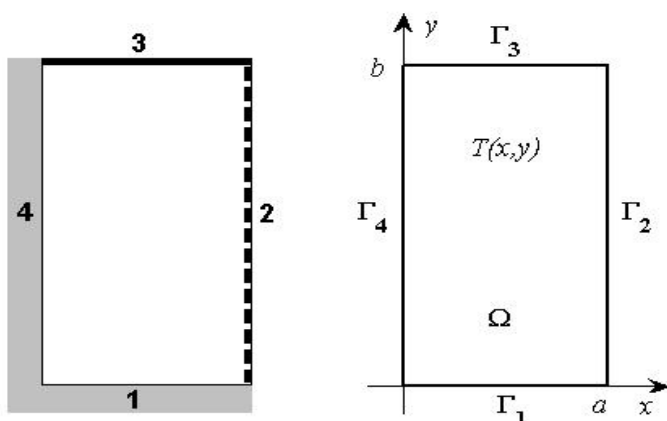
Nyní můžeme sestavit konečný tvar řešení zadané úlohy:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\beta}_n}{\sinh \mu_n b} \sin \mu_n x \sinh \mu_n y . \quad (6.52)$$

Vraťme se nyní k volbě záporného znaménka konstanty  $\mu^2$  v úvodu. Záporná hodnota je zde podmíněna tím, že nenulová okrajová podmínka (6.43) je funkcí proměnné  $x$ , a proto požadujeme pro tuto proměnnou goniometrické vlastní funkce. V opačném případě (tj. s podmínkou v proměnné  $y$ ) by bylo třeba vzít znaménko kladné, aby goniometrické funkce byly v této proměnné. V případě nenulových podmínek pro obě proměnné by řešení vyžadovalo vhodnou substituci, jíž se některá z podmínek převede do rovnice jako zdrojový člen.

**6.2.8 Příklad - úloha 3.3.3 se zadanými daty.** Formulujte okrajovou úlohu pro stacionarizovaný stav chladnutí obdélníkové desky (viz obrázek) za těchto předpokladů:

(1) materiál je homogenní (tepelná vodivost  $\lambda = \text{konst.}$ ),



Obrázek 6.3: K modelu teplotního pole v obdélníkové desce.

- (2) uvnitř se nenacházejí žádné zdroje tepla,
- (3) strany 1 a 4 jsou tepelně izolované,
- (4) strana 3 je udržována na konstantní teplotě  $T_0$ ,
- (5) na straně 2 dochází k tepelným ztrátám, které jsou vyjádřeny tepelným tokem  $q(y) \geq 0$  v jednotkách  $\text{Wm}^{-2}$ .

Najděte vyjádření pro teplotní pole uvnitř desky a pro níže uvedená data vypočtete a graficky znázorníte teplotní průběh na té straně, kde jsou zadány tepelné ztráty.

Data:  $a = 1$  m,  $b = 2$  m,  $T_0 = 60^\circ\text{C}$ ,  $T_0$ , tepelná vodivost  $\lambda = 2 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$ ,

$$q(y) = \frac{q_0}{b^2}(by - y^2), \quad \text{kde } q_0 = 80 \text{ Wm}^{-2}.$$

#### Bilanční rovnice

Vzhledem k prvním dvěma předpokladům je třeba řešit Laplaceovu diferenciální rovnici pro teplotu  $T(x, y)$  na oblasti  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ , kde  $a, b$  jsou velikosti stran obdélníka:

$$\Delta T(x, y) = 0 \quad \text{na } \Omega. \quad (6.53)$$

#### Okrajové podmínky

Označíme jednotlivé strany ve shodě s číslováním v zadání po řadě celá hranice jej jejich sjednocením,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , takže  $\partial\Omega = \cup\Gamma_i, i = 1, \dots, 4$ .

- Třetí podmínka znamená, že na hranici  $\Gamma_3$  je ideální tepelný kontakt s okolím (Dirichletova podmínka)

$$T = T_0 \quad \text{pro } y = b. \quad (6.54)$$

- Podle čtvrtého předpokladu jsou hranice  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_4$  tepelně izolované; neprochází jimi tedy tepelný tok, a proto se uplatní homogenní Neumannovy podmínky:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{pro } y = 0, \quad (6.55)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{pro } x = 0. \quad (6.56)$$

- Poslední podmínka na hranici  $\Gamma_2$  je Neumannova typu:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q(y) \quad \text{pro } x = a . \quad (6.57)$$

Abychom obdrželi homogenní Dirichletovu podmínku, zavedeme substituci  $T - T_0 = \vartheta$ . Výsledkem je smíšená okrajová úloha pro Laplaceovu rovnici na obdélníku:

$$\Delta \vartheta(x, y) = 0 \quad \text{na } \Omega , \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (6.60)$$

$$\vartheta(x, b) = 0 \quad (6.61)$$

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=a} = q(y) . \quad (6.62)$$

*Separace proměnných – Fourierova metoda*

Řešení hledáme ve tvaru součinu  $\vartheta(x, y) = X(x)Y(y)$ . Konstantu  $\mu^2$  v separované formuli

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \mu^2$$

volíme kladnou, abychom v proměnné  $y$  obdrželi vyjádření prostřednictvím goniometrických funkcí; důvodem je tvar podmínky (6.62). Proto bude

$$X(x) = A \cosh \mu x + B \sinh \mu x , \quad Y(y) = C \cos \mu y + D \sin \mu y . \quad (6.63)$$

*Aplikace hraničních podmínek*

$$(6.59) \quad Y'(y) = \mu(-C \sin \mu y + D \cos \mu y) \Rightarrow 0 = \mu D \quad \text{pro } y = 0 \Rightarrow D = 0;$$

$$(6.60) \quad X'(x) = \mu(A \sinh \mu x + B \cosh \mu x) \Rightarrow 0 = \mu B \quad \text{pro } x = 0 \Rightarrow B = 0;$$

$$(6.61) \quad 0 = C \cos \mu b \Rightarrow \mu_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2b}, \quad k = 1, 2, 3, \dots ,$$

$$\vartheta(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cosh \mu_k x \cos \mu_k y , \quad \alpha_k = A_k C_k .$$

$$(6.62) \quad \lambda \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=a} = q(y) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k \sinh \mu_k a \cos \mu_k y = \frac{q(y)}{\lambda} . \quad (6.64)$$

Systém funkcí  $\{\cos \mu_k y\}_1^\infty$  je ortogonální na  $\langle 0, b \rangle$ , tj.

$$\int_0^b \cos \mu_k y \cos \mu_m y dy = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \frac{b}{2} = \|\cos \mu_k y\|^2, & k = m. \end{cases}$$

Provedeme-li proto v rovnici (6.64) na každé straně skalární součin v  $L^2(\langle 0, b \rangle)$  s funkcí  $\cos \mu_m y$ , dostáváme

$$-\alpha_k \mu_k \sinh \mu_k a \frac{b}{2} = \frac{1}{\lambda} \int_0^b q(y) \cos \mu_k y dy,$$

odkud

$$\alpha_k = -\frac{2q_k}{\lambda b \mu_k \sinh \mu_k a}, \quad q_k = \int_0^b q(y) \cos \mu_k y dy. \quad (6.65)$$

*Výsledné řešení*

Po zpětné substituci a úpravě je teplota vyjádřena rozvojem, který (jak lze ověřit) splňuje rovnici i hraniční podmínky:

$$T(x, y) = T_0 - \frac{2}{\lambda b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\mu_k \sinh \mu_k a} \cosh \mu_k x \cos \mu_k y. \quad (6.66)$$

*Numerická realizace*

Výpočet  $q_k$ :

$$q_k = \frac{q_0}{b^2} \int_0^b (by - y^2) \cos \mu_k y dy = \dots = -\frac{q_0}{b^2} \frac{\mu_k b - 2 \sin \mu_k b}{\mu_k^3}.$$

Teplotní pole:

$$T(x, y) = T_0 + \frac{2q_0}{\lambda b^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k b - 2 \sin \mu_k b}{\mu_k^4 \sinh \mu_k a} \cosh \mu_k x \cos \mu_k y. \quad (6.67)$$

*Teplotní profil pro  $x = a$*

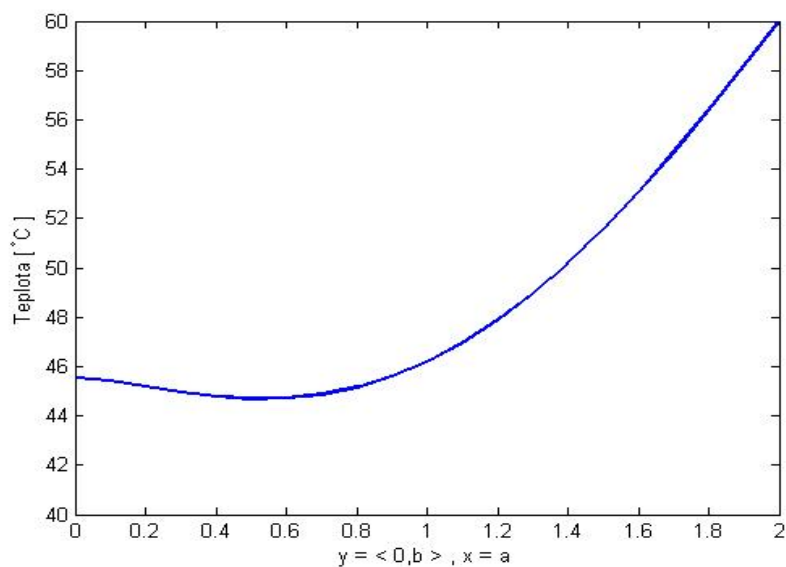
Výpočet se zadanými hodnotami byl proveden v Matlabu pro prvních 10 členů rozvoje (řada rychle konverguje vzhledem ke čtvrté mocnině vlastních čísel ve jmenovateli). Grafický průběh je na obrázku 6.4.

### 6.2.9 Okrajová úloha s nehomogenními podmínkami.

- Výchozí formulace: 1D nestacionární parabolická Dirichletova úloha

$$p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{na } \Omega = \{0 < x < L, t > 0\}$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= g_0(t) \\ u(L, t) &= g_L(t) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$



Obrázek 6.4: Teplotního průběh na ochlazované straně desky.

- Přejít k homogenním podmínkám:

$$u(x, t) = v(x, t) + g_0(t) + \frac{x}{L} (g_L(t) - g_0(t))$$

- Upravená úloha:  $p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$

$$v(0, t) = 0$$

$$v(L, t) = 0$$

$$v(x, 0) = u_0(x) + g_0(0) + \frac{x}{L} (g_L(0) - g_0(0))$$