Matematika I: Pracovní listy

Dagmar Dlouhá, Radka Hamříková, Zuzana Morávková, Michaela Tužilová

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-3323-1

Předmluva

Studijní materiály jsou určeny pro studenty kombinované i prezenční formy vybraných fakult Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava, a to pro předmět Matematika I.

Pracovní listy jsou rozděleny do několika bloků.

Teoretická část (**Pracovní listy k přednáškám**) je určena pro přímou výuku v rámci jednotlivých přednášek. Nejedná se o náhradu skript. Proto nedoporučujeme pročítat tento text bez ilustrací, bez vysvětlení významu vět a bez podpůrných příkladů. A také nedoporučujeme považovat tyto materiály za náhradu účasti na výuce.

Blok obsahující řešené příklady (**Řešené příklady**) je zaměřen především na samostudium.

Listy s neřešenými příklady (**Pracovní listy**) lze využít v rámci cvičení pro studenty prezenčního studia a pro domácí práci studentů kombinované formy.

Blok řešených slovních úloh (**Aplikované úlohy**) slouží k demonstraci vybraného matematického aparátu.

Závěrečný blok (**Testy**) slouží k ověření stupně zvládnutí látky na cvičeních.

Poděkování

Pracovní listy vznikly za finanční podpory projektu FRVŠ 1103/2013 „Vytvoření e-learningových kurzů s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava“ a Katedry matematiky a deskriptivní geometrie VŠB-TUO.

Jak pracovat s pracovními listy

Pokud si vytisknete tyto listy, pak si můžete do svého výtisku vpisovat vysvětlující komentáře a příklady, které uslyšíte na přednášce. Nemusíte se tak zdržovat přepisováním definic a vět, ale můžete se lépe soustředit na jejich pochopení.

Orientaci v textu usnadňuje interaktivní (Obsah). Jednotlivé bloky jsou vzájemně propojeny pomocí interaktivních odkazů (zelená čísla listů). Dále jsou pracovní listy doplněny o komentovaná videa (Video) a interaktivní pomůcky v programu GeoGebra, .

Na webové stránce `http://mdg.vsb.cz/wiki/index.php/MatematikaI` jsou umístěny tyto pracovní listy včetně černobílé verze pro tisk a veškerých doplňujících materiálů.

Příjemně strávený čas s matematikou přeje kolektiv autorek.

Obsah

Matematika I: Listy k přednáškám

Dagmar Dlouhá, Radka Hamříková, Zuzana Morávková, Michaela Tužilová

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Kapitola 1

Funkce jedné proměnné

11 - Množiny čísel

Video

1.1 Úvod

1.1.1 Množiny čísel

Přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
Celá čísla $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Racionální čísla $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\}$
Racionální čísla jsou hustá (tj. mezi dvěma různými racionálními čísly leží nekonečně mnoho racionálních čísel), ale má „mezery“. Vyplněním těchto mezer tzv. čísly **iracionálními** dostaneme množinu reálných čísel.
Reálná čísla $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Poznámka: Racionální čísla jsou vyjádřena konečným desetinným číslem nebo nekonečným periodickým rozvojem. Iracionální čísla jsou vyjádřeny neukončeným desetinným rozvojem a nemají periodu.

1.1.2 Intervaly

Otevřený interval (a, b) je množina všech reálných čísel x, pro které platí $a < x < b$.
Uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ je množina všech reálných čísel x, pro které platí $a \leq x \leq b$.
Zleva otevřený a zprava uzavřený interval $(a, b\rangle$ je množina všech reálných čísel x, pro které platí $a < x \leq b$.
Zleva uzavřený a zprava otevřený interval $\langle a, b)$ je množina všech reálných čísel x, pro které platí $a \leq x < b$.
Interval (a, ∞) je množina všech reálných čísel x, pro které platí $a < x$.
Interval $\langle a, \infty)$ je množina všech reálných čísel x, pro které platí $a \leq x$.
Interval $(-\infty, a)$ je množina všech reálných čísel x, pro které platí $x < a$.
Interval $(-\infty, a\rangle$ je množina všech reálných čísel x, pro které platí $x \leq a$.
Interval $(-\infty, \infty)$ je množina všech reálných čísel.

12 - Kartézský součin, binární relace, zobrazení

Video

1.2 Funkce a její vlastnosti

1.2.1 Definice funkce

Kartézský součin, relace, zobrazení

Definice 1.2.1: Jsou dány dvě množiny A a B. **Kartézským součinem** $A \times B$ nazveme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$.

Definice 1.2.2: **Binární relace** je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$.

Definice 1.2.3: **Zobrazení** z A do B je taková relace, ve které ke každému prvku $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y]$ je prvkem této relace.

Definice funkce

Definice 1.2.4: **Funkce** f na množině $D \subset \mathbb{R}$ je zobrazení, které každému číslu $x \in D$ přiřadí právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$. Zapisujeme:

$$f : y = f(x)\,.$$

Poznámka: $y = f(x)$ je **funkční předpis** vyjadřující závislost y na x.

x je **nezávislá proměnná** (argument) z definičního oboru.

y je **závislá proměnná** z oboru hodnot, vypočítáme ji z funkčního předpisu.

Hodnotu funkce f v bodě x_0 označíme $f(x_0) = y_0$ a nazývá se **funkční hodnota funkce f v bodě x_0**.

13 - Definiční obor

Video **Řešené příklady:** 103, 104, 105 , 106, 107
Příklady: 195, 196, 197

Definiční obory

Definice 1.2.5: Množinu D nazveme **definiční obor funkce** f a značíme D_f nebo $D(f)$.

Obor hodnot funkce f je množina všech $y \in \mathbb{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno $x \in D(f)$ tak, že $y = f(x)$. Značíme H_f nebo $H(f)$.

Grafem funkce f ve zvolené soustavě souřadnic Oxy je množina všech bodů $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$.

Určování definičního oboru:

- *zlomek* - jmenovatel je různý od nuly
- *sudá odmocnina* - výraz pod odmocninou je nezáporný
- *logaritmus* - argument je kladný
- *tangens* - argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$
- *kotangens* - argument je různý od $k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$
- *arkussinus, arkuskosinus* - argument je z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

14 - Operace s funkcemi

Video

1.2.2 Operace s funkcemi

Definice 1.2.6: Jsou dány funkce $g(x)$, $h(x)$ s definičními obory D_g, D_h.
Definujeme operace takto:
Rovnost funkcí: $g = h$
Řekneme, že si jsou dvě funkce rovny, když platí:

$$D_g = D_h \quad \text{a} \quad g(x) = h(x) \text{ pro každé } x \in D_g$$

Součet funkcí: $f = g + h$

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \text{a} \quad D_f = D_g \cap D_h$$

Rozdíl funkcí: $f = g - h$

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad \text{a} \quad D_f = D_g \cap D_h$$

Součin funkcí: $f = g \cdot h$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \text{a} \quad D_f = D_g \cap D_h$$

Podíl funkcí: $f = \dfrac{g}{h}$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{a} \quad D_f = D_g \cap (D_h - \{x \in D_h : h(x) = 0\})$$

15 - Složená funkce

Video
Příklady: 216

1.2.3 Složená funkce

Definice 1.2.7: Říkáme, že funkce f je **složena** z funkcí h a g, právě když platí:

1. $D(f) = \{x \in D(g), g(x) \in D(h)\}$
2. pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = h(g(x))$

Funkci f značíme symbolem $f = h \circ g$.

Poznámka: Skládání funkcí není komutativní $h \circ g \neq g \circ h$.

16 - Vlastnosti funkce: funkce sudá, lichá,periodická

Video **Řešené příklady:** 109,110
Příklady: 214, 215

1.2.4 Vlastnosti funkce

Funkce sudá a lichá

Definice 1.2.8: Funkce f se nazývá **sudá**, právě když zároveň platí:

1. pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$
2. pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y.

Definice 1.2.9: Funkce f se nazývá **lichá**, právě když zároveň platí:

1. pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$
2. pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$

Graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic $[0,0]$.

Periodická funkce

Definice 1.2.10: Funkce f se nazývá **periodická**, právě když existuje takové číslo $p > 0$, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí následující podmínky:

1. je-li $x \in D(f)$, pak také $x + k \cdot p \in D(f)$
2. a platí $f(x + k \cdot p) = f(x)$

Číslo p se nazývá **perioda** funkce f.
Existuje-li nejmenší číslo p, pak jej nazýváme **základní perioda** funkce f.

Poznámka: Graf periodické funkce se pravidelně opakuje po intervalech, jejichž délka je rovna základní periodě p.

17 - Vlastnosti funkce: ohraničená a neohraničená funkce

Video

Ohraničená a neohraničená funkce

Definice 1.2.11: Funkce f se nazývá **ohraničená shora** na množině M, existuje-li takové číslo h, že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq h$.

Definice 1.2.12: Funkce f se nazývá **ohraničená zdola** na množině M, existuje-li takové číslo d, že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq d$.

Definice 1.2.13: Funkce f se nazývá **ohraničená** na množině M, je-li na ní ohraničená shora i zdola.

Poznámka: V opačném případě se nazývá **neohraničená**.

18 - Vlastnosti funkce: monotonnost funkce, funkce rostoucí a klesající

Video

Monotonnost funkce, funkce rostoucí a klesající

Definice 1.2.14: Funkce f se nazývá **rostoucí na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Definice 1.2.15: Funkce f se nazývá **klesající na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Definice 1.2.16: Funkce f se nazývá **neklesající na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definice 1.2.17: Funkce f se nazývá **nerostoucí na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Poznámka: Tyto funkce se nazývají **monotonní** na intervalu I.

Poznámka: Funkce rostoucí a klesající na intervalu I se nazývají **ryze monotonní** na intervalu I.

19 - Vlastnosti funkce: prostá funkce

Video

Prostá funkce

Definice 1.2.18: Funkce f se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

$$\text{je-li } x_1 \neq x_2 \text{ , pak } f(x_1) \neq f(x_2)\,.$$

Věta 1.2.19: *Každá ryze monotonní funkce je prostá.*

Poznámka: Opačné tvrzení neplatí.

20 - Inverzní funkce

Video **Řešené příklady:** 108
Příklady: 217, 218, 219

1.2.5 Inverzní funkce

Definice 1.2.20: Inverzní funkce k prosté funkci $f(x)$ je funkce, která každému $y \in H(f)$ přiřadí právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$. Značíme ji f^{-1}.

Poznámka: Pro definiční obor a obor hodnot platí:

$$D(f^{-1}) = H(f) \qquad H(f^{-1}) = D(f)$$

Dále platí:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \qquad f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

Poznámka: Grafy funkce f a funkce inverzní f^{-1} jsou symetrické podle osy prvního a třetího kvadrantu, tj. přímky $y = x$.

21 - Elementární funkce

Video

1.3 Přehled elementárních funkcí

Základní elementární funkce jsou: $y = c$, $y = x$, $y = \sin(x)$, $y = \mathrm{e}^x$

Definice 1.3.21: Elementární funkci nazveme každou funkci, která vznikne ze základních elementárních funkcí pomocí operací s funkcemi (součet, rozdíl, součin, podíl, složení, inverze).

Elementární funkce jsou funkce:

a) polynomy,

b) exponenciální a logaritmické,

c) obecné mocninné,

d) goniometrické a cyklometrické,

e) hyperbolické a hyperbolometrické, těmito funkcemi se zabývat nebudeme.

1.3.1 Polynomy

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Dále podrobně popíšeme polynomy vybraných typů:

- konstantní funkce $y = a_0 \; n = 0$
- lineární funkce $y = a_0 + a_1x \; n = 1, a_1 \neq 0$
- kvadratická funkce $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \; n = 2, a_2 \neq 0$
- mocninná funkce $y = x^n \; a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0, a_n = 1$

22 - Konstantní funkce, lineární funkce

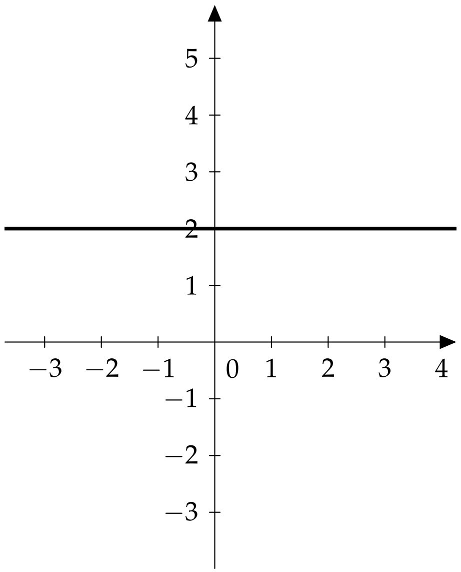
Video

Příklady: 198, 206

Konstantní funkce

$$y = a \quad a \in \mathbb{R}$$

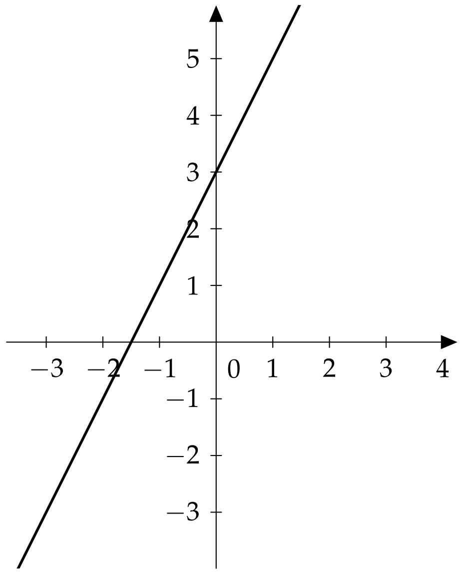
- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \{a\}$
- grafem je přímka rovnoběžná s osou x
- funkce je sudá, ohraničená
- není prostá

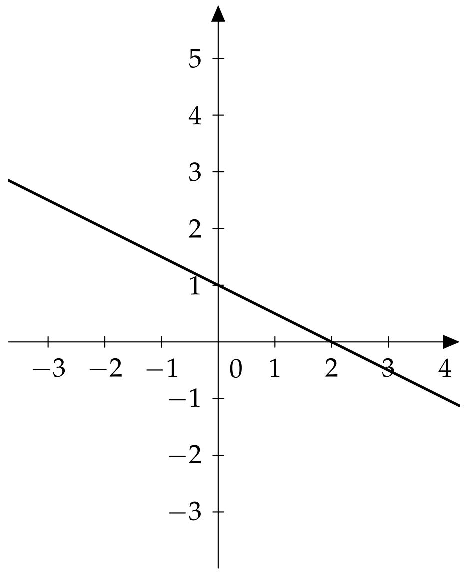


Lineární funkce

$$y = ax + b \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}$
- grafem je přímka, v bodě $[0, b]$ protíná osu y
- funkce je neohraničená
- pro $b = 0$ je funkce $y = ax$ lichá
- funkce je prostá
- pro $a > 0$ je funkce rostoucí
- pro $a < 0$ je funkce klesající





23 - Kvadratická funkce

Video

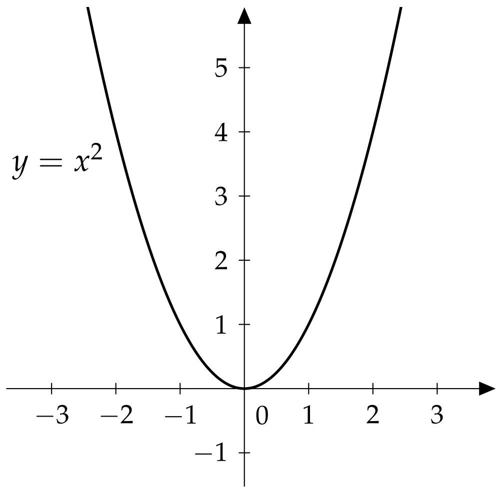
Příklady: 199, 207

Kvadratická funkce

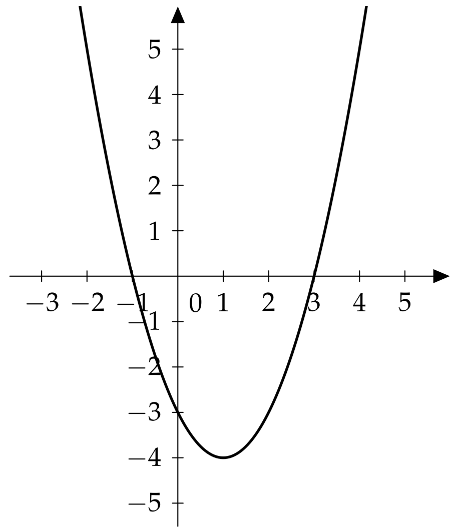
$$y = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

- $D_f = \mathbb{R}$, H_f závisí na funkčním předpisu
- specielně pro $b = 0$ je funkce $y = ax^2 + c$ sudá
- funkce není prostá

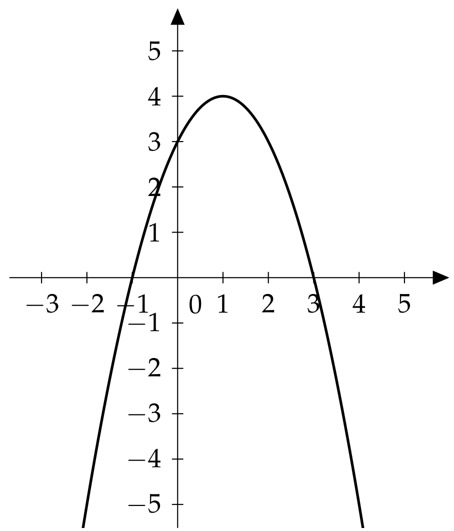
Grafem je parabola, která má vrchol v bodě $\left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$ a v bodě $[0, c]$ protíná osu y.
Průsečíky s osou x jsou řešením kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$:
Diskriminant $D = b^2 - 4ac$:
je-li $D > 0$ jsou dva průsečíky $\left[\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, 0\right]$, $\left[\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, 0\right]$
je-li $D = 0$ je jeden průsečík $\left[\frac{-b}{2a}, 0\right]$
je-li $D < 0$ není žádný průsečík



pro $a > 0$ má parabola konvexní tvar, funkce je ohraničená zdola



pro $a < 0$ má parabola konkávní tvar, funkce je ohraničená shora



24 - Mocninné funkce (s přirozeným exponentem)

Video

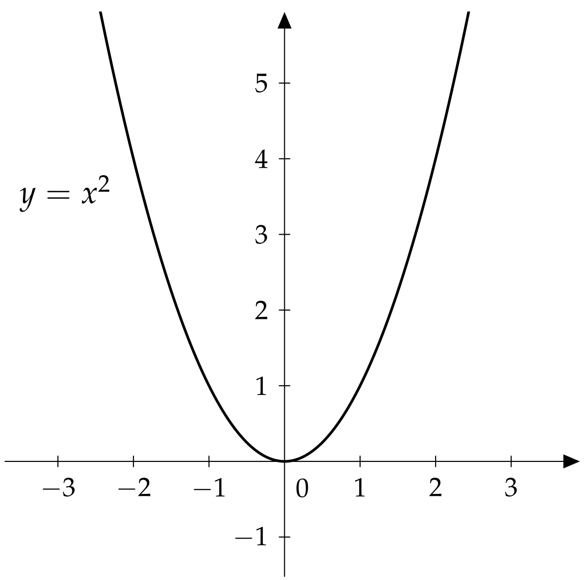
Mocninné funkce (s přirozeným exponentem)

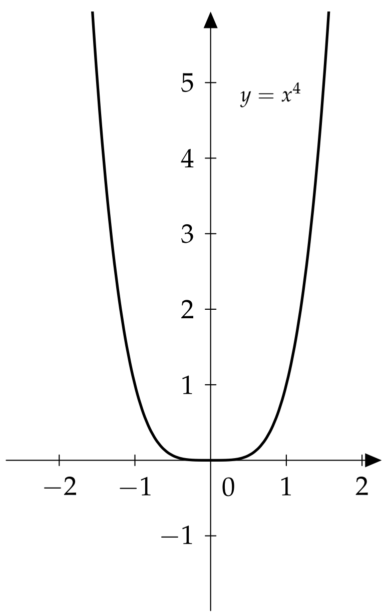
$$y = x^n \quad n \in \mathbb{N}$$

- $D_f = \mathbb{R}$

pro n **sudé**:

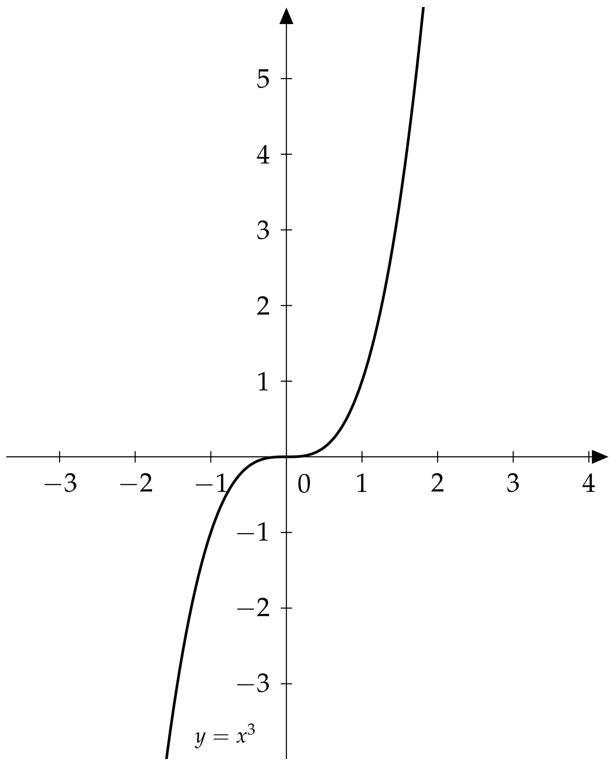
- $H_f = \langle 0, \infty)$
- funkce není prostá
- funkce je sudá, ohraničená zdola





Specielně pro n **liché**:

- $H_f = \mathbb{R}$
- funkce je prostá
- funkce je lichá, neohraničená



25 - Mocninná funkce s celým záporným exponentem

Video

1.3.2 Racionální funkce

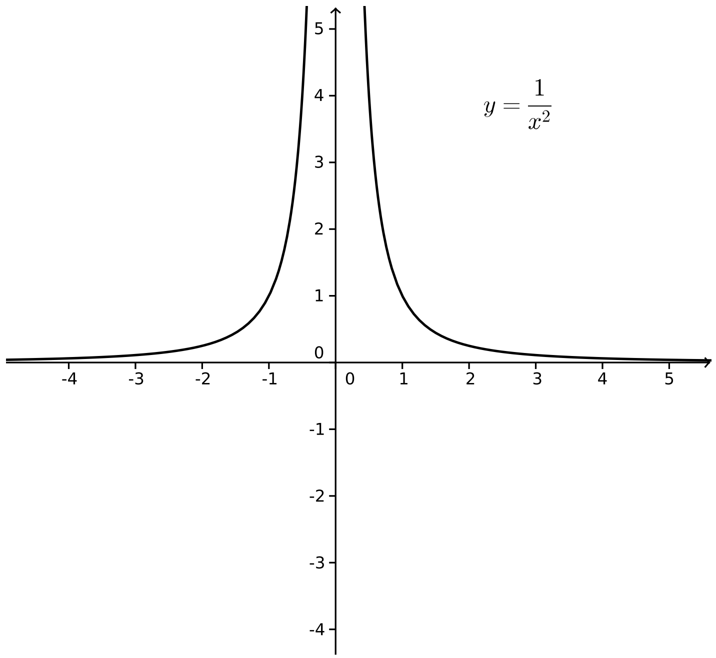
Mocninné funkce s celým záporným exponentem

$$y = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}$$

- $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

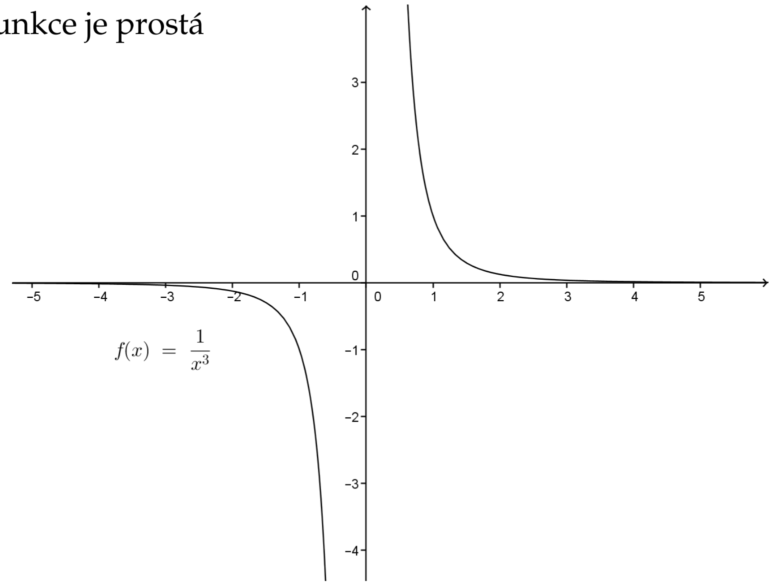
Specielně pro n **sudé**:

- $H_f = (0, \infty)$
- funkce je sudá, ohraničená zdola
- funkce není prostá



Specielně pro n **liché**:

- $H_f = \mathbb{R} - \{0\}$
- funkce je lichá, neohraničená
- funkce je prostá



26 - Lineární lomená funkce

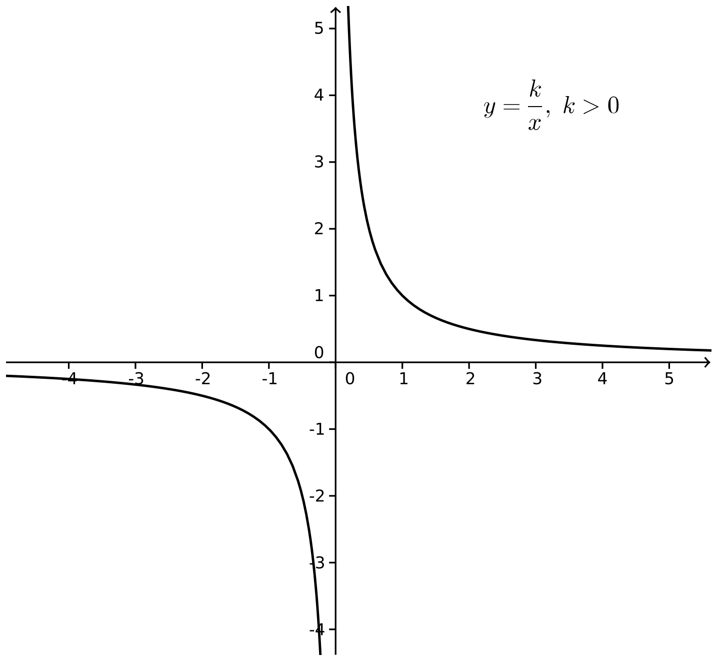
Video
Příklady: 200, 208

Lineární lomená funkce

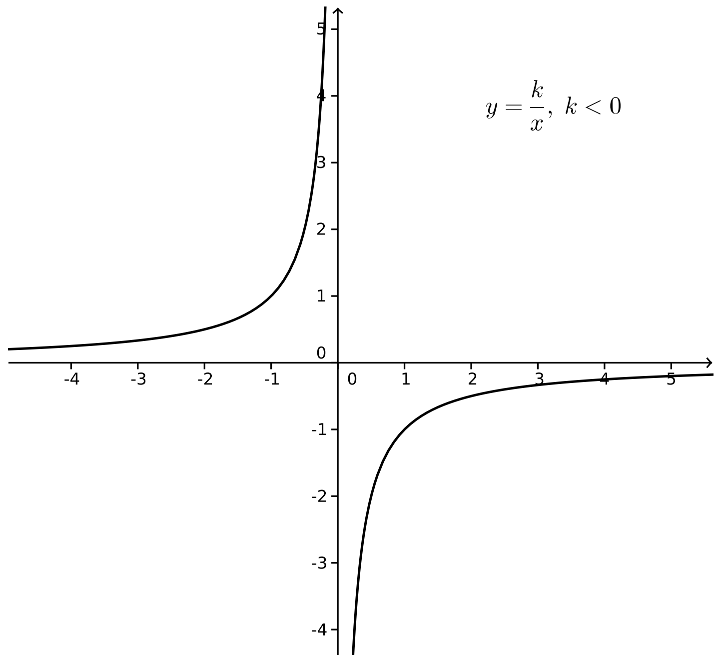
$$y = \frac{k}{x} \quad k \in \mathbb{R},\, k \neq 0$$

- $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $H_f = \mathbb{R} - \{0\}$
- grafem je hyperbola, osy x, y jsou asymptoty hyperboly a střed je $[0, 0]$
- funkce je lichá, neohraničená
- funkce je prostá

pro $k > 0$ leží větve hyperboly v I. a III. kvadrantu, klesá na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$



pro $k < 0$, leží větve hyperboly ve II. a IV. kvadrantu, roste na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$



27 - Funkce odmocnina

Video

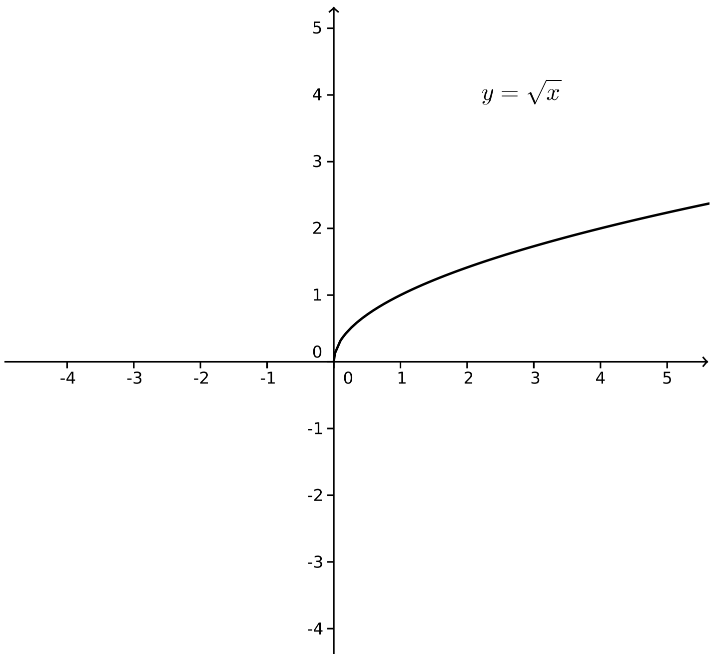
1.3.3 Iracionální funkce

Funkce odmocnina

$$y = \sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N}$$

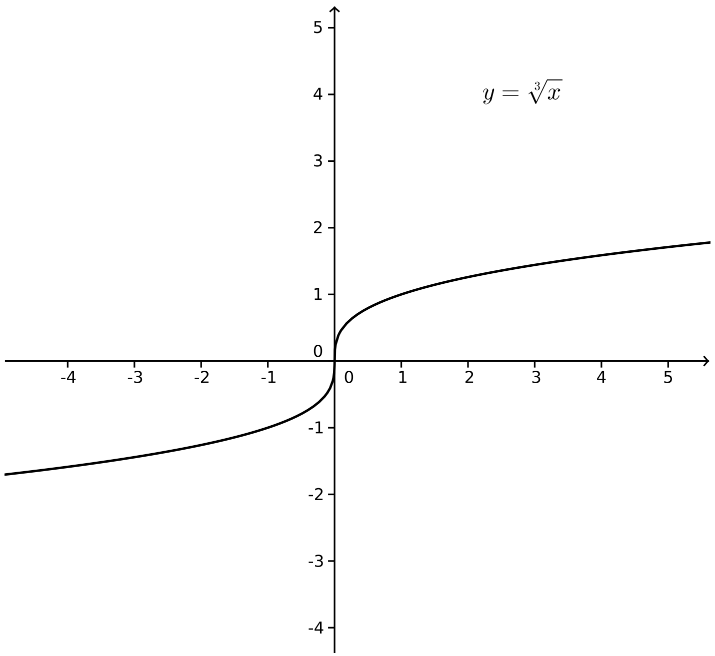
Specielně pro n **sudé**:

- $D_f = \langle 0.\infty)$
- $H_f = \langle 0, \infty)$
- funkce je prostá
- funkce je ohraničená zdola, rostoucí



Specielně pro n **liché**:

- $H_f = \mathbb{R} - \{0\}$
- funkce je prostá
- funkce je lichá, neohraničená



28 - Exponenciální funkce

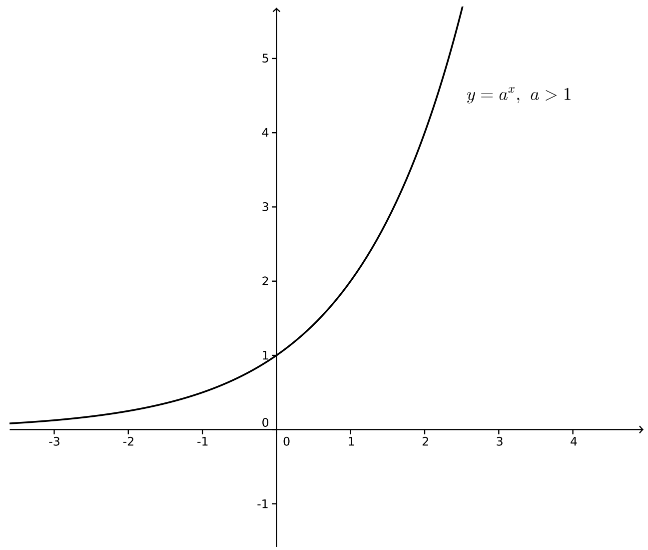
Video
Příklady: 201, 209

1.3.4 Exponenciální funkce

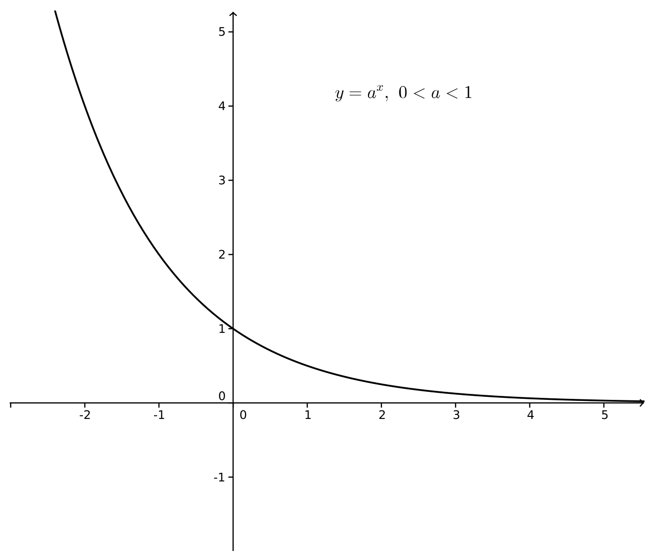
$$y = a^x \quad a > 0\,,\, a \neq 1$$

- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (0, \infty)$
- číslo a se nazývá základ exponenciální funkce
- graf protíná osu y v bodě $[0, 1]$
- funkce není ani sudá ani lichá, je ohraničená zdola
- funkce je prostá (inverzní funkce je funkce logaritmická)
- specielně: Je-li základem Eulerovo číslo $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ pak funkce $y = \mathrm{e}^x$ nazývá **přirozená exponenciální funkce**.

je-li $a > 1$, je funkce rostoucí



je-li $0 < a < 1$, je funkce klesající



29 - Logaritmická funkce

Video
Příklady: 202, 210

1.3.5 Logaritmická funkce

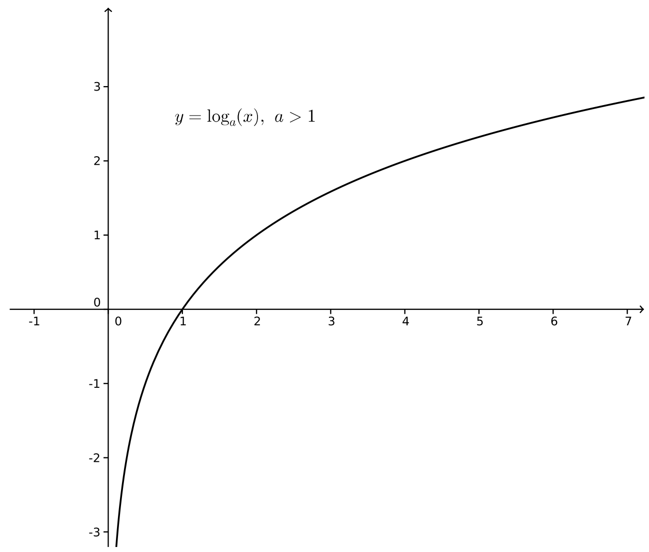
$$y = \log_a(x) \quad a > 0, a \neq 1$$

- $D_f = (0, \infty)$, $H_f = \mathbb{R}$
- číslo a se nazývá základ logaritmické funkce
- graf protíná osu x v bodě $[1, 0]$
- funkce není ani sudá ani lichá, funkce je neohraničená
- funkce je prostá (logaritmická funkce je inverzní k exponenciální)
- specielně: Je-li základem Eulerovo číslo e, pak se funkce značí $y = \ln(x)$ a nazývá **přirozený logaritmus**.
- Je-li základem číslo 10, pak se funkce značí $y = \log(x)$ a nazývá **dekadický logaritmus**.

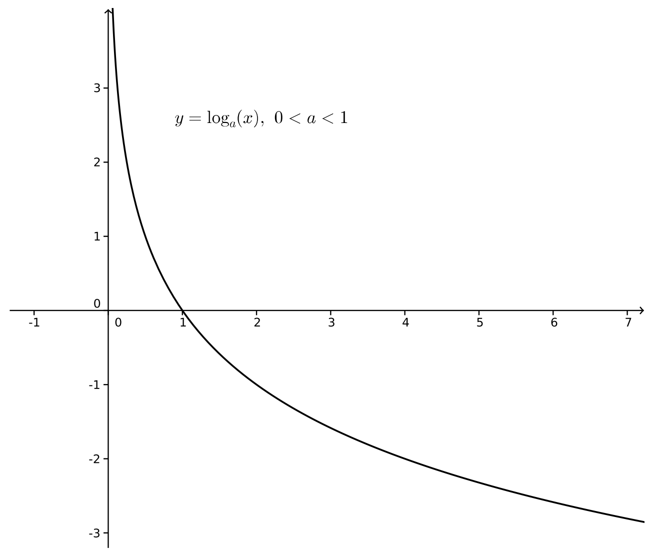
Vzorce pro počítání s logaritmy:

$$\log_a a^x = x$$
$$\log_a(rs) = \log_a r + \log_a s$$
$$\log_a \left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$$
$$\log_a r^n = n \log_a r$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

je-li $a > 1$, je funkce rostoucí



je-li $0 < a < 1$, je funkce klesající



30 - Goniometrické funkce sinus, kosinus

Video

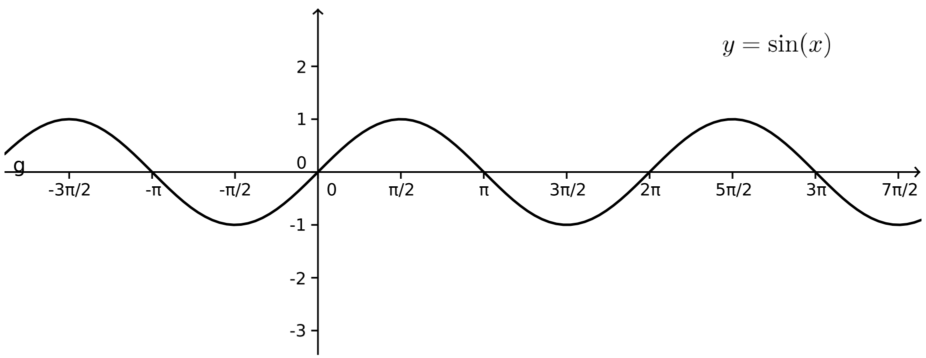
Příklady: 203, 204, 211, 212

1.3.6 Goniometrické funkce

Funkce sinus

$$y = \sin x$$

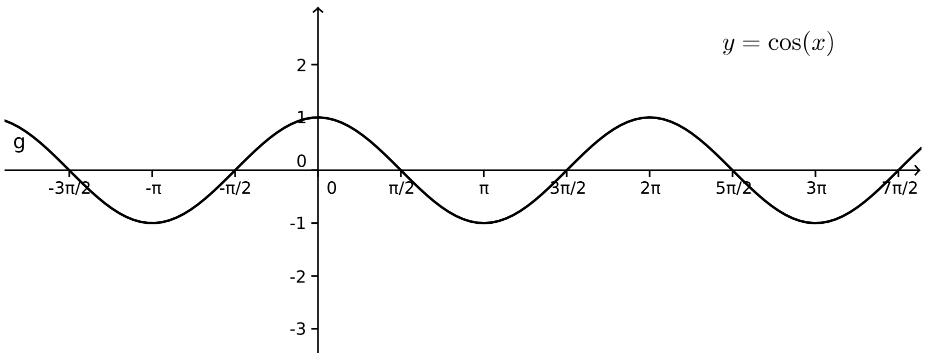
- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -1, 1 \rangle$
- funkce je periodická s periodou 2π
- funkce není prostá, je lichá, je ohraničená
- funkce je rostoucí na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle + 2k\pi$
- funkce je klesající na intervalu $\langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle + 2k\pi$



Funkce kosinus

$$y = \cos x$$

- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -1, 1 \rangle$
- funkce je periodická s periodou 2π
- funkce není prostá, je sudá, je ohraničená
- funkce je rostoucí na intervalu $\langle \pi, 2\pi \rangle + 2k\pi$
- funkce je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle + 2k\pi$



31 - Goniometrické funkce tangens, kotangens

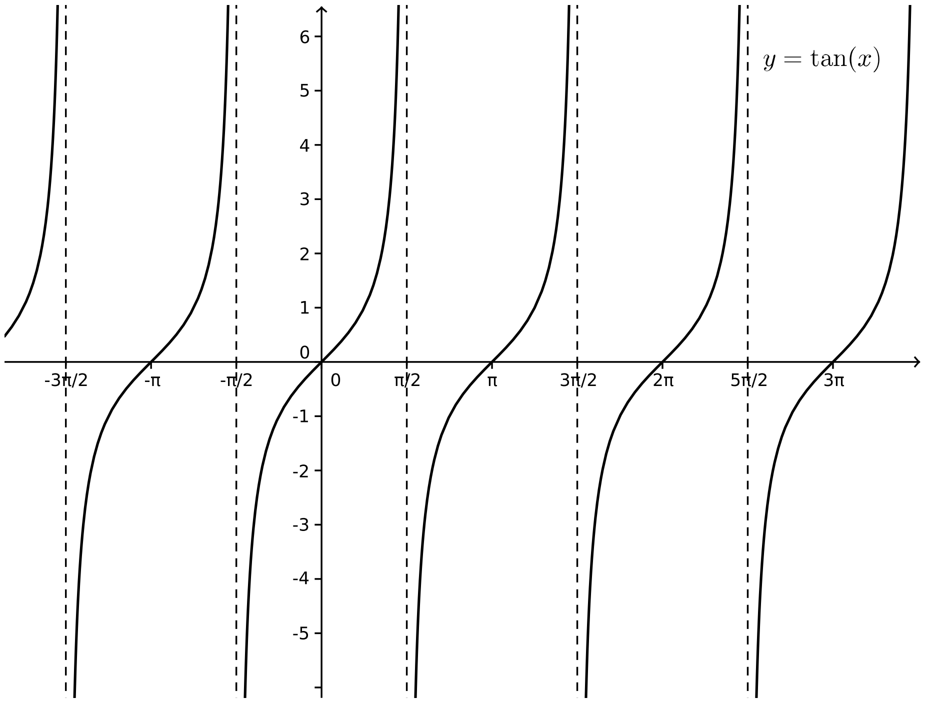
Video

Příklady: 205, 213

Funkce tangens

$$y = \tan x$$

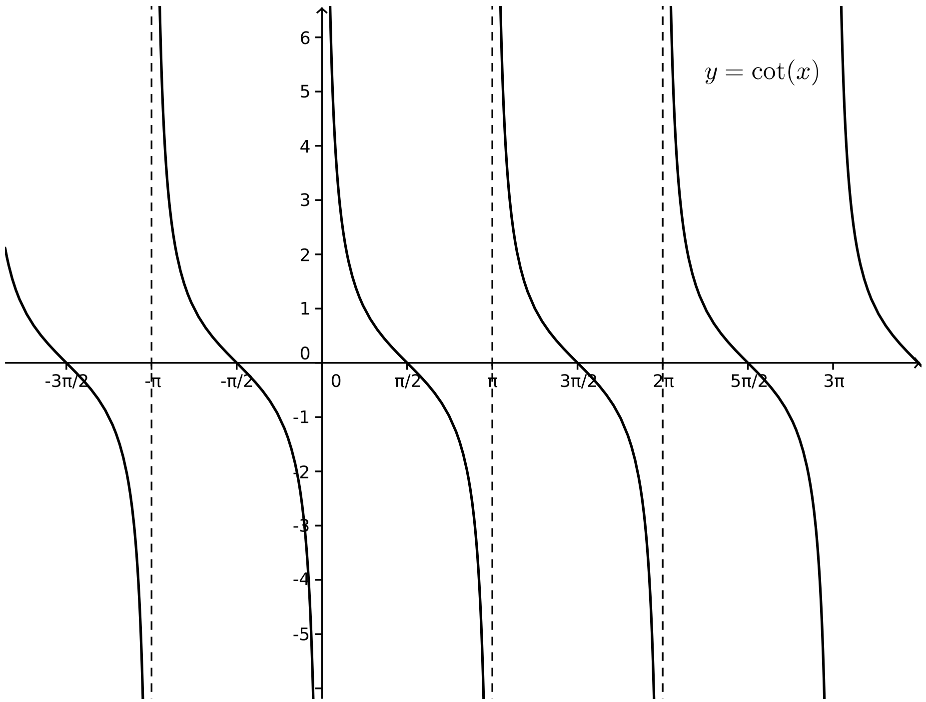
- $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $H_f = \mathbb{R}$
- funkce je periodická s periodou π
- funkce je lichá, je neohraničená
- funkce je rostoucí na intervalu $(-\pi/2, \pi/2) + k\pi$
- funkce není prostá



Funkce kotangens

$$y = \cot x$$

- $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $H_f = \mathbb{R}$
- funkce je periodická s periodou π, lichá, neohraničená
- funkce je klesající na intervalu $(0, \pi) + k\pi$
- funkce není prostá



32 - Cyklometrická funkce arkussinus

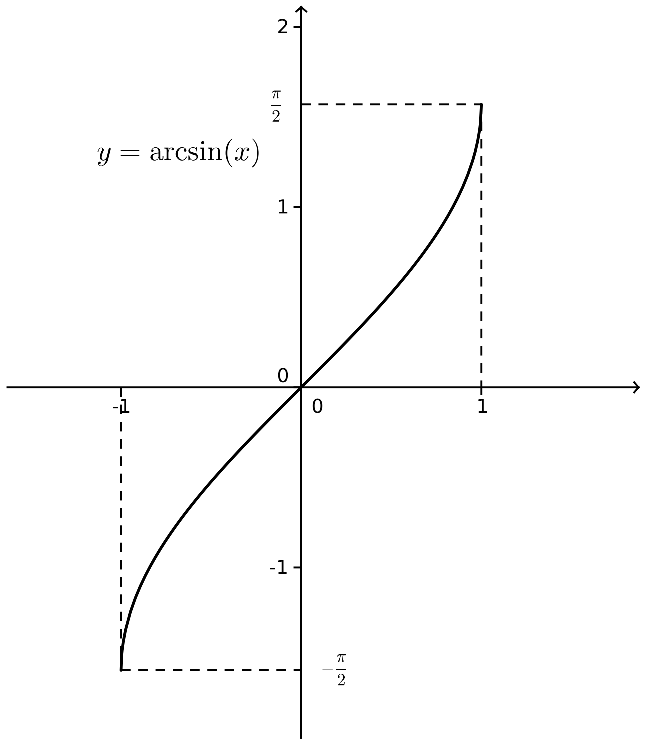
Video

1.3.7 Cyklometrické funkce

Funkce arkussinus

$$y = \arcsin x$$

- inverzní k funkci $y = \sin(x)$ na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
- $D_f = \langle -1, 1 \rangle$, $H_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
- funkce je prostá, lichá, ohraničená, rostoucí



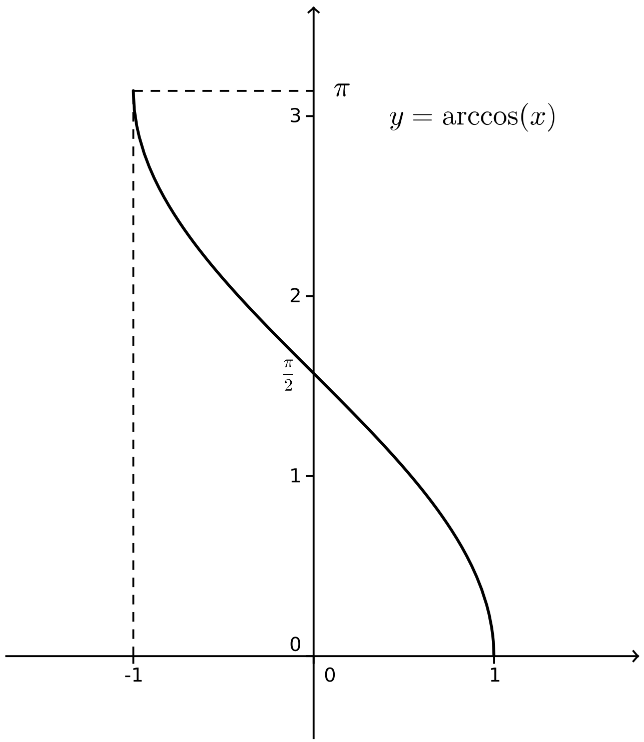
33 - Cyklometrická funkce arkuskosinus

Video

Funkce arkuskosinus

$$y = \arccos x$$

- inverzní k funkci $y = \cos(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$
- $D_f = \langle -1, 1 \rangle$, $H_f = \langle 0, \pi \rangle$
- funkce je prostá, ohraničená, klesající



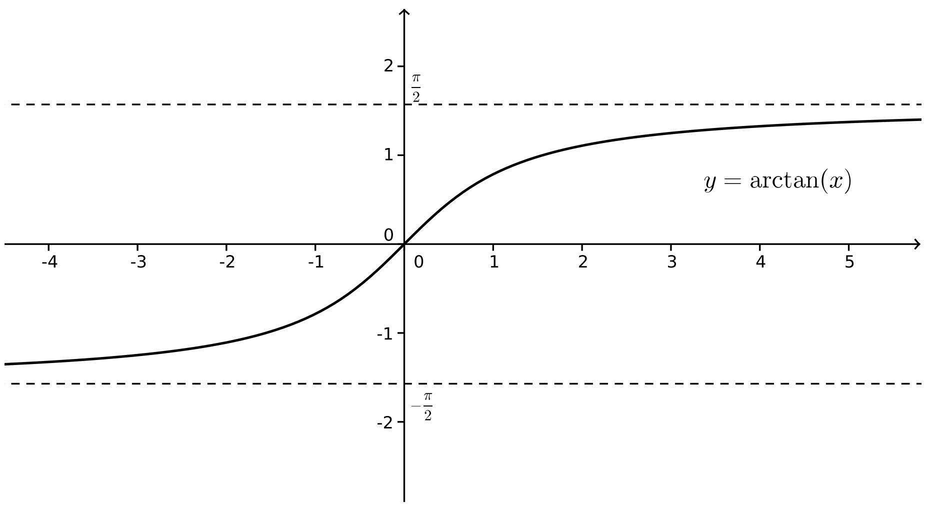
34 - Cyklometrická funkce arkustangens

Video

Funkce arkustangens

$$y = \arctan x$$

- inverzní k funkci $y = \tan(x)$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- funkce je lichá, ohraničená, rostoucí
- funkce je prostá



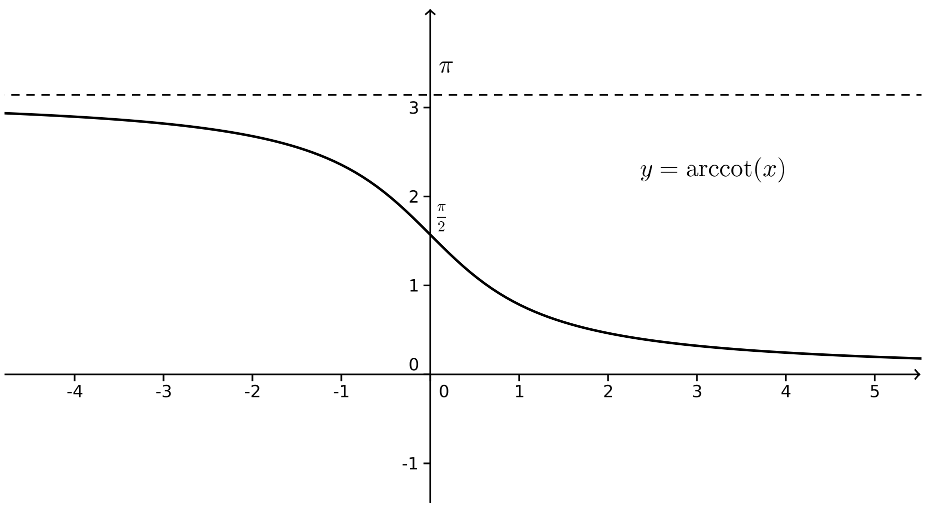
35 - Cyklometrická funkce arkuskotangens

Video

Funkce arkuskotangens

$$y = \operatorname{arccot} x$$

- inverzní k funkci $y = \cot(x)$ na intervalu $(0, \pi)$
- $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (0, \pi)$
- funkce je ohraničená, klesající
- funkce je prostá



36 - Množina $\mathbb{R}^\star$

Video **Řešené příklady:** 111 - 123
Příklady: 220 - 223

1.4 Limita a spojitost

1.4.1 Limita funkce

Rozšíření množiny reálných čísel

Definice 1.4.22: Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšíříme o prvky $\infty, -\infty$ a nazveme **rozšířená množina reálných čísel** $\mathbb{R}^\star$:

$$\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme **nevlastní body**, body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **vlastní body**.

Vlastnosti množiny $\mathbb{R}^\star$

Pro $c \in \mathbb{R}$ definujeme: $-\infty < c < \infty$
Součet a rozdíl
$c + \infty = \infty \quad c - \infty = -\infty \quad \infty + \infty = \infty \quad -\infty - \infty = -\infty$

Podíl $\quad \dfrac{c}{\infty} = 0 \qquad \dfrac{c}{-\infty} = 0$

Součin
$\infty \cdot \infty = \infty \qquad \infty \cdot (-\infty) = -\infty \qquad -\infty \cdot (-\infty) = \infty$
pro $c > 0$ platí $c \cdot \infty = \infty \qquad c \cdot (-\infty) = -\infty$
pro $c < 0$ platí $c \cdot \infty = -\infty \qquad c \cdot (-\infty) = \infty$
Další operace definujeme pomocí komutativnosti sčítání a násobení.

Poznámka: Výrazy

$$\infty - \infty,\ \infty \cdot 0,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

nejsou definovány a nazveme je **neurčité výrazy**.

37 - Okolí bodu

Video **Řešené příklady:** 111 - 123
Příklady: 220 - 223

Okolí bodu

Definice 1.4.23: **Okolím bodu** $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme interval bodů, které mají od bodu x_0 vzdálenost menší než δ, tedy:

$$O(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Prstencovým okolím bodu nazveme množinu $O(x_0) \setminus \{x_0\}$, značíme $P(x_0)$.

$$P(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

Okolím bodu ∞ rozumíme libovolný interval tvaru (A, ∞), kde A je reálné číslo:

$$O(\infty) = (A, \infty)$$

Okolím bodu $-\infty$ rozumíme libovolný interval tvaru $(-\infty, A)$, kde A je reálné číslo:

$$O(\infty) = (-\infty, A)$$

Poznámka: Prstencová okolí bodu $\pm\infty$ jsou stejná jako okolí těchto bodů.

Jednostranné okolí bodu

Definice 1.4.24: **Pravým okolím bodu** $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme interval:

$$O^+(x_0) = \langle x_0, x_0 + \delta)$$

Levým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme interval:

$$O^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0\rangle$$

Pravým (levým) prstencovým okolím bodu nazveme interval:

$$P^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta) \qquad P^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$$

38 - Limita funkce

Video **Řešené příklady: 111 - 123**
Příklady: 220 - 223

Definice limity funkce

Definice 1.4.25: Nechť je dána funkce f a body $x_0 \in \mathbb{R}^\star$, $L \in \mathbb{R}^\star$. Nechť je funkce f definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu x_0. Řekneme, že **funkce** f **má v bodě** x_0 **limitu rovnu** L, jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro libovolné $x \in P(x_0)$ leží hodnota $f(x)$ v $O(L)$. Značíme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Poznámka: Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ řekneme že má funkce **vlastní (konečnou) limitu**.
Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ řekneme že má funkce **nevlastní (nekonečnou) limitu**.
Pokud $x_0 = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R}$ řekneme že má funkce **vlastní (konečnou) limitu v nevlastním bodě**.
Pokud $x_0 \pm \infty$, $L = \pm\infty$ řekneme že má funkce **nevlastní (nekonečnou) limitu v nevlastním bodě**.

Definice jednostranné limity funkce

Definice 1.4.26: Nechť je dána funkce f a body $x_0 \in \mathbb{R}^\star$, $L \in \mathbb{R}^\star$. Nechť je funkce f definovaná na nějakém pravém (resp. levém) prstencovém okolí bodu x_0. Řekneme, že **funkce** f **má v bodě** a **limitu zprava (resp. zleva) rovnu** L, jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje pravé (resp. levé) prstencové okolí $P^+(x_0)$ (resp. $P^-(x_0)$) bodu x_0 takové, že pro libovolné $x \in P^+(x_0)$ (resp. $P^-(x_0)$) leží hodnonta $f(x)$ v $O(L)$. Značíme:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \qquad (\text{resp. } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L)$$

39 - Existence limity, operace s limitami

Video **Řešené příklady:** 111 - 123
Příklady: 220 - 223

Věta 1.4.27: *Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu limitu.*

Poznámka: Má i nejvýše jednu limitu zleva a nejvýše jednu limitu zprava.

Věta 1.4.28: *Funkce f má v bodě x_0 limitu právě tehdy, má-li v tomto bodě limitu zprava i zleva a tyto limity se rovnají.*

Operace s limitami

Věta 1.4.29: *Nechť mají funkce $f(x)$ a $g(x)$ limitu v bodě x_0 pak platí:*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\textit{pokud platí } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0 \textit{ pak } \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Věta 1.4.30: *Nechť je dána složená funkce $y = h(g(x))$ a nechť dále $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ a $\lim\limits_{x\to a} h(x) = c$, tak že platí $x \neq x_0$ a $g(x) \neq a$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} h(g(x)) = c$.*

40 - Vybrané limity

Video **Řešené příklady: 111 - 123**
Příklady: 220 - 223

Vybrané limity

Typ limity „$\frac{k}{0}$“

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k,\ k>0\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0, g(x)>0 \text{ na okolí bodu } x_0\end{array}\right\}\text{pak } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

symbolicky značíme $\frac{k^+}{0^+}=\infty$ $\frac{k^-}{0^+}=-\infty$ $\frac{k^+}{0^-}=-\infty$ $\frac{k^-}{0^-}=\infty$

Limity elementárních funkcí

$$\begin{array}{ll}
\lim\limits_{x\to\infty} x^n=\infty & \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty\\
\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty & \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty\\
\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0 & \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\\
\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x=0 & \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x=\infty\\
\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty & \lim\limits_{x\to\infty} \ln x=\infty
\end{array}$$

Další důležité limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{kx}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(kx)}{kx}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\mathrm{e}^k, \text{ kde } k\in\mathbb{R}$$

41 - Spojitost

1.4.2 Spojitost

Definice spojitosti

Definice 1.4.31: Nechť funkce $f(x)$ je definována na nějakém okolí bodu x_0 a platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

pak řekneme, že **funkce** $f(x)$ **je spojitá v bodě** x_0.

Poznámka: Obdobně definujme spojitost zprava nebo zleva.

Definice 1.4.32: Nechť $I \subseteq D_f$, řekneme, že **funkce je spojitá na intervalu** I, je-li spojitá v každém bodě intervalu I. Patří-li do intervalu dolní mez intervalu, je v něm spojitá zprava, a patří-li do něj horní mez intervalu, je v něm spojitá zleva.

Věta 1.4.33: *Všechny elementární funkce jsou spojité na svém definičním oboru.*

Body nespojitosti

Bod, ve kterém funkce není spojitá, nazýváme **bod nespojitosti**.

42 - Věty o spojitých funkcích

Věty o spojitých funkcích

Věta 1.4.34: *Weistrassova*
Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak f je na tomto intervalu ohraničená.

Poznámka: Funkce f nabývá na intevralu svého minima a maxima.

Věta 1.4.35: *Bolzano-Cauchyho*
Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a) \neq f(b)$. Číslo c leží mezi hodnogtami $f(a)$ a $f(b)$. Pak existuje aspoň jedno $x_0 \in (a, b)$, pro které platí $f(x_0) = c$.

Poznámka: Zvolme $c = 0$.
Je-li funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ opačná znaménka. Pak existuje aspoň jedno $x_0 \in (a, b)$, pro které platí $f(x_0) = 0$.

Kapitola 2

Diferenciální počet funkce jedné proměnné

44 - Definice derivace

Video **Řešené příklady:** 125,126, 127, 128
Příklady: 225, 226, 227, 228, 229

2.1 Diferenciální počet

2.1.1 Derivace funkce

Definice derivace

Definice 2.1.36: Je dána funkce f a bod $x_0 \in D_f$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pak ji nazveme **derivace funkce** f **v bodě** x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Věta 2.1.37: *Existuje-li v bodě x_0 derivace funkce f, pak je v tomto bodě funkce spojitá.*

Definice 2.1.38: Funkce f je definována v každém bodě intervalu (a, b) a má v každém bodě derivaci $f'(x)$. Pak je na (a, b) definovaná funkce f', která každému $x \in (a, b)$ přiřadí hodnotu $f'(x)$. Tuto funkci nazveme **derivace** funkce f. Značíme $f'(x)$, y' $\frac{d f(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.

Poznámka: Má-li funkce f derivaci na intervalu, pak říkáme že je na tomto intervalu **diferencovatelná**.

45 - Vlastnosti derivace

Video **Řešené příklady:** 125,126, 127, 128
Příklady: 225, 226, 227, 228, 229

Vlastnosti derivace

Věta 2.1.39: *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají na intervalu derivaci. Pak na tomto intervalu platí:*

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$$

Derivace součtu

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

Derivace součinu

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Derivace podílu

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{pro } g(x) \neq 0$$

46 - Derivace elementarních funkcí

Video **Řešené příklady:** 125,126, 127, 128
Příklady: 225, 226, 227, 228, 229

Derivace elementarních funkcí

Derivace konstantní funkce

$$[c]' = 0$$

Derivace mocninné funkce

$$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$$

Derivace exponenciální funkce

$$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x \qquad [\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x \cdot \ln(a)$$

Derivace logaritmické funkce

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x} \qquad [\log_a(x)]' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Derivace goniometrických funkcí

$$[\sin(x)]' = \cos(x) \qquad [\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$[\cos(x)]' = -\sin(x) \qquad [\cot(x)]' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Derivace cyklometrických funkcí

$$[\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [\arctan(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$[\arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [\mathrm{arccot}(x)]' = -\frac{1}{1+x^2}$$

47 - Derivace složené funkce

Video **Řešené příklady:** 125,126, 127, 128, 129, 130
Příklady: 230, 231, 232

Derivace složené funkce

Věta 2.1.40: ***(derivace složené funkce)***
Nechť existuje derivace $g'(x_0)$ a derivace $f'(g(x_0))$. Pak existuje derivace složené funkce $f(g(x)$ v bodě x_0 a platí:

$$[f(g(x_0))]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\,.$$

Poznámka: Na intervalu, kde existují příslušné derivace tedy platí:

$$y = f(g(x)) \implies y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivace složené funkce je rovna součinu derivace vnější funkce (s původním argumentem) a derivace vnitřní funkce.

48 - Logaritmické derivování

Video **Řešené příklady: 131**
Příklady: 234

Logaritmické derivování

Funkci $y = f(x)^{g(x)}$ nelze derivovat jako $y = x^n$ (neboť exponent není konstanta) ani jako $y = a^x$ (základ není konstanta). Funkci upravíme do tvaru, který umožní použít vzorce pro derivování.

Funkci $y = f(x)^{g(x)}$ upravíme:

$$y = f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = \mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}.$$

Nyní funkci v tomto tvaru zderivujeme:

$$\begin{aligned} y' &= \left[\mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}\right]' = \\ &= \mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}\left(g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right) = \\ &= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \end{aligned}$$

49 - Derivace vyšších řádů

Video **Řešené příklady:** 132, 133, 134
Příklady: 233

Derivace vyšších řádů

Definice 2.1.41: Nechť má funkce $f(x)$ derivaci v intervalu I. Pak funkci $[f'(x)]'$ nazveme **druhou derivaci funkce** a značíme $f''(x)$.

Poznámka: Obdobně definujeme derivaci n-tého řádu

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' .$$

50 - Derivace paramatericky zadané funkce

Video **Řešené příklady:** 135,136
Příklady: 235, 236

Derivace paramatericky zadané funkce

Definice 2.1.42: Jsou dány funkce $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in I$ je parametr. Nechť existuje φ^{-1}. Pak funkci

$$y = f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$$

nazveme **parametricky zadanou funkcí**.

Věta 2.1.43: *Funkce f je dána parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in I$. Nechť $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají derivaci v každém bodě intervalu I. Pak* ***derivace parametricky zadané funkce*** *f je dána vztahem:*

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}$$

Poznámka: Derivaci podle t značíme tečkou, abychom ji odlišili od derivace podle x, kterou značíme čárkou.

Věta 2.1.44: *Funkce f je dána parametricky rovnicemi $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in I$. Nechť $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají první a druhou derivaci v každém bodě intervalu I. Pak* ***druhá derivace parametricky zadané funkce*** *f je dána vztahem:*

$$y'' = \frac{\ddot{\psi}(t) \cdot \dot{\varphi(t)} - \dot{\psi}(t) \cdot \ddot{\varphi}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^3}$$

51 - Tečna a normála

Video **Řešené příklady:** 138, 139
Příklady: 237,238,239, 240

2.1.2 Využití derivace

Tečna a normála

Definice 2.1.45: Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci. Přímku t, procházející bodem $[x_0; f(x_0)]$ a mající směrnici rovnu hodnotě derivace v x_0 nazveme **tečna ke grafu funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0.
Přímku n, procházející bodem $[x_0; f(x_0)]$ a kolmou k tečně nazveme **normála ke grafu funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0.

Věta 2.1.46: *Tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 je daná předpisem:*

$$t:\ y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Normála ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 je daná předpisem:

$$n:\ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Poznámka: V bodě ve kterém nemá funkce derivaci tečna neexistuje.

52 - Taylorův polynom

Video **Řešené příklady:** 140, 141
Příklady: 241,242

Taylorův polynom

Často potřebujeme funkci $f(x)$ nahradit v okolí bodu x_0 jednodušší funkcí, například polynomem stupně n. Požadujeme, aby hledaný polynom a funkce $f(x)$ měli v bodě x_0 stejné hodnoty derivací až do řádu n.

Definice 2.1.47: Nechť je dána funkce $f(x)$, která má v bodě $x_0 \in D_f$ derivace až do řádu $n \in \mathbb{N}$. Pak polynom:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazveme **Taylorův polynom funkce** $f(x)$ **stupně** n **v bodě** x_0.

Poznámka: 1. Taylorův polynom prvního stupně je tečna.

2. Speciálně v bodě $x = 0$ nazveme polynom **Maclaurinův polynom**.

53 - l'Hospitalovo pravidlo

Video **Řešené příklady:** 142, 143
Příklady: 243,244

l'Hospitalovo pravidlo

V kapitole o limitách jsme uvedli několik vět, podle kterých jsme počítali limity. V některých případech však tyto věty nelze použít. Nyní si ukážeme jak spočítat limity typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Věta 2.1.48: *Nechť*

1. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$
   (nebo $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \pm\infty$ *)*

2. *existuje* $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

pak existuje limita $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$ *a je rovna číslu* A*. Tedy*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Poznámka: Limity vedoucí na neurčité výrazy typu

$$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{\infty},\ 0^{\infty}$$

lze převést na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ a pak řešit l'Hospitalovým pravidlem

54 - Věty o derivaci

Video

Věty o derivaci

Věta 2.1.49: ***(Rolleova věta)***
Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má v intervalu (a, b) derivaci. Nechť dále platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje aspoň jedno $c \in (a, b)$, takové že:

$$f'(c) = 0\,.$$

Poznámka: V bodě c je tečna rovnoběžná s osou x.

Věta 2.1.50: ***(Lagrangeova věta o střední hodnotě)***
Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má v intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje aspoň jedno $c \in (a, b)$, takové že:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Poznámka:

1. V bodě c je tečna rovnoběžná se spojnicí bodů $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$.
2. Platí-li $f(a) = f(b)$ dostaneme Rolleovu větu.

55 - Monotonnost funkce

Video **Řešené příklady:** 144, 145, 146, 147
Příklady: 245, 246, 247, 248

2.1.3 Průběh funkce

Monotonnost funkce

Věta 2.1.51: *Platí-li $f'(x_0) > 0$, pak je funkce v tomto bodě rostoucí. Platí-li $f'(x_0) < 0$, pak je funkce v tomto bodě klesající.*

Věta 2.1.52: *Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu I a platí-li na tomto intervalu $f'(x) > 0$, pak je funkce $f(x)$ na tomto intervalu rostoucí. Platí-li $f'(x) < 0$, pak je funkce klesající.*

Poznámka: Intervaly, na kterých je funkce rostoucí nebo klesající nazveme **intervaly monotonnosti**.

56 - Extrémy funkce

Video **Řešené příklady:** 144, 145, 146, 147
Příklady: 245, 246, 247, 248

Extrémy funkce

Definice 2.1.53: Řekneme, že funkce $f(x)$ má **v bodě** x_0 **lokální maximum**, existuje-li takové okolí bodu x_0, že pro všechna $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí $f(x) \leq f(x_0)$. Platí-li $f(x) < f(x_0)$, pak řekneme, že má **ostré lokální maximum**.

Definice 2.1.54: Řekneme, že funkce $f(x)$ má **v bodě** x_0 **lokální minimum**, existuje-li takové okolí bodu x_0, že pro všechna $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí $f(x) \geq f(x_0)$. Platí-li $f(x) > f(x_0)$, pak řekneme, že má **ostré lokální minimum**.

Poznámka: Má-li funkce v bodě lokální maximum nebo lokální minimum, říkáme, že má v bodě **lokální extrém**. Má-li funkce v bodě ostré lokální maximum nebo ostré lokální minimum, říkáme, že má v bodě **ostrý lokální extrém**.

57 - Výpočet extrémů funkce

Video **Řešené příklady:** 144, 145, 146, 147
Příklady: 245, 246, 247, 248

Věta 2.1.55: ***(nutná podmínka existence lokálního extrému)***
Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace. Pak platí:

$$f'(x_0) = 0\,.$$

Poznámka: Funkce může mít lokální extrém pouze v bodech, ve kterých buď neexistuje derivace nebo je derivace rovna nule.

Definice 2.1.56: Bod ve kterém platí $f'(x_0) = 0$ nazveme **stacionárním bodem**.

Věta 2.1.57: *Nechť platí $f'(x_0) = 0$ a existuje druhá derivace $f''(x_0)$. Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum. Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum.*

Poznámka: V bodech, ve kterých je $f''(x) = 0$ nelze existenci lokálního extrému vyšetřit podle této věty a je nutno použít jiný postup.

Postup při určování lokálních extrémů

1. Určíme derivaci funkce.
2. Najdeme body ve kterých derivace neexistuje a stacionární body.
3. Určíme znaménko derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě 2. Kde je $f'(x) > 0$ je funkce rostoucí a kde je $f'(x) < 0$ je funkce klesající.
4. Lokální maximum je v bodech, ve kterých funkce přechází z rostoucí na klesající. Lokální minimum je v bodech, ve kterých funkce přechází z klesající na rostoucí.

58 - Konvexnost a konkávnost

Video **Řešené příklady:** 148
Příklady: 249, 250

Konvexnost a konkávnost

Definice 2.1.58: Necht má funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0. Řekneme, že **funkce** $f(x)$ **je v bodě** x_0 **konvexní (resp. konkávní)**, jestliže existuje okolí bodu takové, že pro všechny x z tohoto okolí je graf funkce nad (resp. pod) tečnou:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

resp.

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Definice 2.1.59: Řeknem, že **funkce** $f(x)$ **je konvexní (resp. konkávní) v intervalu** $I \subset D_f$. Jestliže je konvexní (resp. konkávní) v každém bodě intervalu I.

Věta 2.1.60: *Nechť $f''(x_0) > 0$, pak je $f(x)$ v bodě x_0 konvexní.*
Nechť $f''(x_0) < 0$, pak je $f(x)$ v bodě x_0 konkávní.

59 - Inflexní body

Video **Řešené příklady:** 148
Příklady: 249, 250

Inflexní body

Definice 2.1.61: Nechť má funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0. Přecházi-li graf funkce v bodě x_0 z polohy pod tečnou do polohy nad tečnou (nebo naopak) nazveme bod x_0 **inflexním bodem** funkce $f(x)$.

Věta 2.1.62: ***(nutná podmínka existence inflexního bodu)***
Je-li x_0 inflexní bod funkce $f(x)$ a má-li $f(x)$ v tomto bodě druhou derivaci, pak

$$f''(x_0) = 0\,.$$

Poznámka: Funkce může mít inflexi pouze v bodech, ve kterých buď neexistuje druhá derivace nebo je druhá derivace rovna nule.

Věta 2.1.63: *Je-li $f'(x)$ spojitá v x_0 a druhá derivace $f''(x)$ mění v x_0 znaménko, pak x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$.*

Poznámka: Změna znaménka druhé derivace znamená změnu konvexnosti na konkávnost (nebo naopak).

60 - Inflexní body

Video **Řešené příklady:** 148
Příklady: 249, 250

Postup při určování inflexních bodů

1. Určíme druhou derivaci funkce.
2. Najdeme body ve kterých drihá derivace neexistuje nebo je rovna nule.
3. Určíme znaménko druhé derivace v intervalech s krajními body získanými v bodě 2. Kde je $f''(x) > 0$ je funkce konvexní a kde je $f''(x) < 0$ je funkce konkávní
4. Inflexní body jsou ty body, ve kterých druhá derivace mění znaménko, tedy funkce přechází z konvexní na konkávní nebo naopak.

61 - Asymptoty

Video **Řešené příklady:** 149, 150
Příklady: 251, 252

Asymptoty

Asymptoty jsou přímky, ke kterým se „blíží“ graf funkce.

Definice 2.1.64: Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na okolí nekonečna. Říkáme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptota se směrnicí** (v nekonečnu), jestliže existují vlastní limity:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

Poznámka: Asymptota v $-\infty$ se počítá obdobně, tj. $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx)$$

Definice 2.1.65: Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na okolí bodů x_0. Říkáme, že přímka $x = x_0$ je **svislá asymptota**, jestliže aspoň jedna jednostranná limita je nevlastní:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

62 - Sestavení grafu funkce

Video
Příklady: 253, 254, 255, 256

Sestavení grafu funkce

K sestavení grafu funkce je potřeba vyšetřit následující vlastnosti

1. určit definiční obor funkce
2. najít body nespojitosti a spočítat limity v krajních bodech definičního oboru
3. zjistit, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická
4. nalézt průsečíky s osami a určit intervaly, na kterých je funkce kladná, záporná
5. spočítat derivaci, nalézt lokální extrémy a určit intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající
6. spočítat druhou derivaci, nalézt inflexní body a určit intervaly, na kterých je funkce konvexní, konkávní
7. zjistit zda má funkce svislé asymptoty, asymptoty se směrnicí

Kapitola 3

Lineární algebra

64 - Vektory v algebře

Video

3.1 Vektory v algebře

3.1.1 Základní pojmy

Definice 3.1.66: Uspořádanou n-tici reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazýváme **aritmetickým vektorem**. Značíme ho $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazýváme **souřadnice vektoru**.
Vektor $\vec{o} = (0, 0, \dots, 0)$ se nazývá **nulový vektor**.

3.1.2 Operace s vektory

1. **Součtem vektorů** $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ rozumíme vektor $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ o souřadnicích $c_1 = a_1 + b_1, \dots, c_n = a_n + b_n$. Píšeme $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
2. **Násobkem vektoru** $\vec{a}$ **reálným číslem** k rozumíme vektor $\vec{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ o souřadnicích $d_1 = k \cdot a_1$, $d_2 = k \cdot a_2$, $\dots$, $d_n = k \cdot a_n$. Píšeme $\vec{d} = k\vec{a}$.
3. **Skalárním součinem** vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ rozumíme číslo $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$. Píšeme $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

65 - Lineární závislost

Video **Řešené příklady: 165, 166**

3.1.3 Lineární závislost a nezávislost

Definice 3.1.67: Řekneme, že vektor $\vec{b}$ je **lineární kombinací** vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, jestliže jej můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{a}_k\,,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jsou reálná čísla.

Definice 3.1.68: Jsou dány vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$. Řekneme, že tyto vektory jsou **lineárně závislé**, lze-li aspoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Pokud nemůžeme žádný vektor vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních, řekneme, že jsou **lineárně nezávislé**.

Věta 3.1.69: *Vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, a platí*

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{o}\,.$$

3.2 Matice

3.2.1 Základní pojmy a definice

Definice 3.2.70: Schéma $m \cdot n$ čísel z $\mathbb{R}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, uspořádaných do m řádků a n sloupců se nazývá **matice typu** $m \times n$. Tedy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matice značíme velkými písmeny, např. A, B... Prvek matice A ležící v i-tém řádku a j-tém sloupci značíme a_{ij}. Matici A typu $m \times n$ zkráceně označíme $A_{m \times n}$.

Definice 3.2.71:

- **Čtvercová matice** A řádu n je matice typu $n \times n$ (tedy $A_{n \times n}$).
- **Hlavní diagonála** matice je tvořena prvky $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{kk}$, kde $k = \min(m, n)$.
- **Nulová matice** (značí se O) je matice, jejíž všechny prvky jsou nuly, tedy

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

67 - Vybrané typy matic

Video **Řešené příklady:** 152
Příklady: 258, 259, 260

- **Jednotková matice** (značí se E) je čtvercová matice, kde všechny prvky na hlavní diagonále jsou jedničky a všechny ostatní prvky jsou nuly, tedy

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Horní** (resp. **dolní**) **trojúhelníková matice** je matice, jejíž prvky pod (resp. nad) hlavní diagonálou jsou nulové, tedy

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i > j \qquad (\text{resp. } a_{ij} = 0 \text{ pro } i < j).$$

- **Transponovaná matice** k matici A (značí se A^{T}) je matice, která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce, tedy

$$a^{\mathsf{T}}_{ij} = a_{ji}.$$

- **Diagonální matice** je čtvercová matice A s nenulovými prvky nejvýše na hlavní diagonále, tedy

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j.$$

- **Submatice** A_{ij} matice A je matice, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

68 - Operace s maticemi

Video **Řešené příklady:** 152
Příklady: 258,259, 260

- **Symetrická matice** je čtvercová matice A, pro kterou platí

$$A = A^{\mathsf{T}}.$$

- Řekneme, že matice A je **ve stupňovitém tvaru**, jestliže
  - každý nenulový řádek kromě prvního, začíná zleva více nulami než ádek předchozí,
  - za nulovým řádkem následují jen nulové řádky.

3.2.2 Operace s maticemi

Definice 3.2.72:

- **Rovnost matic** A, B (označení: $A = B$)
Matice A rovná se matici B, právě když jsou obě matice stejného typu a všechny odpovídající si prvky jsou si rovny, tedy

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

- **Součet matic** A, B (označení: $C = A + B$)
Matice C se nazývá součtem matic A, B, právě když jsou matice A, B stejného typu a každý prvek matice C je součtem odpovídajících prvků matic A, B, tedy

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

- **Násobek matice** A **reálným číslem** k (označení: $B = kA$)
Násobkem matice A číslem $k \in \mathbb{R}$ rozumíme matici B stejného typu, která vznikne tak, že každý prvek matice A násobíme číslem $k \in \mathbb{R}$, tedy

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}, \quad \forall i, j.$$

69 - Součin matic

Video **Řešené příklady: 153**
Příklady: 261, 262, 263

- **Součin matic** A, B (označení: $C = A \cdot B$)
  Součinem matic A typu $m \times n$ a B typu $n \times p$ (A má tolik sloupců jako B řádků) je matice C typu $m \times p$, jejíž každý prvek je skalárním součinem i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B, tedy

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \forall i, j.$$

Poznámka: Obecně násobení matic není komutativní! Tedy

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Vlastnosti součinu

$$\begin{aligned} A \cdot E &= A & E \cdot A &= A \\ A \cdot O &= O & O \cdot A &= O \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C & (B + C) \cdot A &= B \cdot A + C \cdot A \end{aligned}$$

Věta 3.2.73: *Pro matice A, B (odpovídajících typů) platí:*

$$(A \cdot B)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}.$$

70 - Hodnost matic - ekvivalentní úpravy

Video **Řešené příklady:** 154
Příklady: 264, 265, 266, 267, 268

3.2.3 Hodnost matice

Definice 3.2.74: **Hodnost matice** A (označení: $h(A)$) je největší počet lineárně nezávislých řádků této matice.

Věta 3.2.75: *Je-li matice A typu $m \times n$, pak*

$$h(A) \leq \min(m, n).$$

Definice 3.2.76: **Řádkově ekvivalentními úpravami** matice budeme rozumět následující úpravy

1. výměna libovolných dvou řádků
2. vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem
3. přičtení nenulového násobku daného řádku k jinému řádku

Poznámka: Stejné úpravy můžeme provádět i se sloupci, pak půjde o sloupcově ekvivalentní úpravy.

Věta 3.2.77: *Vznikne-li matice B z matice A ekvivalentními úpravami, pak*

$$h(A) = h(B).$$

Definice 3.2.78: Matice A, B jsou **ekvivalentní** (označení: $A \sim B$), lze-li jednu matici převést na druhou konečným počtem řádkově ekvivalentních úprav.

71 - Výpočet hodnosti matice

Video **Řešené příklady: 154**
Příklady: 264, 265, 266, 267, 268

Výpočet hodnosti matice

1. Pomocí řádkově ekvivalentních úprav převedeme danou matici A na stupňovitý tvar, získáme tedy ekvivalentní matici B s maticí A.

2. Určíme hodnost matice B (tedy i A) jako počet nenulových řádků matice B.

Poznámka: Hodnost jednotkové matice n-tého řádu je n. Hodnost nulové matice je nula.

72 - Soustavy lineárních rovnic

Video **Řešené příklady:** 155, 157, 158, 160, 162, 163
Příklady: 269, 270, 271, 272, 273

3.3 Soustavy lineárních rovnic

3.3.1 Základní pojmy a definice

Definice 3.3.79: **Soustavou lineárních rovnic** rozumíme m rovnic o n neznámých, tedy

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde a_{ij} se nazývají **koeficienty** soustavy, x_j jsou **neznámé** a b_i jsou **pravé strany** rovnic soustavy pro $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Definice 3.3.80: **Řešením soustavy** m lineárních rovnic o n neznámých nazveme každý vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\mathsf{T}$, jehož souřadnice po dosazení do soustavy za neznámé splňují všechny rovnice soustavy.

Definice 3.3.81: Matici A, jejíž prvky tvoří koeficienty soustavy a_{ij}, nazýváme **maticí soustavy**. Vektor $\vec{b}$ jehož souřadnice tvoří pravé strany soustavy nazýváme **vektor pravých stran**. Matici $A|\vec{b}$, která vznikne z matice A připojením vektoru pravých stran, nazýváme **rozšířenou maticí soustavy**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A|\vec{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

73 - Soustavy lineárních rovnic - Frobeniova věta

Video **Řešené příklady:** 155, 157, 158, 160, 162, 163
Příklady: 269, 270, 271, 272, 273

Poznámka: Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých můžeme zapsat také maticově:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

tedy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definice 3.3.82: Pokud má soustava m lineárních rovnich o n neznámých všechny pravé strany rovny nule (tj. $b_1 = 0,\ b_2 = 0, \cdots, b_m = 0,$), pak se nazývá **homogenní** soustavou.

Věta 3.3.83: ***Frobeniova věta:***
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má ***alespoň jedno řešení****, právě když se hodnost matice soustavy (označení: $h(A)$) rovná hodnosti matice rozšířené (označení: $h(A|\vec{b})$), tedy*

$$h(A) = h(A|\vec{b}) = h.$$

Pokud $h(A) \neq h(A|\vec{b})$, pak řešení soustavy ***neexistuje****.*
Má-li soustava řešení, pak pro $h = n$ má soustava ***právě jedno řešení****, jinak, tj. pro $h < n$ má soustava* ***nekonečně mnoho řešení*** *závislých na $n - h$ parametrech.*

Poznámka: Z Frobeniovy věty vyplývá, že homogenní soustava lineárních rovnic má vždy alespoň triviální řešení (tj. $\vec{x} = \vec{o}$).

74 - SLR - Gaussova eliminační metoda

Video **Řešené příklady:** 155, 157, 158, 160, 162, 163
Příklady: 269, 270, 271, 272, 273

3.3.2 Gaussova eliminační metoda

Definice 3.3.84: Dvě soustavy o stejném počtu neznámých (počet rovnic nemusí být stejný), nazýváme **ekvivalentní soustavy**, jestliže každé řešení první soustavy je zároveň řešením druhé soustavy a naopak.

Definice 3.3.85: Ekvivalentní úpravy soustav lineárních rovnic:

1. záměna pořadí rovnic,
2. vynásobení některé rovnice číslem $c \neq 0$,
3. přičtení k-násobku libovolné rovnice soustavy k jiné rovnici soustavy,

Poznámka: Ekvivalentní úpravy nemění hodnost matice soustavy a jsou obdobou úprav při výpočtu hodnosti matice.

Postup u Gaussovy eliminační metody

1. Vytvoříme rozšířenou matici soustavy $A|\vec{b}$.
2. Pomocí řádkově ekvivalentních úprav převedeme matici $A|\vec{b}$ na stupňovitý tvar a odtud zjistíme hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy.
3. Použijeme Frobeniovu větu pro zjištění existence řešení soustavy.
4. Sestavíme soustavu rovnic odpovídající matici ve stupňovitém tvaru.
5. Při řešení této soustavy postujeme od poslední rovnice k první.

75 - Determinanty - definice

Video **Řešené příklady:** 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175
Příklady: 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280

3.4 Determinanty

Definice 3.4.86: Determinant čtvercové matice A řádu n (označení: $|A|$ nebo det A) je číslo, pro které platí:

1. je-li A řádu $n = 1$, pak $|A| = a_{11}$,
2. je-li A řádu $n > 1$, pak

$$|A| = a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{13} \cdot |A_{13}| - \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot |A_{1n}| \,,$$

kde A_{1k} je submatice matice A.
Determinant submatice se nazývá **subdeterminant**.
Číslo

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

se nazývá **algebraický doplněk** prvku a_{ij} matice A.

Věta 3.4.87: ***Laplaceův rozvoj***
Je-li A čtvercová matice řádu n, pak platí:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ij} \quad \forall i \qquad \textit{(podle i-tého řádku)},$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ij} \quad \forall j \qquad \textit{(podle j-tého sloupce)}.$$

76 - Vlastnosti determinantů

Video **Řešené příklady:** 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175
Příklady: 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280

3.4.1 Vlastnosti determinantů

Nechť A a B jsou čtvercové matice stejného řádu, pak platí:

- $|A^{\mathsf{T}}| = |A|$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- Má-li matice A dva řádky (sloupce) stejné, pak $|A| = 0$.
- Vznikne-li B z A:
  - vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců), pak $|B| = -|A|$,
  - vynásobením jednoho řádku (sloupce) číslem $k \in \mathbb{R}$, pak $|B| = k \cdot |A|$,
  - přičtením násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému, pak $|B| = |A|$.
- Jsou-li řádky (sloupce) matice A lineárně závislé, pak $|A| = 0$.
- Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

77 - Výpočet determinantu

Video **Řešené příklady:** 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175
Příklady: 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280

3.4.2 Výpočet determinantu matice 2. a 3. řádu

Křížové pravidlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Sarrusovo pravidlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ -(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}) \end{matrix}$$

Poznámka: Pro determinanty matic čtvrtého a vyšších řádů žádné obdobné pravidlo neplatí.

3.4.3 Výpočet determinantu matice 4. a vyšších řádů

Determinant matice 4. a vyšších rádů počítáme pomocí Laplaceova rozvoje, případně můžeme využít vlastnosti determinantu.

78 - Soustavy lineárních rovnic - Cramerovo pravidlo

Video **Řešené příklady:** 176
Příklady: 281

3.4.4 Cramerovo pravidlo

Definice 3.4.88: Čtvercová matice A se nazývá

- **regulární**, právě když $|A| \neq 0$,
- **singulární**, právě když $|A| = 0$.

Cramerovo pravidlo se dá použít pouze pro soustavy matic s regulární maticí soustavy, tj. pro soustavy n lineárních rovnic o n neznámých, kde matice soustavy A je čtvercová a navíc $|A| \neq 0$.

Věta 3.4.89: ***Cramerovo pravidlo:***
Je-li matice soustavy $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ regulární, pak existuje ***jediné řešení*** *soustavy $\vec{x}$ a pro jeho složky x_k platí*

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|},$$

kde A_k je matice, která vznikne z A nahrazením k-tého sloupce sloupcem pravých stran.

Postup u Cramerova pravidla

1. Ověříme, že $|A| \neq 0$,
2. spočítáme jednotlivé determinanty $|A_k|$,
3. vypočítáme jednotlivé neznámé x_k dosazením do vzorce z předchozí věty.

79 - Inverzní matice

Video **Řešené příklady:** 177, 178
Příklady: 282, 283, 284, 285, 286

3.5 Inverzní matice

3.5.1 Základní pojmy a definice

Definice 3.5.90: Čtvercová matice se nazývá **inverzní matice** ke čtvercové matici A (označení A^{-1}) právě tehdy, když

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Poznámka: Pokud inverzní matice existuje, pak je určena jednoznačně a navíc matice A a A^{-1} jsou stejného řádu.

Věta 3.5.91: *Je-li A regulární matice řádu n, pak k ní existuje právě jedna inverzní matice a platí*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^{\mathsf{T}},$$

kde $\tilde{A}$ je matice s prvky $\tilde{a}_{ij}$.

- Matice $\tilde{A}^{\mathsf{T}}$ se nazývá adjungovaná matice A.
- K singulární matici neexistuje matice inverzní.
- A pro determinant inverzní matice platí $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$.

80 - Inverzní matice

Video **Řešené příklady:** 177, 178
Příklady: 282, 283, 284, 285, 286

3.5.2 Výpočet inverzní matice pomocí adjungované matice

1. Spočítáme determinant dané matice A, tj. $|A|$.
2. Vypočítáme prvky $\tilde{a}_{ij}$ matice A a vytvoříme z nich matici $\tilde{A}$.
3. Transponujeme matici $\tilde{A}$.
4. Sestavíme inverzní matici podle vzorce z předchozí věty.

3.5.3 Výpočet inverzní matice eliminační metodou

Každou regulární matici A lze převést řádkově ekvivalentními úpravami na jednotkovou matici E.

1. Zapíšeme matice A a E vedle sebe $(A|E)$.
2. Provádíme řádkově ekvivalentní úpravy s maticí $(A|E)$:

$$(A|E) \sim \cdots \sim (E|A^{-1}).$$

3. Získáme hledanou inverzní matici A^{-1}.

81 - Maticové rovnice

Video **Řešené příklady:** 179
Příklady: 287, 288, 289

3.5.4 Maticové rovnice

Maticové rovnice jsou např. rovnice typu:

$$A \cdot X = B,$$

$$X \cdot A = B,$$

kde matice X je hledaná neznámá matice, A je regulární matice a B je matice vhodného typu.
Takovéto rovnice můžeme řešit pomocí inverzní matice A^{-1} a to násobením dané rovnice maticí A^{-1} zleva nebo zprava, dle typu počítané maticové rovnice.

- **Řešení rovnice typu** $A \cdot X = B$
  Rovnici násobíme maticí A^{-1} zleva, tedy

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \qquad / \cdot A^{-1} \text{ zleva} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ E \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

- **Řešení rovnice typu** $X \cdot A = B$
  Rovnici násobíme maticí A^{-1} zprava, tedy

$$\begin{aligned} X \cdot A &= B \qquad / \cdot A^{-1} \text{ zprava} \\ X \cdot A \cdot A^{-1} &= B \cdot A^{-1} \\ X \cdot E &= B \cdot A^{-1} \\ X &= B \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

82 - Řešení soustavy lineárních rovnic pomocí inverzní matice

Video **Řešené příklady:** 180
Příklady: 290, 291

3.5.5 Řešení soustavy lineárních rovnic pomocí inverzní matice

Soustavu lineárních rovnic lze pro regulární matici A řešit jako speciální případ maticové rovnice.

Věta 3.5.92: *Je-li matice soustavy $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ regulární (tj. $|A| \neq 0$), pak existuje* ***jediné řešení*** *soustavy $\vec{x}$ a má tvar*

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}.$$

Kapitola 4

Analytická geometrie

84 - Vektorová algebra

Video

4.1 Vektorová algebra

4.1.1 Vektory

Co je to vektor? Na tuto poměrně zásadní otázku existuje jednoduchá odpověď. **Vektor je prvek vektorového prostoru.** Je třeba ovšem také říci, co je to vektorový prostor. Pro naše účely si vystačíme s následující definicí.

Definice 4.1.93: **Vektorový prostor** V nad množinou reálných čísel $\mathbb{R}$ je množina s operací sčítání $+$ prvků z V (**vektorů**) a vnější násobení $\cdot$ vektoru reálným číslem, přičemž $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
6. $p \cdot (q \cdot \vec{u}) = (p \cdot q) \cdot \vec{u}$
7. $(p + q) \cdot \vec{u} = (p \cdot \vec{u}) + (q \cdot \vec{u})$
8. $p \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (p \cdot \vec{u}) + (p \cdot \vec{v})$

Poznámka: V množině V existuje neutrální prvek vůči sčítání, tzv. **nulový vektor**, tj. platí $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

Poznámka: Příkladem vektorových prostorů nad množinou $\mathbb{R}$ je samotná množina $\mathbb{R}$, dále kartézský součin množin reálných čísel se sebou, $\mathbb{R}^n$. My se pro naše účely omezíme na vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Jeho prvky (uspořádáné trojice) budeme nazývat **vektory**, značíme $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Definice 4.1.94: Buď V vektorový prostor. **Afinním prostorem** nad V rozumíme množinu $\mathcal{A}$, společně s operací sčítání $+$, která libovonému prvku z $\mathcal{A}$ a libovolnému vektoru z V přiřadí prvek z $\mathcal{A}$, tj. $A + \vec{u} = B$, $A, B \in \mathcal{A}$, $\vec{u} \in V$. Prvkům z $\mathcal{A}$ říkáme **body**.

Poznámka: Je-li možné na afinním prostoru $\mathcal{A}$ měřit vzdálenost, pak jde zpravidla o tzv. **Eukleidovský prostor**, $\mathcal{E}$.

85 - Vektorová algebra

Video

Poznámka: Měření vzdáleností se realizuje pomocí skalárního součinu, který si zavedeme později. Omezíme se na tzv. trojrozměrný Eukleidovský prostor, který budeme označovat $\mathcal{E}^3$a ztotožňovat s $\mathbb{R}^3$. Body $\mathcal{E}^3$ značíme $A = [a_1, a_2, a_3]$.

Poznámka: Na množině $\mathbb{R}^3$ lze tedy pracovat s několika algebraickými strukturami. Jedná se o strukturu vektorového prostoru, afinního a Eukleidovského prostoru.

4.1.2 Základní pojmy a definice

Definice 4.1.95: Kartézská soustava souřadnic je taková soustava souřadnic, u které jsou souřadné osy vzájemně kolmé a protínají se v jednom bodě zvaném **počátek soustavy souřadnic**.

V prostoru $\mathcal{E}^3$ má kartézská soustava souřadnic 3 vzájemně kolmé osy (označované x, y, z), v rovině (tj. v prostoru $\mathcal{E}^2$) 2 kolmé osy (x, y).

Definice 4.1.96: Souřadnice bodu A v kartézské soustavě souřadnic je v prostoru trojice reálných čísel a_1, a_2, a_3, které dostaneme jako vzdálenost počátku soustavy souřadnic a kolmého průmětu bodu A do odpovídajících souřadných os x, y, z (Označení: $A = [a_1, a_2, a_3]$ - bod A o souřadnicích a_1, a_2, a_3).

Definice 4.1.97: Nechť $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ jsou dva body v prostoru. **Orientovanou úsečkou** AB nazveme úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B. **Geometrickým vektorem** nazýveme orientovanou úsečku určenou body A, B mající určitou velikost (Označení vektoru: AB nebo $\vec{a}$). Poznamenejme, že platí $AB = B - A$.

Definice 4.1.98: Nulovým vektorem nazýváme vektor, jehož počáteční a koncový bod splývají, takže jeho velikost se rovná nule. (Označení: $\vec{0}$). **Jednotkovým vektorem** nazýváme vektor, jehož velikost je rovna jedné.

86 - Vektory

Video

4.1.3 Souřadnice vektoru

Definice 4.1.99: Nechť je dána kartézská soustava souřadnic a libovolný bod $A = [a_1, a_2, a_3] \in \mathcal{E}^3$. **Polohovým vektorem** nazveme orientovanou úsečku OA, $O = [0, 0, 0]$. Čísla a_1, a_2, a_3 nazýváme **souřadnicemi vektoru** $\vec{a} = OA$ (označení: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$).

Poznámka: Polohový vektor je tedy tělesová úhlopříčka v kvádru o hranách a_1, a_2, a_3.

Definice 4.1.100: Vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ o souřadnicích

$$\vec{i} = (1, 0, 0),\ \vec{j} = (0, 1, 0),\ \vec{k} = (0, 0, 1)$$

se nazývají **základní (bázové) jednotkové vektory**.

Poznámka: Základní jednotkové vektory jsou vektory o velikosti jedna ležící na osách x, y, z.

Věta 4.1.101: *Každý vektor $\vec{a}$ v $\mathcal{E}^3$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci základních vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, tedy*

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k},$$

kde koeficienty a_1, a_2, a_3 lineární kombinace jsou souřadnice vektoru $\vec{a}$.

Definice 4.1.102: Nechť je dán vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. **Velikostí vektoru** $\vec{a}$ (označení: $|\vec{a}|$) rozumíme délku úsečky OA (tj. délku úhlopříčky v kvádru o stranách a_1, a_2, a_3)

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}.$$

87 - Vektory

Video

Věta 4.1.103: *Nechť jsou dány vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Pak platí*

- *pro násobení vektoru reálným číslem $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3),$$

- *pro rovnost vektorů*

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3,$$

- *pro součet vektorů*

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

- *pro rozdíl vektorů*

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3),$$

Poznámka: Víme, že geometrický vektor je množina úseček navzájem rovnoběžných se stejnou velikostí. Souřadnice jsme určili pro polohový vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, tedy pro vektor s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic. Budeme-li uvažovat vektor, který má počáteční bod $M = [m_1, m_2, m_3]$ a koncový bod $N = [n_1, n_2, n_3]$, pak pro souřadnice tohoto vektoru platí $MN = (n_1 - m_1, n_2 - m_2, n_3 - m_3)$. Je zřejmé, že $a_1 = n_1 - m_1$, $a_2 = n_2 - m_2$, $a_3 = n_3 - m_3$, protože se jedná o geometrický vektor. Tedy souřadnice geometrického vektoru jsou buď souřadnice koncového bodu polohového vektoru nebo rozdíl souřadnic koncového a počátečního bodu libovolně umístěného vektoru.

88 - Skalární součin vektorů

Video **Příklady: 293**

4.1.4 Skalární součin vektorů

Definice 4.1.104: Skalárním součinem dvou vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ (označení: $\vec{a} \cdot \vec{b}$) rozumíme **číslo**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Definice 4.1.105: Odchylka dvou vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos \varphi.$$

Vlastnosti skalárního součinu

1. komutativní zákon:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$
2. distributivní zákon:
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c},$$
3. kolmost vektorů:
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

89 - Vektorový součin vektorů

Video **Příklady: 295**

4.1.5 Vektorový součin vektorů

Definice 4.1.106: **Vektorovým součinem** dvou nenulových vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (označení: $\vec{a} \times \vec{b}$) rozumíme **vektor** $\vec{c}$, pro který platí

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

kde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ jsou základní jednotkové vektory:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Věta 4.1.107: *Mějme dva nenulové vektory* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *a vektor* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, *pak platí*

1. *vektor* $\vec{c}$ *je kolmý na vektory* $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$, *tedy*

$$\vec{c} \perp \vec{a} \quad \wedge \quad \vec{c} \perp \vec{b},$$

2. *pro velikost vektoru* $\vec{c}$

$$|\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin \varphi,$$

kde φ *je úhel, který svírají vektory* $\vec{a}, \vec{b}$,

3. *vektory* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *v tomto pořadí tvoří tzv. pravotočivou trojici.*

90 - Vektorový součin vektorů

Video **Příklady: 295**

Věta 4.1.108: *Nechť jsou dány vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Je-li jeden z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ nulový, nebo je-li vektor $\vec{a}$ násobkem vektoru $\vec{b}$ (říkáme, že vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou lineárně závislé) pak*

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}.$$

Vlastnosti vektorového součinu

1. antikomutativní zákon:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},$$

2. distributivní zákon:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},$$

3. násobení reálnými čísly $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \times (\beta \cdot \vec{b}) = \alpha \cdot \beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Geometrický význam vektorového součinu

1. Vektorový součin je kolmý na rovinu určenou vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.
2. Velikost vektorového součinu vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, tj. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, udává obsah rovnoběžníka o stranách $\vec{a}$ a $\vec{b}$.
3. Dva nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, jsou rovnoběžné, právě když jejich vektorovým součinem je nulový vektor.

91 - Smíšený součin vektorů

Video Příklady: 297

4.1.6 Smíšený součin vektorů

Definice 4.1.109: Smíšeným součinem tří vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ (označení: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$) rozumíme číslo $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, tj.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}).$$

Geometrický význam smíšeného součinu

1. Tři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ jsou **komplanární** (leží v jedné rovině), právě když
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

2. Objem V **rovnoběžnostěnu** určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je dán vztahem
$$V = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right|.$$

3. Objem V **čtyřstěnu** určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je dán vztahem
$$V = \frac{1}{6} \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right|.$$

4.2 Analytická geometrie v prostoru

4.2.1 Přímka

Přímku lze jednoznačně určit dvěma různými body nebo bodem a vektorem, tzv. **určujícím směrem přímky**,

$$p = \{A, B\}, \quad p = \{A, AB\}, \quad p = \{A, \vec{u}\}.$$

Definice 4.2.110: Vektorovou (symbolickou) rovnicí přímky $p = \{A, \vec{u}\}$ nazýváme rovnici

$$p : X = A + t\vec{u},$$

bod $X \in p$, $\vec{u}$ je směrovým vektorem přímky p, $t \in \mathbb{R}$ je parametr přímky p.

Definice 4.2.111: Nechť je dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrový vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. **Parametrickými rovnicemi přímky** $p = \{A, \vec{u}\}$ nazveme rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ p : y &= a_2 + tu_2, \\ z &= a_3 + tu_3, \end{aligned}$$

bod $X = [x, y, z] \in p$ je bod ležící na dané přímce.

Poznámka: Všimněme si, že parametrické rovnice přímky dostaneme opět pouhým dosazením příslušných souřadnic daného bodu a vektoru do vektorové rovnice přímky.

Poznámka: Obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje! Přímku lze však zadat jako průsečnici dvou rovin.

93 - Vzájemná poloha dvou přímek v $\mathcal{E}^3$

Video **Příklady:** 306

4.2.2 Vzájemná poloha dvou přímek

Nechť jsou dány dvě přímky p, q o rovnicích:

$$p : X = A + t\vec{u}, \quad q : X = B + s\vec{v}.$$

Rozlišujeme čtyři typy vzájemných poloh, vždy záleží, co mají anebo nemají přímky společného:

- Vzájemná poloha **rovnoběžná různá**

$$p \parallel q \quad \Leftrightarrow \quad \text{mají společný směr, nemají společný bod}$$

- Vzájemná poloha **totožná**

$$p \equiv q \quad \Leftrightarrow \quad \text{mají společný směr a bod, tzn. všechny body}$$

- Vzájemná poloha **různoběžná**

$$p \cap q = \{P\} \quad \Leftrightarrow \quad \text{nemají společný směr, mají společný bod}$$

- Vzájemná poloha **mimoběžná**

$$p \not\parallel q \quad \Leftrightarrow \quad \text{nemají společný směr ani bod}$$

Poznámka: Společnému bodu různoběžných přímek se říká **průsečík**.

94 - Rovina v $\mathcal{E}^3$

Video **Řešené příklady:** 182, 183
Příklady: 299, 300

4.2.3 Rovina

Rovinu lze jednoznačně určit třemi body neležícími na téže přímce; dvěma body a směrem určujícím přímku, která těmito body neprochází; bodem a dvěma nekolineárními směry,

$$\rho = \{A, B, C\}, \quad \rho = \{A, B, \vec{u}\}, \quad \rho = \{A, \vec{u}, \vec{v}\}.$$

Definice 4.2.112: Vektorovou (symbolickou) rovnicí roviny $\rho = \{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ nazýváme rovnici

$$\rho : X = A + t\vec{u} + s\vec{v},$$

bod $X \in \rho$, $t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry roviny ρ.

Definice 4.2.113: Nechť je dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrové vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. **Parametrickými rovnicemi roviny** $\rho = \{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ nazveme rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1, \\ \rho : y &= a_2 + tu_2 + sv_2, \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3, \end{aligned}$$

bod $X = [x, y, z] \in \rho$ je bod ležící na dané rovině.

Poznámka: Všimněme si, že parametrické rovnice roviny dostaneme pouhým dosazením příslušných souřadnic daných bodů a vektorů do vektorové rovnice roviny.

95 - Rovina určená bodem a normálovým vektorem

Video **Řešené příklady:** **182**, **183**
Příklady: **299**, **300**

Rovina určená bodem a normálovým vektorem

Definice 4.2.114: Normálovým vektorem roviny ρ (označení: $\vec{n} = (a, b, c)$) nazýváme vektor kolmý na rovinu ρ, $\vec{n} \perp \rho$.

Poznámka: Normálový vektor roviny ρ je kolmý na všechny vektory této roviny, tedy platí

$$AX \cdot \vec{n} = 0, \quad \text{body } A, X \in \rho.$$

Rozepíšeme skalární součin pro $A = [a_1, a_2, a_3]$, $X = [x, y, z]$, $AX = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$, $\vec{n} = (a, b, c)$,

$$(x - a_1)a + (y - a_2)b + (z - a_3)c = 0.$$

Roznásobením a označením $d = -(aa_1 + ba_2 + ca_3)$ dostáváme

$$\rho : ax + by + cz + d = 0.$$

Definice 4.2.115: Obecnou rovnicí roviny ρ nazýváme rovnici

$$\rho : ax + by + cz + d = 0.$$

Definice 4.2.116: Úsekovou rovnicí roviny ρ nazýváme rovnici tvaru

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

kde $p, q, r \in \mathbb{R}$ představují úseky, které vytíná rovina na souřadných osách.

Poznámka: Rovina daná obecnou rovnicí může mít různé polohy vzhledem k souřadným osám v závislosti na koeficientech a, b, c, d. Neobsahuje-li rovnice roviny některou proměnnou (souřadnici), pak je daná rovina rovnoběžná s příslušnou osou, popřípadě touto osou prochází.

96 - Vzájemná poloha přímky a roviny v $\mathcal{E}^3$

Video **Příklady:** 307

4.2.4 Vzájemná poloha přímky a roviny

Nechť je dána přímka p a rovina ρ o rovnicích:

$$p : X = A + t\vec{u}, \quad \rho : X = B + k\vec{v} + l\vec{w}.$$

Rozlišujeme tři typy vzájemných poloh, vždy záleží, co mají anebo nemají objekty společného:

- Vzájemná poloha **rovnoběžná různá**

  $p \parallel \rho \quad \Leftrightarrow \quad$ mají společný směr, nemají společný bod

- Vzájemná poloha **přímka leží v rovině**

  $p \subset \rho \quad \Leftrightarrow \quad$ mají společný směr a bod, tzn. všechny body přímky

- Vzájemná poloha **různoběžná**

  $p \cap \rho = \{P\} \quad \Leftrightarrow \quad$ nemají společný směr, mají společný bod

NEEXISTUJE MIMOBĚŽNÁ POLOHA PŘÍMKY A ROVINY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU!

Poznámka: Společnému bodu v případě různoběžné polohy přímky a roviny se říká **průsečík**.

97 - Vzájemná poloha dvou rovin v $\mathcal{E}^3$

Video **Příklady:** 308

4.2.5 Vzájemná poloha dvou rovin

Nechť jsou dány dvě roviny α a β o rovnicích:

$$\alpha : X = A + k\vec{u} + l\vec{v}, \quad \beta : X = B + p\vec{u}' + r\vec{v}'.$$

Rozlišujeme tři typy vzájemných poloh, vždy záleží, co mají anebo nemají objekty společného:

- Vzájemná poloha **rovnoběžná různá**

$$\alpha \parallel \beta \quad \Leftrightarrow \quad \text{mají společné směry, nemají společný bod}$$

- Vzájemná poloha **totožná**

$$\alpha \equiv \beta \quad \Leftrightarrow \quad \text{mají společné směry a bod, tzn. všechny body}$$

- Vzájemná poloha **různoběžná**

$$\alpha \cap \beta = p \quad \Leftrightarrow \quad \text{mají společný směr, mají společný bod}$$

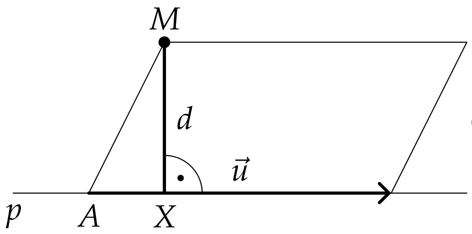
NEEXISTUJE MIMOBĚŽNÁ POLOHA DVOU ROVIN V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU!

Poznámka: Společné přímce různoběžných rovin se říká **průsečnice**.

98 - Metrické úlohy

Video Řešené příklady: 184, 185 Příklady: 303, 304, 305

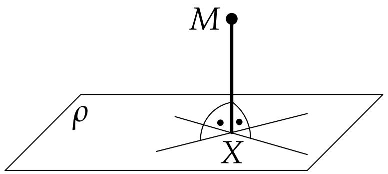
4.2.6 Vzdálenost bodu od přímky



$$d(M,p) = \frac{|\vec{u} \times AM|}{|\vec{u}|}$$

Vzdálenost bodu M od přímky $p = \{A, \vec{u}\}$ je velikost vektoru MX kolmého na přímku p a procházejícího bodem M, přičemž $X \in p$ je kolmým průmět bodu M do přímky p.

4.2.7 Vzdálenost bodu od roviny



$$d(M,\rho) = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Vzdálenost bodu $M = [m_1, m_2, m_3]$ od roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$ je velikost vektoru MX kolmého na rovinu ρ a procházejícího bodem M, přičemž $X \in \rho$ je kolmý průmět bodu M do roviny ρ.

4.2.8 Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

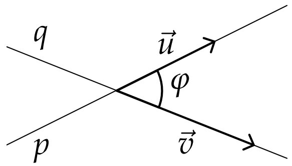
V jedné z rovin zvolíme libovolný bod a úlohu převedeme na hledání vzdálenosti bodu od roviny. Pro vzdálenost dvou rovin $\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0$, $\beta : ax + by + cz + d_2 = 0$ platí

$$d(\alpha,\beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

99 - Metrické úlohy

Video **Řešené příklady:** 184, 185
Příklady: 303, 304, 305

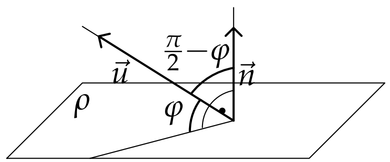
4.2.9 Odchylka dvou přímek



$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|},\ \varphi \in \langle 0, \pi/2\rangle$$

Odchylku dvou přímek určíme jako odchylku jejich směrových vektorů.

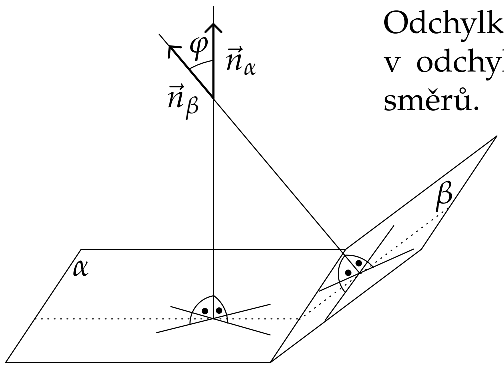
4.2.10 Odchylka přímky od roviny



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$$

Odchylku přímky od roviny převádíme na odchylku přímku od normálového směru roviny.

4.2.11 Odchylka dvou rovin



Odchylka dvou rovin přechází v odchylku jejich normálových směrů.

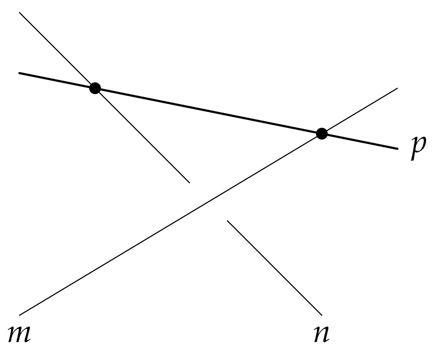
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\cdot|\vec{n}_\beta|}$$

100 - Příčka a osa mimoběžek

Video

4.2.12 Příčka mimoběžek

Definice 4.2.117: Příčka p mimoběžek m a n je každá přímka p, která obě mimoběžky protíná.



Poznámka: Příček existuje nekonečně mnoho. Obvykle se řeší úloha, kdy hledáme příčku dvou mimoběžek procházející daným bodem nebo rovnoběžnou s daným směrem.

Nalezněte příčku procházející daným bodem P

1. $m = \{M, \vec{m}\}, n = \{N, \vec{n}\}$
2. $\alpha = \{P, M, \vec{m}\}, \beta = \{P, N, \vec{n}\}$
3. $p = \alpha \cap \beta$

Nalezněte příčku rovnoběžnou s daným směrem $\vec{p}$

1. $m = \{M, \vec{m}\}, n = \{N, \vec{n}\}$
2. $\alpha = \{M, \vec{m}, \vec{p}\}, \beta = \{N, \vec{n}, \vec{p}\}$
3. $p = \alpha \cap \beta$

Definice 4.2.118: Osa mimoběžek je příčka, která je na obě mimoběžky kolmá.

Poznámka: Osu hledáme stejně jako v případě příčky rovnoběžné s daným směrem. Směr ovšem musí být kolmý na obě příčky a získáme jej jako vektorový součin určujících směrů obou mimoběžek, $\vec{o} = \vec{m} \times \vec{n}$.

Matematika I: Řešené příklady

Dagmar Dlouhá, Radka Hamříková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Řešené příklady – Funkce jedné proměnné

103 - Definiční obor - zlomek

Zadání Určete definiční obor funkce $y = \frac{1}{3-x^2}$, $y = \frac{1}{1-2\sin x}$ a $y = \frac{1}{1-2^x}$.

Řešení Video **Teorie:** 13 **Příklady:** 195, 196, 197

V zadání se objevuje zlomek. Jmenovatel zlomku musí být různý od nuly.

$3 - x^2 \neq 0$	Budeme řešit kvadratickou (ne)rovnici.
$D = b^2 - 4ac = 0 + 12 = 12$	Použijeme diskriminant k jejímu vyřešení.
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{\pm 2\sqrt{3}}{-2} = \mp\sqrt{3}$	Dostali jsme dva různé reálné kořeny.

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\mp\sqrt{3}\right\}$.

$1 - 2\sin x \neq 0$	Budeme řešit goniometrickou (ne)rovnici.
$1 \neq 2\sin x$	
$\sin x \neq \frac{1}{2}$	Kladnou hodnotu má funkce $\sin x$ v prvním a druhém kvadrantu.
$x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$	Řešení z prvního kvadrantu.
$x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$	Řešení z druhého kvadrantu.

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\}$

$1 - 2^x \neq 0$	Budeme řešit exponenciální (ne)rovnici.
$1 \neq 2^x$	Levou stranu upravíme.
$2^0 \neq 2^x$	Rovnají-li se základy, rovnají se také exponenty.
$x \neq 0$	

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$

Poznámky

104 - Definiční obor - logaritmus

Zadání Určete definiční obor funkce $y = \log\left(x^2 - 4x + 4\right)$ a $y = \ln \frac{2-x}{x^2+x}$.

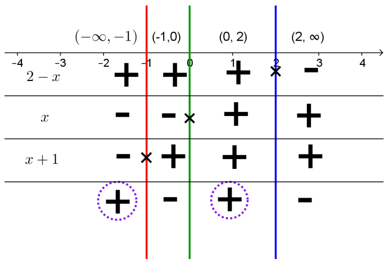
Řešení Video **Teorie:** 13 **Příklady:** 195, 196, 197

V zadání se objevuje logaritmus. Argument musí být kladný.

$x^2 - 4x + 4 > 0$	Budeme řešit kvadratickou nerovnici.
$D = 16 - 16 = 0$	Dostaneme jeden dvojnásobný kořen.
$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$	
$(x-2)^2 > 0$	Druhá mocnina je vždy nezáporná (větší nebo rovna nule), vadí nám tedy pouze možnost, že se závorka bude nule rovnat .
$x \neq 2$	Vyloučíme tedy tento bod.

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$

$\frac{2-x}{x^2+x} > 0$	Budeme řešit nerovnici.
$\frac{2-x}{x(x+1)} > 0$	Jmenovatele upravíme.
$x = 2, x = 0, x = -1$	Nulové body.



Definiční obor funkce je $D(f) = (-\infty, -1) \cup (0, 2)$

105 - Definiční obor - sudá odmocnina

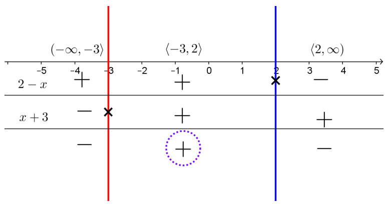
Poznámky

Zadání Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{6 - x - x^2}$ a $y = \sqrt{\ln x}$.

Řešení Video **Teorie:** 13 **Příklady:** 195, 196, 197

V zadání se objevuje sudá odmocnina. Argument musí být nezáporný.

$6 - x - x^2 \geq 0$	Budeme řešit kvadratickou nerovnici.
$D = 1 + 24 = 25$	Dostaneme jeden dvojnásobný kořen.
$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{24}}{-2}$	
$x_1 = -3$	
$x_{1,2} = 2$	
$(2 - x)\,(x + 3) \geq 0$	Máme nulové body, sestavíme tabulku a najdeme definiční obor.



Definiční obor funkce je $D(f) = \langle -3, 2 \rangle$

V zadání se objevuje sudá odmocnina a logaritmus. Argument odmocniny musí být nezáporný. Argument logaritmu musí být kladný.

$\ln x \geq 0 \wedge x > 0$	Budeme řešit první nerovnici, druhá je vyřešena.
$x \geq 1$	Průnik intervalů je hledaným definičním oborem.

Definiční obor funkce je $D(f) = \langle 1, \infty)$

106 - Definiční obor - tangens a kotangens

Zadání Určete definiční obor funkce $y = \tan\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$, $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ a $y = \frac{1}{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

Poznámky

Řešení Video **Teorie:** 13 **Příklady:** 195, 196, 197

Pro funkci tangens platí podmínka, že argument musí být různý od $\frac{\pi}{2} + k\pi$, pro kotangens platí podmínka, že argument musí být různý od $k\pi$.

$4x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	Budeme řešit lineární (ne)rovnici.
$4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\pi}{6}$	Osamostatníme x .
$4x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$	Dostaneme nekonečně mnoho bodů.
$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}$	

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}\right\}$.

$2x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi$	Budeme řešit lineární (ne)rovnici.
$2x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$	
$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$	

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right\}$

$y = \frac{1}{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$	Známe vzorec $\frac{1}{\tan x} = \cot x$.
$y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	Použijeme podmínku pro funkci kotangens.
$x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi$	Osamostatníme x.
$x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$	

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$

107 - Definiční obor - arkussínus, arkuskosínus

Poznámky

Zadání Určete definiční obor funkce $y = \arcsin \frac{4x-5}{3}$ a $y = \arccos \frac{2x-3}{x}$.

Řešení Video **Teorie:** 13 **Příklady:** 195, 196, 197

Pro funkce arkussinus a arkuskosínus platí podmínka, že argument musí být z intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

$-1 \leq \frac{4x-5}{3} \leq 1$ Ve jmenovateli není proměnná, řešíme nerovnici najednou.

$-3 \leq 4x - 5 \leq 3$ Osamostatníme postupně x .

$2 \leq 4x \leq 8$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

Definiční obor funkce je $D(f) = \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle$.

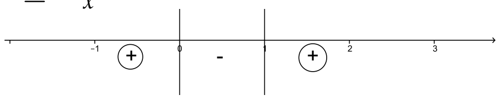
$-1 \leq \frac{2x-3}{x} \leq 1$ Ve jmenovateli je proměnná, nerovnici rozdělíme na dvě.

$-1 \leq \frac{2x-3}{x}$ V nerovnici nesmíme násobit proměnnou!

$0 \leq \frac{2x-3}{x} + 1$ Pravou stranu převedeme na společného jmenovatele.

$0 \leq \frac{2x-3+x}{x}$

$0 \leq \frac{3x-3}{x}$ Nulové body jsou $0, 1$. Sestavíme tabulku.

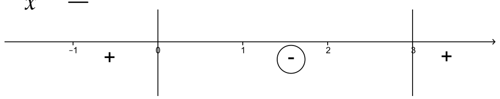


$\frac{2x-3}{x} \leq 1$ V nerovnici nesmíme násobit proměnnou!

$\frac{2x-3}{x} - 1 \leq 0$ Pravou stranu převedeme na společného jmenovatele.

$\frac{2x-3-x}{x} \leq 0$

$\frac{x-3}{x} \leq 0$ Nulové body jsou $0, 3$. Sestavíme tabulku.



Definiční obor funkce je průnik nalezených intervalů $D(f) = \langle 1, 3\rangle$

108 - Inverzní funkce

Zadání Určete definiční obor, obor hodnot a inverzní funkci funkce $y = 1 - \ln(2 - x)$.

Řešení Video **Teorie:** 20 **Příklady:** 217, 218, 219

V zadání se vyskytuje logaritmus, argument musí být kladný.

$2 - x > 0$	Vyřešíme nerovnici.
$x < 2$	Definiční obor funkce je $D(f) = (-\infty, 2)$.

Definiční obor funkce f je oborem hodnot funkce inverzní f^{-1}, tedy $D(f) = H(f^{-1})$.

Nyní z definičního oboru určíme obor hodnot funkce. Od x se musíme dostat k y.

$-\infty < x < 2$	Nerovnici vynásobíme -1. Nezapomeňte změnit znaménka nerovnice.
$\infty > -x > -2$	Přičteme dvojku a obrátíme pořadí stran nerovnice.
$0 < 2 - x < \infty$	Nerovnici zlogaritmujeme, přirozený logaritmus je rostoucí funkce,
$\ln 0 < \ln(2 - x) < \ln \infty$	znaménka nerovnosti se nezmění. Upravíme meze intervalu.
$-\infty < \ln(2 - x) < \infty$	Nerovnici vynásobíme -1.
$\infty > -\ln(2 - x) > -\infty$	Přičteme k nerovnici 1.
$\infty > 1 - \ln(2 - x) > -\infty$	Dostali jsme tvar pro y.
$\infty > y > -\infty$	Toto je obor hodnot dané funkce. Platí $H(f) = D(f^{-1}) = \mathbf{R}$.

Posledním krokem je funkční předpis inverzní funkce f^{-1}.

$x = 1 - \ln(2 - y)$	V zadání zaměníme x za y. Vyjádříme y.
$x - 1 = -\ln(2 - y)$	Odečetli jsme 1 a vynásobili rovnici -1.
$1 - x = \ln(2 - y)$	Inverzní funkce k přirozenému logaritmu je exponenciální funkce.
$e^{1-x} = 2 - y$	Její základ je e. Nyní převedeme y a exponenciální funkci
$y = 2 - e^{1-x}$	na opačné strany rovnice. Hotovo.
$f^{-1} : y = 2 - e^{1-x}$	Toto je inverzní funkce k funkci zadané.

Poznámky

109 - Parita funkce - sudá a lichá funkce

Poznámky

Zadání Určete definiční obor funkce a zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá $y = x\sin x + \sqrt{4-x^2}$ a $y = x\cos\left(x^2-1\right) + \ln\frac{1-x}{1+x}$.

Řešení Video **Teorie:** 16 **Příklady:** 214, 215

V zadání se objevuje odmocnina. Argument musí být nezáporný.

$4 - x^2 \geq 0$ Budeme řešit kvadratickou nerovnici.

$(2-x)(2+x) \geq 0$ Doplníme tabulku a získáme definiční obor.

$D(f) = \langle -2, 2\rangle$ Interval je souměrný podle počátku, platí $x \in D(f) \wedge -x \in D(f)$.

Nyní zjistíme, zda je funkce sudá nebo lichá.

$$f(-x) = -x\sin(-x) + \sqrt{\left(4-(-x)^2\right)} = x\sin x + \sqrt{(4-x^2)} = f(x)$$

$f(-x) = f(x)$ Funkce je sudá.

V zadání se objevuje logaritmus. Argument musí být kladný.

$\frac{1-x}{1+x} > 0$ Budeme řešit nerovnici. Doplníme tabulku a získáme definiční obor.

$D(f) = (-1, 1)$ Interval je souměrný podle počátku, platí $x \in D(f) \wedge -x \in D(f)$.

Nyní zjistíme, zda je funkce sudá nebo lichá.

$$f(-x) = -x\cos\left((-x)^2-1\right) + \ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)} = -x\cos\left(x^2-1\right) + \ln\frac{1+x}{1-x} =$$

$$= -x\cos\left(x^2-1\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -x\cos\left(x^2-1\right) - \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$$

$f(-x) = -f(x)$ Funkce je lichá.

110 - Parita funkce - sudá, lichá nebo žádná

Poznámky

Zadání Určete definiční obor funkce a zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá
$y = \sqrt{\frac{x-4}{x+4}}$ a $y = x^4 - \frac{\sin x}{x} + x - 1$.

Řešení Video **Teorie:** 16 **Příklady:** 214, 215

V zadání se objevuje odmocnina. Argument musí být nezáporný. Jmenovatel zlomku mus různý od nuly.

$\frac{x-4}{x+4} \geq 0$ Budeme řešit kvadratickou nerovnici.
Doplníme tabulku a získáme definiční obor.

$D(f) = (-\infty, -4) \cup \langle 4, \infty)$
Interval není souměrný podle počátku, platí $4 \in D(f) \wedge -4 \notin D(f)$.
Funkce není ani sudá ani lichá.

V zadání se objevuje zlomek. Jmenovatel se nesmí rovnat nule.

$x \neq 0$ Definiční obor jsou reálná čísla bez nuly.

$D\,(f) = \mathbf{R} - \{0\}$ Interval je souměrný podle počátku, platí $x \in D(f) \wedge -x \in D(f)$.

Nyní zjistíme, zda je funkce sudá nebo lichá.

$f\,(-x) = (-x)^4 - \frac{\sin(-x)}{-x} - x - 1 = x^4 - \frac{\sin x}{x} - x - 1$

Srovnáme výsledek se zadanou funkcí.

$x^4 - \frac{\sin x}{x}$ se shoduje se zadáním, mohla by to být sudá funkce.

Dále $-x - 1$ se liší znaménkem před x.

Funkce není ani sudá ani lichá.

111 - Limita funkce - nula lomeno nulou, polynom

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-4}$.

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením -2 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{(-2)^3+4.(-2)^2-2-6}{(-2)^2-4} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

-2 je kořenem polynomu jak v čitateli, tak ve jmenovateli.

Jmenovatele můžeme rozložit $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Čitatele vydělíme kořenovým činitelem $x+2$.

$$\left(x^3+4x^2+x-6\right):(x+2)=x^2+2x-3$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\left(x^2+2x-3\right)}{(x-2)(x+2)}$$

Vykrátíme zlomek a znovu dosadíme -2 za x.

$$\lim_{x\to -2} \frac{\left(x^2+2x-3\right)}{(x-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{(-2)^2+2.(-2)-3}{(-2-2)} = \frac{3}{4}$$

Dostali jsme zlomek $\frac{3}{4}$, příklad je vyřešený.

Poznámky

112 - Limita funkce - nula lomeno nulou, odmocnina

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-\sqrt{x^2-8}}{x-3}$.

Řešení Video Teorie: 36 - 40 Příklady: 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením 3 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x^2-8}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{3^2-8}}{3-3} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

Zlomek usměrníme. Vyjdeme ze vzorce $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x^2-8}}{x-3} \bullet \frac{1+\sqrt{x^2-8}}{1+\sqrt{x^2-8}} = \lim_{x\to 3} \frac{1-(x^2-8)}{(x-3)\left(1+\sqrt{x^2-8}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{(x-3)\left(1+\sqrt{x^2-8}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(3+x)}{(x-3)\left(1+\sqrt{x^2-8}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)(3+x)}{(x-3)\left(1+\sqrt{x^2-8}\right)}$$

Vykrátíme zlomek a znovu dosadíme 3 za x.

$$\lim_{x\to 3} \frac{-(3+x)}{\left(1+\sqrt{x^2-8}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{-(3+3)}{\left(1+\sqrt{3^2-8}\right)} = \frac{-6}{2} = -3$$

Dostali jsme výsledek -3, příklad je vyřešený.

Poznámky

113 - Limita funkce - nula lomeno nulou, sínus a tangens

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x}$.

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením 0 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \frac{\sin 4.0}{2.0} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

Použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Výraz $4x$ nahradíme pomocí substituce proměnnou t.

$4x = t$ — Vyjádříme x.

$x = \frac{t}{4}$

$x \to 0$ — Kam půjde t?

$t \to 0$ — Můžeme dosadit do zadání a vypočítat zadanou limitu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2.\frac{t}{4}} =$$

Upravíme konstanty ve jmenovateli.

$$= \lim_{t\to 0} 2.\frac{\sin t}{t} =$$

Nyní použijeme vzorec na výpočet limity $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.

$$= 2.1 = 2$$

Máme výsledek.

114 - Limita funkce - nula lomeno nulou, sínus a tangens

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan \frac{x}{3}}$.

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením 0 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan \frac{x}{3}} = \frac{\sin 3.0}{\tan \frac{0}{3}} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

Použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.
Bohužel v zadání chybí $\frac{1}{x}$. Musíme proto zadaný zlomek vhodně rozšířit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan \frac{x}{3}} \bullet \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\tan \frac{x}{3}}{x}}$$

Zlomek rozdělíme na dvě limity.

Limity vyřešíme vhodnou substitucí - $3x = t$ a $\frac{x}{3} = u$, $t \to 0$, $u \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0} 3.\frac{\sin t}{t} = 3$$

Čitatel.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan \frac{x}{3}}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan u}{3u} = \frac{1}{3}$$

Jmenovatel.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan \frac{x}{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\tan \frac{x}{3}}{x}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

Oba výsledky dosadíme do zadání a upravíme.

Poznámky

115 - Limita funkce - nula lomeno nulou, sínus a tangens

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x + \tan^2 2x}{\tan^2 5x}$.

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením 0 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x + \tan^2 2x}{\tan^2 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4.0 + \tan^2 2.0}{\tan^2 5.0} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

Použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$, který umocníme na druhou.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 = 1$$

Bohužel v zadání chybí $\frac{1}{x^2}$. Musíme proto zadaný zlomek vhodně rozšířit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x + \tan^2 2x}{\tan^2 5x} \bullet \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x + \tan^2 2x}{x^2}}{\frac{\tan^2 5x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x}{x^2} + \frac{\tan^2 2x}{x^2}}{\frac{\tan^2 5x}{x^2}} = \left[\frac{16+4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}\right]$$

Zlomek rozdělíme na tři limity. Ty vyřešíme substitucí - $4x = t$, $2x = u$ a $5x = v$, $t \to 0$, $u \to 0$, $v \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{\left(\frac{t}{4}\right)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{\frac{t^2}{16}} = \lim_{t\to 0} 16.\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = 16$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 2x}{x^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan^2 u}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan^2 u}{\frac{u^2}{4}} = \lim_{u\to 0} 4.\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 5x}{x^2} = \lim_{v\to 0} \frac{\tan^2 v}{\left(\frac{v}{5}\right)^2} = \lim_{v\to 0} \frac{\tan^2 v}{\frac{v^2}{25}} = \lim_{v\to 0} 25.\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 = 25$$

116 - Limita funkce - nula lomeno nulou, sínus a odmocnina

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin\frac{x}{2}}$.

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením 0 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{0+4}-2}{\sin\frac{0}{2}}=\frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

Zlomek nejprve usměrníme. Vyjdeme ze vzorce $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin\frac{x}{2}}\bullet\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=$$

Dosadíme 0 za x a zjistíme, že první zlomek je typu $\frac{0}{0}$, druhý zlomek je roven $\frac{1}{4}$.

Použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ a postup z předchozích příkladů.

Substituce - $\frac{x}{2}=t$, $t\to 0$.

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sin t}\cdot\frac{1}{4}=\lim_{t\to 0}2\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Dostali jsme výsledek $\frac{1}{2}$, příklad je vyřešený.

117 - Limita funkce - jedna na nekonečno

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{1-2x}$.

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením ∞ za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{1-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{-\infty}$$

Nejprve vyřešíme problém v závorce, vydělíme čitatele jmenovatelem a připomeneme si, že tvar $\frac{k}{\infty}\to 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right) = 1$$

Limita je typu 1^{∞}. Pro tento typ limity použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1-2x} =$$

Ve vzorci je $\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Pomocí substituce tedy nahradíme $\frac{3}{x}$ výrazem $\frac{1}{z}$.

$\frac{3}{x}=\frac{1}{z}$ Vyjádříme x.

$x = 3z$

$x\to\infty$ Kam půjde z?

$z\to\infty$ Můžeme dosadit do zadání a vypočítat zadanou limitu.

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{1-2.3z} =$$

Upravíme mocninu podle vzorců, které znáte již ze základní školy.

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{1}.\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-2.3z} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{1}.\left(\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{-6} = e^{-6}$$

Příklad je vyřešený.

118 - Limita funkce - jedna na nekonečno

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{5}{x}-3}$.

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením 0 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{5}{x}-3} = \lim_{x\to 0}(1+4.0)^{\frac{5}{0}-3}$$

Nejprve vyřešíme problém v exponentu, připomeneme si, že tvar $\frac{k}{0}\to\pm\infty$.
Limita je typu 1^∞. Pro tento typ limity použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

$\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{5}{x}-3}$ Ve vzorci je $(1+x)$. Pomocí substituce tedy nahradíme $4x$ výrazem z.

$4x = z$ Vyjádříme x.
$x = \frac{z}{4}$
$x \to 0$ Kam půjde z?
$z \to 0$ Můžeme dosadit do zadání a vypočítat zadanou limitu.

$\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{5}{\frac{z}{4}}-3}$ Upravíme mocninu podle vzorců, které znáte již ze základní školy.

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{20}{z}-3} = \lim_{z\to 0}\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{20}(1+z)^{-3} = e^{20}$$

Příklad je vyřešený.

119 - Limita funkce - nekonečno lomeno nekonečnem

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^3-2x^2+3x-5}{1-8x^3}$.

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením ∞ za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3-2x^2+3x-5}{1-8x^3} = \pm\frac{\infty}{\infty}$$ Limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$.

Víme, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x} = 0$. Vytkneme v čitateli i ve jmenovateli x v nejvyšší mocnině.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}-8\right)}$$ Ve zlomku vykrátíme x^3.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^3}-8} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

V čitateli zůstane 4, ostatní zlomky jdou k 0.
Ve jmenovateli zůstane -8, zbytek jde k 0.

Příklad je vyřešený.

Poznámky

120 - Limita funkce - nekonečno lomeno nekonečnem

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x - 4x^2}$.

Poznámky

Řešení **Video** **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením ∞ za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x - 4x^2} = \pm\frac{\infty}{\infty}$$

Limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$.

Víme, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x} = 0$. Vytkneme v čitateli i ve jmenovateli x v nejvyšší mocnině.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}{x^2\left(\frac{3}{x} - 4\right)}$$

Ve zlomku vykrátíme x^2.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(\frac{3}{x} - 4\right)}$$

V čitateli zůstane x^2 a v závorce 2, ostatní zlomky jdou k 0.
Ve jmenovateli zůstane -4, zbytek jde k 0.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\,(2 - 0 + 0 - 0 - 0)}{(0 - 4)} = \frac{(\pm\infty)^2 .2}{-4} = -\infty$$

Příklad je vyřešený.

121 - Limita funkce - nekonečno lomeno nekonečnem

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-x^2}{2+x^2-4x^3}$.

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením ∞ za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x^2}{2+x^2-4x^3} = \pm\frac{\infty}{\infty}$$

Limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$.

Víme, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x} = 0$. Vytkneme v čitateli i ve jmenovateli x v nejvyšší mocnině.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^3\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}-4\right)}$$

Ve zlomku vykrátíme x^2.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}-4\right)}$$

V čitateli zůstane -1, ostatní zlomky jdou k 0.
Ve jmenovateli zůstane x a v závorce -4, zbytek jde k 0.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{0-1}{x\,(0-4)} = \frac{-1}{\pm\infty.\,(-4)} = 0$$

Příklad je vyřešený.

Poznámky

122 - Jednostranná limita funkce - konstanta lomeno nulou

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x}$.

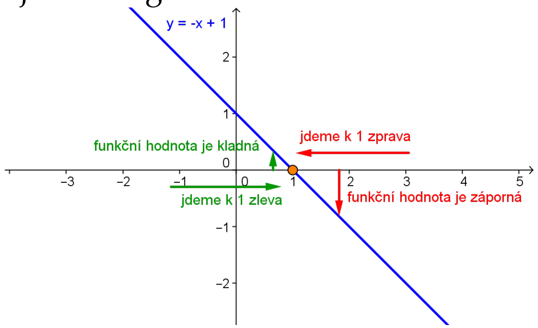
Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Výpočet limity začneme dosazením 1 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0}$$

Limita je typu $\frac{k}{0}$. Nulou samozřejmě nelze dělit!

Víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k}{x} = \pm\infty$. Rozhodujeme o znaménku nekonečna. V čitateli máme 1, ta je kladná. Ve jmenovateli je 0. Přestaneme se na ni dívat jako na nulu, ale jako na číslo, ke kterému se chceme co nejvíce přiblížit, můžeme se blížit zleva a zprava. Funkce $1-x$, která je ve jmenovateli zadané funkce, má kladnou nebo zápornou funkční hodnotu. Zjednodušeně bychom mohli říct, že máme ve jmenovateli kladnou nebo zápornou nulu. Nejlépe to zjistíme z grafu.



$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

Z obrázku vidíme, že vpravo od 1 je funkční hodnota záporná, ve jmenovateli je tedy záporná 0. Limita jde k $-\infty$.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0} = \infty$$

Z obrázku vidíme, že vlevo od 1 je funkční hodnota kladná, ve jmenovateli je tedy kladná 0. Limita jde k ∞.

Limity zleva a zprava jsou různé, limita v bodě $x = 1$ neexistuje!

Poznámky

123 - Jednostranná limita funkce - konstanta lomeno nulou

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{(x-2)^2}$.

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Příklady:** 220 - 223

Poznámky

Výpočet limity začneme dosazením 2 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{0}$$

Limita je typu $\frac{k}{0}$. Nulou samozřejmě nelze dělit!

Víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k}{x} = \pm\infty$. Rozhodujeme o znaménku nekonečna.

V čitateli máme 2, ta je kladná. Ve jmenovateli je 0. Opět potřebujeme zjistit, jestli je tato nula kladná nebo záporná.

Výraz ve jmenovateli má tvar $(x-2)^2$. (Můžete si nakreslit graf této funkce.)

Jak již víte, druhá mocnina libovolného reálného čísla nikdy nebude záporná. Ve jmenovateli tedy bude stále kladná nula, limita tedy půjde k $+\infty$.

Limitu vyřešíme najednou, nemusíme řešit problém zvlášť zleva a zprava.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{+0} = +\infty$$

Řešené příklady – Diferenciální počet funkce jedné proměnné

125 - Derivace funkce podle definice

Zadání Určete podle definice derivaci funkce $y = \dfrac{8}{4+x^2}$ v bodě 2.

Řešení Video **Teorie:** 44,45, 46 **Příklady:** 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232

Určíme si definiční obor funkce.

$$x \in \mathbf{R}$$

Bod 2 je v definičním oboru dané funkce.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{8}{4+x^2} - \frac{8}{4+2^2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{8}{4+x^2} - 1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{8-4-x^2}{4+x^2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{(x-2)(4+x^2)}$$
$$= -\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(4+x^2)} = -\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{4+x^2} = -\frac{2+2}{4+4} = -\frac{1}{2}$$

Poznámky

126 - Derivace elementárních funkcí

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení Video **Teorie:** 44,45, 46 **Příklady:** 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232

- $f(x) = 9$ Derivujeme konstantní funkci.
  $f'(x) = 0$

- $f(x) = x^5$ Derivujeme mocninnou funkci.
  $f'(x) = 5x^4$

- $f(x) = 3^x$ Derivujeme exponenciální funkci.
  $f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$

- $f(x) = \log(x)$ Derivujeme mocninnou funkci.
  $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$

- $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ Derivujeme součet goniometrických funkcí.
  $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

- $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - x$ Derivujeme rozdíl mocninných funkcí. Upravíme je do tvaru vhodného pro derivaci.

  $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^1$ Nyní derivujeme.
  $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1} - 1 \cdot x^0$
  $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} - 1$
  $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x} - 1$

- $f(x) = 2 \cdot \tan(x)$ Derivujeme konstantou vynásobenou funkci.
  $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$

Poznámky

127 - Derivace součinu funkcí

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení Video **Teorie:** 44,45, 46 **Příklady:** 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232

- $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$ Derivujeme součin dvou funkcí.

$$f'(x) = [e^x]' \cdot \sin(x) + e^x \cdot [\sin(x)]'$$
$$f'(x) = e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x)$$
$$f'(x) = e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x))$$

- $f(x) = \left(x^3 - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 2\right)$ Derivujeme součin dvou funkcí.

Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

$f(x) = \left(x^3 - 2\right) \cdot \left(x^{-2} + 2\right)$ Nyní derivujeme.

$$f'(x) = \left[x^3 - 2\right]' \cdot \left(x^{-2} + 2\right) + \left(x^3 - 2\right) \cdot \left[x^{-2} + 2\right]'$$
$$f'(x) = 3x^2 \cdot \left(x^{-2} + 2\right) + \left(x^3 - 2\right) \cdot \left(-2x^{-3}\right)$$
$$f'(x) = 3 + 6x^2 - 2 + 4x^{-3}$$
$$f'(x) = 1 + 6x^2 + \frac{4}{x^3}$$

- $f(x) = x \cdot \sin(x) \cdot \ln(x)$ Derivujeme součin tří funkcí.

$f(x) = (x \cdot \sin(x)) \cdot \ln(x)$ Derivujeme součin v součinu.

$$f'(x) = [x \cdot \sin(x)]' \cdot \ln(x) + x \cdot \sin(x) \cdot [\ln(x)]'$$
$$f'(x) = (1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)) \cdot \ln(x) + x \cdot \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \sin(x) \cdot \ln(x) + x \cdot \cos(x) \ln(x) + \sin(x)$$

Poznámky

128 - Derivace podílu funkcí

Poznámky

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení Video **Teorie:** 44,45, 46 **Příklady:** 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232

- $f(x) = \dfrac{2-x}{3x+4}$ Derivujeme podíl funkci.

$$f'(x) = \frac{[2-x]' \cdot (3x+4) - (2-x) \cdot [3x+4]'}{(3x+4)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (3x+4) - (2-x) \cdot \ 3}{(3x+4)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-3x-4-6+3x}{(3x+4)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{10}{(3x+4)^2}$$

- $f(x) = \dfrac{x \cdot \cos(x)}{\sin(x)+1}$ Derivujeme podíl funkcí, kde čitatel je ve tvaru součinu.

$$f'(x) = \frac{[x \cdot \cos(x)]' \cdot (\sin(x)+1) - x \cdot \cos(x) \cdot [\sin(x)+1]'}{(\sin(x)+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(1 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x)) \cdot (\sin(x)+1) - x \cdot \cos(x) \cdot \cos(x)}{(\sin(x)+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin^2(x) - x \cdot \sin(x) - x \cdot \cos^2(x)}{(\sin(x)+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin(x) - x}{(\sin(x)+1)^2}$$

129 - Derivace složené funkce

Poznámky

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení Video **Teorie:** 44,45, 46,47 **Příklady:** 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232

- $f(x) = \ln\left(2x + 5x^2\right)$

  Derivujeme složenou funkci, vnější je funkce logaritmická, vnitřní je polynom 2. stupně.

  $$f'(x) = \frac{1}{2x + 5x^2} \cdot (2 + 10x)$$

- $f(x) = e^{\frac{1}{x^3}}$

  Derivujeme složenou funkci, vnější je funkce exponenciální, vnitřní je funkce mocninná. Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

  $$f(x) = e^{x^{-3}}$$

  Nyní derivujeme.

  $$f'(x) = e^{x^{-3}} \cdot \left(-3x^{-4}\right)$$
  $$f'(x) = -\frac{3}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}$$

- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

  Derivujeme složenou funkci, vnější je funkce mocninná, vnitřní je polynom 2. stupně. Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

  $$f(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

  Nyní derivujeme.

  $$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$
  $$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

130 - Derivace složené funkce

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení Video **Teorie:** 44,45, 46,47 **Příklady:** 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232

Poznámky

- $f(x) = \sin^4\left(3x^2 + x + 5\right)$

Derivujeme složenou funkci, začneme derivací vnější mocninné funkce.

$$f'(x) = 4\sin^3\left(3x^2 + x + 5\right) \cdot \left[\sin\left(3x^2 + x + 5\right)\right]'$$

Opět derivujeme složenou funkci, vnější složkou je funkce sinus.

$$f'(x) = 4\sin^3\left(3x^2 + x + 5\right) \cdot \cos\left(3x^2 + x + 5\right) \cdot \left[3x^2 + x + 5\right]'$$

Zbývá určit derivaci polynomu.

$$f'(x) = 4\sin^3\left(3x^2 + x + 5\right) \cdot \cos\left(3x^2 + x + 5\right) \cdot (6x + 1)$$

- $f(x) = \ln\sin\sqrt{e^{2x} + 1}$

Derivujeme složenou funkci, začneme derivací vnější mocninné funkce.

$$f'(x) = \frac{1}{\sin\sqrt{e^{2x} + 1}} \cdot \left[\sin\sqrt{e^{2x} + 1}\right]'$$

Opět derivujeme složenou funkci, vnější složkou je funkce sinus.

$$f'(x) = \frac{1}{\sin\sqrt{e^{2x} + 1}} \cdot \cos\sqrt{e^{2x} + 1} \cdot \left[\sqrt{e^{2x} + 1}\right]'$$

Opět derivujeme složenou funkci, vnější složkou je funkce mocninná.

$$f'(x) = \frac{1}{\sin\sqrt{e^{2x} + 1}} \cdot \cos\sqrt{e^{2x} + 1} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{2x} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[e^{2x} + 1\right]'$$

Zbývá určit derivaci exponenciální funkce.

$$f'(x) = \frac{1}{\sin\sqrt{e^{2x} + 1}} \cdot \cos\sqrt{e^{2x} + 1} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{2x} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} \cdot 2$$

$$f'(x) = \coth\sqrt{e^{2x} + 1} \cdot \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$$

131 - Logaritmické derivování

Zadání Logaritmickým derivováním vypočítáme derivaci funkce, která je ve tvaru $y = f(x)^{g(x)}$.

Řešení Video **Teorie:** 48 **Příklady:** 234

- $y = f(x)^{g(x)}$ — Derivujeme funkci umocněnou na funkci. Logaritmujeme rovnici.

  $\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$ — Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

  $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$ — Nyní derivujeme složenou funkci na levé straně rovnice a součin na straně pravé.

  $\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ — Z rovnice si vyjádříme derivaci funkce.

  $y' = y \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right]$ — Za y dosadíme původní funkci.

  $y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right]$

- $y = (1-x)^x$ — Derivujeme funkci umocněnou na funkci. Logaritmujeme rovnici.

  $\ln(y) = \ln(1-x)^x$ — Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

  $\ln(y) = x \cdot \ln(1-x)$ — Nyní derivujeme složenou funkci na levé straně rovnice a součin na straně pravé.

  $\frac{1}{y} \cdot y' = [x]' \cdot \ln(1-x) + x \cdot [\ln(1-x)]'$

  $\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln(1-x) + x \cdot \frac{1}{1-x}(-1)$ — Z rovnice si vyjádříme derivaci funkce.

  $y' = y \cdot \left(\ln(1-x) + \frac{x}{1-x}\right)$ — Za y dosadíme původní funkci.

  $y' = (1-x)^x \cdot \left(\ln(1-x) + \frac{x}{1-x}\right)$

Poznámky

132 - První derivace explicitně zadané funkce

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení Video **Teorie:** 44,45, 46,47, 49 **Příklady:** 233

- $f(x) = e^{x^2 \cdot \ln(x)}$

Derivujeme složenou funkci, která má exponent ve tvaru součinu.

$$f'(x) = e^{x^2 \cdot \ln(x)} \cdot \left[x^2 \cdot \ln(x)\right]'$$
$$f'(x) = e^{x^2 \cdot \ln(x)} \cdot \left(2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \tfrac{1}{x}\right)$$
$$f'(x) = e^{x^2 \cdot \ln(x)} \cdot (2x \cdot \ln(x) + x)$$

- $f(x) = 2\left(\sqrt{e^x - 1} - \arctan\sqrt{e^x - 1}\right)$

Derivujeme rozdíl dvou složených funkcí, který je vynásobený konstantou. Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

$$f(x) = 2\left((e^x - 1)^{\frac{1}{2}} - \arctan\,(e^x - 1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Nyní derivujeme.

$$f'(x) = 2\left(\tfrac{1}{2}\,(e^x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^x - \frac{1}{1 + \left((e^x - 1)^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}\,(e^x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^x\right)$$
$$f'(x) = 2\left(\frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} - \frac{1}{1 + e^x - 1} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}\right)$$
$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} - \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$$
$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - 1}}$$
$$f'(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

Poznámky

133 - Druhá derivace explicitně zadané funkce

Poznámky

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení Video **Teorie:** 44,45, 46,47, 49 **Příklady:** 233

- $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

Určíme první derivaci funkce.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$$
$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right)$$

Druhou derivaci získáme derivací první derivace.

$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot \left(1 - 2x^2\right) + e^{-x^2} \cdot (-4x)$$
$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot \left(-2x + 4x^3 - 4x\right)$$
$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot \left(4x^3 - 6x\right)$$

- $f(x) = 1 - \ln\left(x^2 - 9\right)$

Určíme první derivaci funkce.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 - 9} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^2 - 9}$$

Druhou derivaci získáme derivací první derivace.

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot \left(x^2 - 9\right) - (-2x) \cdot 2x}{\left(x^2 - 9\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 18 + 4x^2}{\left(x^2 - 9\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{18 + 2x^2}{\left(x^2 - 9\right)^2}$$

134 - Třetí derivace explicitně zadané funkce

Poznámky

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení Video **Teorie:** 44,45, 46,47, 49 **Příklady:** 233

- $f(x) = x - 2\arctan x$

Určíme první derivaci funkce.

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2}$$
$$f'(x) = \frac{1+x^2-2}{1+x^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

Druhou derivaci získáme derivací první derivace.

$$f''(x) = \frac{2x\cdot(1+x^2)-(x^2-1)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Třetí derivaci získáme derivací druhé derivace.

$$f'''(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)^2-4x\cdot 2\cdot(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$
$$f'''(x) = \frac{(1+x^2)\cdot(4\cdot(1+x^2)-16x^2)}{(1+x^2)^4}$$
$$f'''(x) = \frac{4+4x^2-16x^2}{(1+x^2)^3}$$
$$f'''(x) = \frac{4-12x^2}{(1+x^2)^3}$$

135 - První derivace parametricky zadané funkce

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivaci funkcí zadaných parametricky.

Řešení Video **Teorie:** 50 **Příklady:** 235, 236

- $x = r \cdot \cos t$
  $y = r \cdot \sin t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle, \quad r > 0$

Grafem funkce je horní polovina kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

Parametrické rovnice derivujeme podle t.

$\dot{\varphi}(t) = r \cdot (-\sin t)$
$\dot{\psi}(t) = r \cdot \cos t$

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{r \cdot \cos t}{r \cdot (-\sin t)} = -\cot t, \quad \text{kde } x = r \cdot \cos t$$

- $x = t^3 + 3t + 1$
  $y = 3t^5 + 5t^3 + 1,$

Parametrické rovnice derivujeme podle t.

$\dot{\varphi}(t) = 3t^2 + 3$
$\dot{\psi}(t) = 15t^4 + 15t^2$

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = \frac{15t^2\left(t^2 + 1\right)}{3\left(t^2 + 1\right)} = 5t^2, \quad \text{kde } x = t^3 + 3t + 1$$

Poznámky

$x = \varphi(t)$
$y = \psi(t)$

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}$$

136 - Druhá derivace parametricky zadané funkce

Zadání V následujícícm příkladu počítáme první a druhou derivaci funkce zadané parametricky.

Řešení Video **Teorie:** 50 **Příklady:** 235, 236

- $x = 3 \cdot \cos t$
  $y = 3 \cdot \sin t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$

Parametrické rovnice derivujeme podle t.

$$\dot{\varphi}(t) = 3 \cdot (-\sin t)$$
$$\dot{\psi}(t) = 3 \cdot \cos t$$

$$\ddot{\varphi}(t) = 3 \cdot (-\cos t)$$
$$\ddot{\psi}(t) = 3 \cdot (-\sin t)$$

$$y' = \frac{3 \cdot \cos t}{3 \cdot (-\sin t)}$$

$$y' = -\cot t, \quad \text{kde } x = 3 \cdot \cos t$$

$$y'' = \frac{3 \cdot (-\sin t) \cdot 3 \cdot (-\sin t) - 3 \cdot \cos t \cdot 3 \cdot (-\cos t)}{(3 \cdot (-\sin t))^3}$$

$$y'' = \frac{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}{-27 \sin^3 t}$$

$$y'' = -\frac{9 \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}{27 \sin^3 t}$$

$$y'' = -\frac{1}{3 \sin^3 t}, \quad \text{kde } x = 3 \cdot \cos t$$

Poznámky

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}$$

$$y'' = \frac{\ddot{\psi}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t) \cdot \ddot{\varphi}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^3}$$

137 - Derivace funkce podle definice

Zadání Určete podle definice derivaci funkce $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$ v bodě 2.

Řešení Video **Teorie:** 44,45, 46,47 **Příklady:** 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232

Určíme si definiční obor funkce.

$$x \in \mathbf{R}$$

Bod 2 je v definičním oboru dané funkce.

- $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$ Derivujeme podíl.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (4+x^2) - 8 \cdot 2x}{(4+x^2)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{16x}{(4+x^2)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{16 \cdot 2}{(4+2^2)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}$$

- $f(x) = 8 \cdot (4+x^2)^{-1}$ Derivujeme složenou funkci.

$$f'(x) = 8 \cdot (-1) \cdot (4+x^2)^{-2} \cdot (2x)$$
$$f'(x) = -\frac{16x}{(4+x^2)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{16 \cdot 2}{(4+2^2)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}$$

Poznámky

138 - Tečna a normála grafu funkce

Zadání Napište rovnice tečny a normály grafu funkce v daném bodě: $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 4, T[-1, ?]$.

Řešení Video **Teorie:** 51 **Příklady:** 237,238,239, 240

Připomeneme si rovnici tečny a normály grafu funkce.

$t : y - y_T = f'(x_T)(x - x_T),$

$$n : y - y_T = -\frac{1}{f'(x_T)}(x - x_T),$$

kde x_T, y_T jsou souřadnice bodu dotyku a $f'(x_T)$ je derivace funkce v bodě T.
Připomeňme si ještě, že $f'(x_T)$ je směrnice tečny.

$f(-1) = 2.(-1)^3 - (-1)^2 + 3.(-1) + 4 = -2$ Nejprve vypočítáme souřadnice bodu dotyku.
$T[-1, -2]$

$f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$ Dále potřebujeme derivaci zadané funkce.

$f'(-1) = 6.(-1)^2 - 2.(-1) + 3 = 6 + 2 + 3 = 11$ Dosadíme bod dotyku do první derivace.

Nyní máme vše potřebovné k napsání obou rovnic.

$t : y - (-2) = 11(x - (-1))$
$t : y + 2 = 11(x + 1)$
$t : y = 11x + 9$ Rovnice tečny.

$$n : y - (-2) = -\frac{1}{11}(x - (-1))$$

$$n : y + 2 = -\frac{1}{11}(x + 1)$$

$$n : y = -\frac{x}{11} - \frac{23}{11}$$ Rovnice normály.

Poznámky

139 - Tečna rovnoběžná s přímkou

Zadání Napište rovnice tečny grafu funkce $f(x)$, která je rovnoběžná s přímkou p.
$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $p : x + 4y - 4 = 0$.

Řešení Video **Teorie:** 51 **Příklady:** 237,238,239, 240

Připomeneme si rovnici tečny grafu funkce.
$t : y - y_T = f'(x_T)(x - x_T)$,
kde x_T, y_T jsou souřadnice bodu dotyku a $f'(x_T)$ je derivace funkce v bodě dotyku T.
Připomeňme si ještě, že $f'(x_T)$ je směrnice tečny.
K nalezení tečny potřebujeme její směrnici a bod, ve kterém se dotýká dané funkce.
Víme, že hledaná tečna je rovnoběžná s přímkou p. Pro rovnoběžné přímky platí, že mají stejnou směrnici. Tím jsme vyřešili první část problému.

$p : y = -\frac{1}{4}x + 1$	Přímku jsme převedli na směrnicový tvar. Její směrnice, a tedy i směrnice tečny, je $-\frac{1}{4}$.
$f'(x_T) = -\frac{1}{4}$	Derivace funkce v bodě je rovna směrnici tečny v tomtéž bodě. Zadanou funkci zderivujeme.
$-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4}$	Vyřešíme rovnici, její kořen je x-ová souřadnice bodu dotyku.
$(x-1)^2 = 4$	Kvadratická rovnice.
$x^2 - 2x - 3 = 0$	Pomocí diskriminantu dostaneme 2 různé reálné kořeny.
$x_1 = 3, x_2 = -1$	Máme tedy dva body dotyku a tím pádem dvě tečny.
$y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{1}{2}$	
$T_1 = \left[3, \frac{3}{2}\right], T_2 = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$	Body dotyku.
$t_1 : y - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{4}(x-3)$	První tečna.
$t_1 : y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4}$	
$t_2 : y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x+1)$	Druhá tečna.
$t_2 : y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$	

Poznámky

140 - Taylorův polynom

Zadání Pro funkci $f(x) = \sin 2x$ sestavte Taylorův polynom 4. stupně v okolí bodu $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Řešení Video **Teorie:** 51 **Příklady:** 241,242

Připomeneme si tvar Taylorova polynomu.

$$T_4(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.$$

Začneme výpočtem 4 derivací, do nich pak dosadíme bod x_0.

$f(x) = \sin 2x$ $\quad f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2.\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$f'(x) = 2\cos 2x$ $\quad f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 2.\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$f''(x) = -4\sin 2x$ $\quad f''(x_0) = f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin 2.\frac{\pi}{4} = -4\sin\frac{\pi}{2} = -4$

$f'''(x) = -8\cos 2x$ $\quad f'''(x_0) = f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -8\cos 2.\frac{\pi}{4} = -8\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$f^{(4)}(x) = 16\sin 2x$ $\quad f^{(4)}(x_0) = f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16\sin 2.\frac{\pi}{4} = 16\sin\frac{\pi}{2} = 16$

Získané hodnoty dosadíme do vzorce pro Taylorův polynom 4. stupně.

$$T_4(x) = 1 + \frac{0}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{-4}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{0}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{16}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4.$$

Poznámky

141 - Maclaurinův polynom

Poznámky

Zadání Pro funkci $f(x) = e^{-x^2}$ sestavte Maclaurinův polynom 4. stupně. Pozn. $x_0 = 0$.

Řešení Video **Teorie:** 51 **Příklady:** 241,242

Připomeneme si tvar Maclaurinova polynomu.

$$M_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4.$$

Začneme výpočtem 4 derivací, do nich pak dosadíme bod 0.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = e^{-0^2} = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}.(-2x) \qquad f'(0) = e^{-0^2}.(-2.0) = 0$$

$$f''(x) = e^{-x^2}.(-2x)^2 - 2e^{-x^2} \qquad f''(0) = e^{-0^2}.(-2.0)^2 - 2e^{-0^2} = -2$$

$$f'''(x) = e^{-x^2}.(-2x)^3 + 8x.e^{-x^2} + 4x.e^{-x^2}$$

$$f'''(0) = e^{-0^2}.(-2.0)^3 + 8.0.e^{-0^2} + 4.0.e^{-0^2} = 0$$

$$f^{(4)}(x) = e^{-x^2}.(-2x)^4 - 24x^2e^{-x^2} - 12x^2e^{-x^2} + 12.e^{-x^2}$$

$$f^{(4)}(0) = e^{-0^2}.(-2.0)^4 - 24.0^2e^{-0^2} - 12.0^2e^{-0^2} + 12.e^{-0^2} = 12$$

Získané hodnoty dosadíme do vzorce pro Maclaurinův polynom 4. stupně.

$$M_4(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{12}{4!}x^4 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$

142 - Vypočítejte limitu funkce l'Hospitalovým pravidlem

Zadání Vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4x-4}{6x^2-2x-20}$.

Vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\log x}$.

Řešení Video **Teorie:** 53 **Příklady:** 243,244

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4x-4}{6x^2-2x-20}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

$$\left(x^3-3x^2+4x-4\right)' = 3x^2-6x+4$$

Derivace čitatele.

$$\left(6x^2-2x-20\right)' = 12x-2$$

Derivace jmenovatele.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4x-4}{6x^2-2x-20} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-6x+4}{12x-2} = \frac{12-12+4}{24-2} = \frac{2}{11}$$

Limita je vyřešena.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\log x}$$

Limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$.

$$(\ln x)' = \tfrac{1}{x}$$

Derivace čitatele.

$$(\log x)' = \tfrac{1}{x\ln 10}$$

Derivace jmenovatele.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x\ln 10}} = \ln 10$$

Limita je vyřešena.

Poznámky

143 - Vypočítejte limitu funkce l'Hospitalovým pravidlem

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Řešení Video **Teorie:** 53 **Příklady:** 243,244

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

Limita je typu $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}$$

Zlomky převedeme na společného jmenovatele.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

$$(\ln x-x+1)'=\tfrac{1}{x}-1$$

Derivace čitatele.

$$((x-1)\ln x)'=\ln x+\tfrac{x-1}{x}$$

Derivace jmenovatele.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

$$\left(\tfrac{1}{x}-1\right)'=-\tfrac{1}{x^2}$$

Derivace čitatele.

$$\left(\ln x+\tfrac{x-1}{x}\right)'=\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}$$

Derivace jmenovatele.

$$\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

Limita je vyřešena.

144 - Monotonnost a extrémy funkce

Zadání Najděte intervaly monotonnosti a extrémy funkce $f(x) = \frac{1}{12}.\left(-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 12\right)$.

Řešení Video **Teorie:** 55, 56, 57 **Příklady:** 245, 246, 247, 248

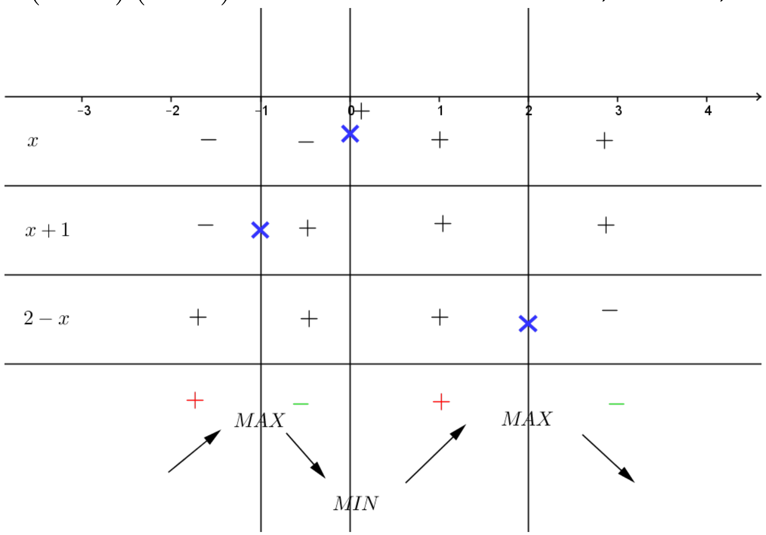
Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, ten zde tvoří množina všech reálných čísel, $D(f) = \mathbf{R}$.

$f'(x) = \frac{1}{12}.\left(-12x^3 + 12x^2 + 24x\right) = -x^3 + x^2 + 2x$ Vypočítáme první derivaci.

$-x^3 + x^2 + 2x > 0$ Funkce roste, kde je první derivace kladná.

$-x^3 + x^2 + 2x < 0$ Funkce klesá, kde je první derivace záporná.

$x(x+1)(2-x) = 0$ $x = 0, x = -1, x = 2$ jsou stacionární body, může v nich být extrém.



$(-\infty, -1), \langle 0, 2\rangle$ Funkce roste.
$\langle -1, 0\rangle, \langle 2, \infty)$ Funkce klesá.
$\left[-1, -\frac{7}{12}\right], \left[2, \frac{5}{3}\right]$ Lokální maximum.
$[0, -1]$ Lokální minimum.

Poznámky

145 - Monotonnost a extrémy funkce

Zadání Najděte intervaly monotonnosti a extrémy funkce $f(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Řešení Video **Teorie:** 55, 56, 57 **Příklady:** 245, 246, 247, 248

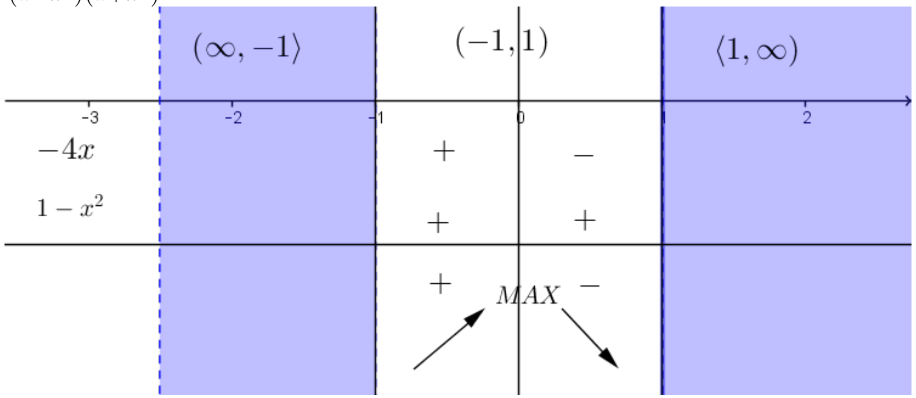
Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, ten zde je v zadání logaritmus, argument musí být kladný, $D(f) = (-1, 1)$.

$f'(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} . \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2).2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)}$ Vypočítáme první derivaci.

$\frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} > 0$ Funkce roste, tam kde je první derivace kladná.

$\frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} < 0$ Funkce klesá, tam kde je první derivace záporná.

$\frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} = 0$ $x = 0$ je stacionární bod, může v něm být extrém.



$(-1, 0\rangle$ Funkce roste.
$\langle 0, 1\rangle$ Funkce klesá.
$[0, 0]$ Lokální maximum.

Poznámky

146 - Extrémy funkce pomocí 2. derivace

Zadání Najděte extrémy funkce $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 30x^2 + 24x + 5$ s využitím 2. derivace.

Řešení Video **Teorie:** 55, 56, 57 **Příklady:** 245, 246, 247, 248

Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, $D(f) = \mathbf{R}$.

$f'(x) = 12x^3 + 48x^2 + 60x + 24$

Vypočítáme první derivaci.

$12x^3 + 48x^2 + 60x + 24 = 12(x+1)^2(x+2) = 0$

$x = -1, x = -2$ jsou stacionární body, může v nich být extrém.

$f''(x) = 36x^2 + 96x + 60$

Vypočítáme druhou derivaci a dosadíme do ní stacionární body.

$f''(-1) = 36.(-1)^2 + 96.(-1) + 60 = 0$

V bodě není extrém.

$f''(-2) = 36.(-2)^2 + 96.(-2) + 60 = 12 > 0$

V bodě je lokální minumum.

$[-2, -3]$

Lokální minimum.

Poznámky

147 - Globální extrémy funkce na daném intervalu

Zadání Najděte globální extrémy funkce $f(x) = x + \sin 2x$ na intervalu $I = \langle \frac{\pi}{3}, 2\pi \rangle$.

Řešení Video **Teorie:** 55, 56, 57 **Řešené příklady:** 144, 145, 146, 147

$f'(x) = 1 + 2\cos 2x$ Vypočítáme první derivaci.

$1 + 2\cos 2x = 0$ První derivaci položíme rovnu nule.

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$ Kosínus je záporné ve druhém a ve čtvrtém kvadrantu.

$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ Vybereme ty body, které patří zadanému intervalu $I = \langle \frac{\pi}{3}, 2\pi \rangle$.

$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$ Dosadíme za $k = 0, k = 1$.

$x_{11} = \frac{\pi}{3}, x_{12} = \frac{4\pi}{3}$

$x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ Dosadíme za $k = 0, k = 1$.

$x_{21} = \frac{2\pi}{3}, x_{22} = \frac{5\pi}{3}$

Ve všech bodech a v krajních bodech zadaného intervalu vypočítáme funkční hodnotu.

$x_{11} = \frac{\pi}{3}, y_{11} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 1,913$

$x_{12} = \frac{4\pi}{3}, y_{12} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 5,05$

$x_{21} = \frac{2\pi}{3}, y_{21} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 1,228$ Globální minimum $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

$x_{22} = \frac{5\pi}{3}, y_{22} = \frac{5\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 4,37$

$x = 2\pi, y = 2\pi = 6,28$ Globální maximum $[2\pi, 2\pi]$.

Poznámky

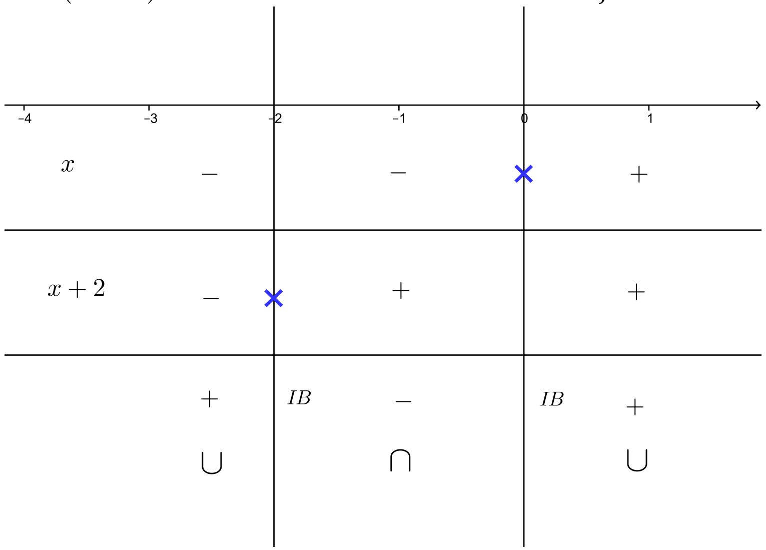
148 - Konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce

Zadání Najděte intervaly, kde je funkce $f(x) = x^4 + 4x^3 - x + 3$ konvexní, konkávní a zjistěte, zda má inflexní body.

Řešení **Video** **Teorie:** 58, 59, 60 **Příklady:** 249,250

Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, ten zde tvoří množina všech reálných čísel, $D(f) = \mathbf{R}$.

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 1$	Vypočítáme první derivaci.
$f''(x) = 12x^2 + 24x$	Vypočítáme druhou derivaci.
$12x^2 + 24x > 0$	Funkce je konvexní, tam kde je druhá derivace kladná.
$12x^2 + 24x < 0$	Funkce je konkávní, tam kde je druhá derivace záporná.
$12x(x+2) = 0$	$x = 0, x = -2$ jsou možné inflexní body.



$(-\infty, -2\rangle, \langle 0, \infty)$	Funkce je konvexní.
$\langle -2, 0\rangle$	Funkce je konkávní.
$[-2, -11], [0, 3]$	Inflexní body.

Poznámky

149 - Asymptoty grafu funkce

Zadání Najděte všechny asymptoty grafu funkce $f(x) = \frac{x}{x^2-3x+2}$.

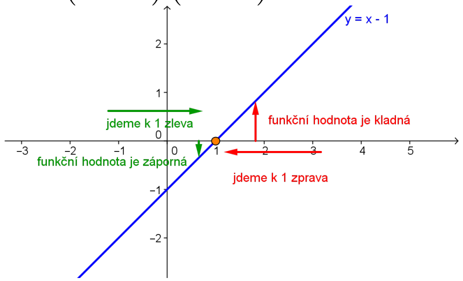
Řešení Video **Teorie:** 61 **Příklady:** 251,252

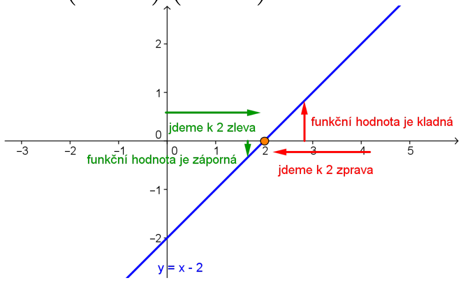
Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, v zadání je zlomek, jmenovatel musí být nenulový, $D(f) = \mathbf{R} - \{1,2\}$.

V bodech nespojitosti budeme hledat asymptoty bez směrnice, jedná se o asymptoty rovnoběžné se souřadnicovou osou y o rovnici $x = x_0$. Budeme zjišťovat, jestli se funkce k asymptotě blíží v $+\infty$ nebo $-\infty$.

V našem případě jde o přímky $x = 1, x = 2$. Připomeňte si výpočet jednostranné limity, budeme tento postup používat.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{-1.0} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{0}$$





$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{-1.(+0)} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{+0.1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{-1.(-0)} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{-0.1} = -\infty$$

Nyní budeme hledat asymptoty se směrnicí $y = kx + q$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x.(x^2-3x+2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x^2-3x+2)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x^2-3x+2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(2x-3)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Hledaná asymptota má rovnici $y = 0$, jedná se o souřadnicovou osu x.

Poznámky

150 - Asymptoty grafu funkce

Zadání Najděte všechny asymptoty grafu funkce $f(x) = x \arctan x$.

Řešení Video **Teorie:** 61 **Příklady:** 251,252

Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, $D(f) = \mathbf{R}$.

Body nespojitosti zde nejsou, budeme proto hledat pouze asypmtoty se směrnicí $y = kx + q$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\arctan x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\arctan x - \frac{\pi}{2}x\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = \infty.0 =$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1$$

Hledaná asymptota má rovnici $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \left(x\arctan x + \frac{\pi}{2}x\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to-\infty} x\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = -\infty.0 =$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1$$

Hledaná asymptota má rovnici $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

Poznámky

Řešené příklady – Lineární algebra

152 - Sčítání a odčítání matic

Zadání Vypočtěte $2 \cdot A - 3 \cdot B + 2 \cdot D - C$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 7 \\ 5 & 11 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 8 \\ 13 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení Video **Teorie:** 66, 67, 68 **Příklady:** 258, 259, 260

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 7 \\ 5 & 11 & 4 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 8 \\ 13 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 9 & 0 & -21 \\ -15 & -33 & -12 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 10 & 14 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 8 \\ 13 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & 12 & -1 & -27 \\ -22 & -16 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Poznámky

Násobíme-li matici číslem, násobíme tímto číslem každý její prvek.

Sčítat a odčítat můžeme pouze matice téhož typu.

Výsledná matice je stejného typu jako matice zadané.

153 - Násobení matic

Zadání Vynásobte matice A a B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení Video **Teorie:** 69 **Příklady:** 261, 262, 263

Matice A je typu $(4,3)$. Matice B je typu $(3,3)$.

Lze násobit?

$A \cdot B$

$(4,\underline{3})\ (\underline{3},3)$

Počet sloupců matice A se shoduje s počtem řádků matice B.

Výsledná matice bude typu (4,3).

$B \cdot A$

$(3,\underline{3})\ (\underline{4},3)$

Počet sloupců matice B se neshoduje s počtem řádků matice A.

Nelze tedy násobit.

			3	0	1
A	$\cdot$	B	2	-1	1
			6	5	-2
1	1	2	17	9	-2
2	0	1	12	5	0
-1	3	4	27	17	-6
0	5	1	16	0	3

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 17 & 9 & -2 \\ 12 & 5 & 0 \\ 27 & 17 & -6 \\ 16 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Poznámky

Matice lze násobit pouze tehdy, shoduje-li se počet sloupců první matice s počtem řádků druhé matice. Výsledná matice pak bude typu (počet řádků 1. matice, počet sloupců 2. matice).

154 - Hodnost matice

Zadání Vypočtěte hodnost matice A, kde
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení Video **Teorie:** 70, 71 **Příklady:** 264, 265, 266, 267, 268

Nejprve z matice vyloučíme řádek, který se opakuje nebo je násobkem jiného řádku.
3. řádek je dvojnásobkem 1. řádku,
4. řádek je trojnásobkem 1. řádku.
Vyloučíme tedy 3. a 4. řádek. Dostáváme tak následující ekvivalentní matici:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /.(-1) \\ + \quad + \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \textit{vymena} \\ \\ \leftarrow \textit{vynechame} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ /.(-2) \quad /.(-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \textit{vynechame} \end{array}$$

Výsledná matice $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -9 \end{pmatrix}$ má 3 LNZ řádky, její hodnost je tedy 3.

Jelikož tato matice vznikla ze základní matice použitím elementárních úprav, hodnosti obou matic jsou stejné. Tedy $h(A) = 3$.

Poznámky

Pomocí elementárních úprav postupně nulujeme jednotlivé sloupce pod hlavní diagonálou. Tedy snažíme se dostat do matice co nejvíce nul. Začínáme vždy od prvního sloupce, dále pokračujeme druhým, třetím atd.

155 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic:
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 8 \end{array}.$$

Řešení Video **Teorie:** 72, 73, 74 **Příklady:** 269, 270, 271, 272, 273

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Je vidět, že je výhodné hned vyměnit pořadí rovnic. Na první řádek můžeme zaměnit buď druhou nebo třetí rovnici, další pořadí je pak libovolné. Dostáváme tedy následující matici soustavy, kterou budeme dále upravovat

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & -6 & -2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} /.2 \quad /.3 \\ \leftarrow \quad + \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & -5 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /.(-4) \quad /.(-3) \\ \leftarrow \; /.3 \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -23 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -16 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /.(-15) \\ \leftarrow \; /.23 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -23 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -124 & -248 \end{array}\right)$$

Původní matici sousty jsme převedli na trojúhelníkový tvar a nyní aplikujeme Frobeniovu větu.
Platí, že
$$h(A) = h(A/B) = 4,$$
tj. hodnosti matice soustavy a matice rozšířené se shodují, tedy soustava má řešení. Navíc máme 4 neznámé a platí
$$h(A) = h(A/B) = n = 4$$
odsud plyne, že existuje právě jedno řešení uvažované soustavy. To spočítáme např. použitím zpětného chodu.

156 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zpětným chodem dostváme

- z posledního řádku:

$$\begin{aligned} -124x_4 &= -248 \ / : (-124) \\ x_4 &= \underline{2} \end{aligned}$$

- ze třetího řádku:

$$\begin{aligned} -23x_3 - 4x_4 &= -8 \qquad \text{dosadit za } x_4 \\ -23x_3 - 8 &= -8 \\ -23x_3 &= 0 \\ x_3 &= \underline{0} \end{aligned}$$

- ze druhého řádku:

$$\begin{aligned} 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 8 \qquad \text{dosadit za } x_3,\ x_4 \\ 3x_2 + 0 + 2 &= 8 \\ 3x_2 &= 6 \ / : 3 \\ x_2 &= \underline{2} \end{aligned}$$

- z prvního řádku:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \qquad \text{dosadit za } x_2,\ x_3,\ x_4 \\ -x_1 + 4 + 0 - 2 &= 0 \\ -x_1 &= -2 \\ x_1 &= \underline{2} \end{aligned}$$

Řešením soustavy je sloupcový vektor $\underline{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2, 2, 0, 2)^T}$.

157 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 9 \end{array}.$$

Řešení

Video **Teorie:** 72, 73, 74 **Příklady:** 269, 270, 271, 272, 273

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Dostáváme tedy následující matici soustavy, kterou budeme dále upravovat

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 4 & 2 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} /.(-2) \\ + \\ - \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Původní matici soustavy jsme převedli na stupňovitý tvar a nyní aplikujeme Frobeniovu větu.
Platí, že
$$h(A) = 2, \qquad h(A/B) = 3,$$
tj. hodnosti matice soustavy a matice rozšířené se neshodují, tedy soustava nemá řešení!
V posledním řádku matice máme na levé stravě 0, na pravé 8. Tedy rovnost $0 = 8$, což je samozřejmě nesmysl.

158 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic:
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \end{array}.$$

Řešení Video **Teorie:** 72, 73, 74 **Příklady:** 269, 270, 271, 272, 273

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Je vhodné přehodit rovnice tak, že začneme poslední z nich. Dostáváme tedy následující matici soustavy, kterou budeme dále upravovat

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \quad /.2 \quad /.(-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 16 \\ 0 & -1 & -9 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \textit{vynechat} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 16 \end{array}\right)$$

Původní matici soustavy jsme převedli na stupňovitý tvar a nyní použijeme Frobeniovu větu.
Platí, že
$$h(A) = 2, \qquad h(A/B) = 2,$$
tj. hodnosti matice soustavy a matice rozšířené se shodují, tedy soustava má řešení.
Počet neznámých $n = 3$, což znamená
$$2 = h(A) = h(A/B) \neq n = 3$$
odtud plyne, že existuje nekonečně mnoho řešení uvažované soustavy závislých na $n - h(A) = 3 - 2 = 1$ parametru. Opět použijeme zpětného chodu.

Poznámky

159 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zpětným chodem dostáváme

- z posledního řádku:

$$\begin{aligned} x_2 + 9x_3 &= 16 \qquad \text{zvolme parametr } t = x_3 \\ x_2 &= \underline{16 - 9t} \end{aligned}$$

- z prvního řádku:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \qquad \text{dosadit za } x_2,\ x_3 \\ -x_1 + 16 - 9t + 4t &= 6 \\ -x_1 &= 6 - 16 + 9t - 4t \qquad /.(-1) \\ x_1 &= \underline{10 - 5t} \end{aligned}$$

Řešením soustavy je sloupcový vektor $\underline{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (10 - 5t, 16 - 9t, t)^T}$.

160 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 7x_4 & + & 14x_5 & = & 28 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & + & 14x_4 & - & 35x_5 & = & 14 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 14x_4 & + & 21x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 7x_4 & & & = & 42 \\ -x_1 & - & 3x_2 & & & - & 7x_4 & + & 21x_5 & = & -42 \end{array}.$$

Řešení Video **Teorie:** 72, 73, 74 **Příklady:** 269, 270, 271, 272, 273

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & -7 & 14 & 28 \\ 0 & 1 & -3 & 14 & -35 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & -14 & 21 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -7 & 0 & 42 \\ -1 & -3 & 0 & -7 & 21 & -42 \end{array}\right) \begin{array}{l} /.(-2) \quad /.(-3) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} + \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & -7 & 14 & 28 \\ 0 & 1 & -3 & 14 & -35 & 14 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & -7 & -56 \\ 0 & -2 & -8 & 14 & -42 & -42 \\ 0 & -1 & 3 & -14 & 35 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ LNZ \\ \\ vynechat \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & -7 & 14 & 28 \\ 0 & 1 & -3 & 14 & -35 & 14 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & -7 & -56 \\ 0 & -2 & -8 & 14 & -42 & -42 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /.3 \quad /.2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & -7 & 14 & 28 \\ 0 & 1 & -3 & 14 & -35 & 14 \\ 0 & 0 & -14 & 42 & -112 & -14 \\ 0 & 0 & -14 & 42 & -112 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /:14 \quad LNZ \\ vynechat \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & -7 & 14 & 28 \\ 0 & 1 & -3 & 14 & -35 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -8 & -1 \end{array}\right)$$

Původní matici soustavy jsme převedli na stupňovitý tvar a nyní použijeme Frobeniovu větu. Platí, že

$$3 = h(A) = h(A/B) \neq n = 5$$

tj. hodnosti matice soustavy a matice rozšířené se shodují, tedy soustava má řešení. Počet neznámých $n = 5$, což znamená, že existuje nekonečně mnoho řešení uvažované soustavy závislých na $n - h(A) = 5 - 3 = 2$ parametrech.

161 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zpětným chodem dostváme

- z posledního řádku:

$$\begin{aligned} -x_3+3x_4-8x_5 &= -1 \qquad \text{zvolme parametry } u=x_4,\ v=x_5 \\ -x_3+3u-8v &= -1 \\ x_3 &= \underline{1+3u-8v} \end{aligned}$$

- z druhého řádku:

$$\begin{aligned} x_2-3x_3+14x_4-35x_5 &= 14 \qquad \text{dosadit za } x_3,\ x_4,\ x_5 \\ x_2-3(1+3u-8v)+14u-35v &= 14 \\ x_2 &= \underline{17-5u+11v} \end{aligned}$$

- z prvního řádku:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-7x_4+14x_5 &= 28 \qquad \text{dosadit za } x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \\ x_1+2(17-5u+11v)+3(1+3u-8v)-7u+14v &= 28 \\ x_1 &= \underline{-9+8u-12v} \end{aligned}$$

Řešením soustavy je sloupcový vektor:

$\underline{\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T=(-9+8u-12v,17-5u+11v,1+3u-8v,u,v)^T}.$

162 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie:** 72, 73, 74 **Příklady:** 269, 270, 271, 272, 273

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Pravou stranu nepíšeme.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad /.(-2) \quad /.(-3) \quad /.(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad /.(-1) \quad + \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \quad /.\tfrac{5}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Užijeme Frobeniovu větu. Platí, že $h(A) = n = 4$, tj. hodnost matice soustavy se shoduje s počtem neznámých, tedy existuje právě jedno řešení uvažované soustavy, a to řešení triviální, tj. sloupcový vektor

$$\underline{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0, 0, 0, 0)^T}.$$

Poznámky

Homogenní soustava lin. rovnic má vždy řešení a to buď triviální, nebo jich má nekonečně mnoho závislých na $n - h(A)$ parametrech.

163 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 10x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Řešení Video **Teorie:** 72, 73, 74 **Příklady:** 269, 270, 271, 272, 273

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Pravou stranu nepíšeme.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /.2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ /.(-1) \quad /.(-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ LNZ \\ vynechat \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Užijeme Frobeniovu větu. Platí, že $h(A) = 3$, $n = 4$, tj. hodnost matice soustavy se neshoduje s počtem neznámých, tedy existuje nekonečně mnoho řešení uvažované soustavy závislých na $n - h(A) = 4 - 3 = 1$ parametru.

Poznámky

Homogenní soustava lin. rovnic má vždy řešení a to buď triviální, nebo jich má nekonečně mnoho závislých na $n - h(A)$ parametrech.

164 - Soustavy lineárních rovnic

Zpětným chodem dostváme

- z posledního řádku:

$$\begin{aligned} -2x_4 &= 0 \\ x_4 &= \underline{0} \end{aligned}$$

- z druhého řádku:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - 2x_4 &= \qquad\qquad \text{zvolme parametr } x_3 = t \\ x_2 &= \underline{-t} \end{aligned}$$

- z prvního řádku:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \qquad\qquad \text{dosadit za } x_2,\ x_3,\ x_4 \\ -x_1 + 2(-t) - t + 0 &= 0 \\ x_1 &= \underline{-3t} \end{aligned}$$

Řešením je sloupcový vektor:

$$\underline{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-3t, -t, t, 0)^T}.$$

Poznámky

Homogenní soustava lin. rovnic má vždy řešení a to buď triviální, nebo jich má nekonečně mnoho závislých na $n - h(A)$ parametrech.

165 - Lineární závislost a nezávislost vektorů

Zadání Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{a} = (1, -1, 4)$, $\vec{b} = (2, 2, 6)$, $\vec{c} = (-1, -3, 2)$ lineárně závislé nebo nezávislé.

Řešení **Video** **Teorie: 65**

Do lineární kombinace

$$k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} + m \cdot \vec{c} = \vec{0} \qquad (\star)$$

dosadíme souřadnice vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\begin{aligned} 1k + 2l - 1m &= 0 \\ -1k + 2l - 3m &= 0 \\ 4k + 6l + 2m &= 0 \end{aligned}$$

čímž jsme získali soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme GEM:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} /.(-4) \\ + \\ - \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /:2 \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow h = n = 3$.

Podle Frobeniovy věty existuje právě jednoho řešení. Zpětným chodem dostváme

- z posledního řádku
$$4m = 0 \Rightarrow m = 0,$$
- z druhého řádku
$$4l - 4m = 0 \Rightarrow 4l = 4m \Rightarrow l = 0,$$
- z prvního řádku
$$k + 2l - m = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Soustava má pouze triviální řešení, tedy uvažované vektory jsou LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ.

Poznámky

Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou koeficienty lineární kombinace $(\star)$ rovny nule, tj. $k, l, m = 0$.

Pokud alespoň jeden koeficient $k, l, m \neq 0$, pak jsou vektory lineárně závislé.

166 - Lineární závislost a nezávislost vektorů

Zadání Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{a} = (3, 0, 3)$, $\vec{b} = (-4, 1, 3)$, $\vec{c} = (7, -1, 0)$ lineárně závislé nebo nezávislé.

Řešení **Video** **Teorie: 65**

Do lineární kombinace

$$k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} + m \cdot \vec{c} = \vec{0} \qquad (\star)$$

dosadíme souřadnice vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3k & - & 4l & + & 7m & = & 0 \\ & & l & - & m & = & 0 \\ 3k & + & 3l & & & = & 0 \end{array}$$

čímž jsme získali soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme GEM:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \neg \ \ /.(-1) \\ | \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \ \ vynechat \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow h = 2;\ n = 3.$
Podle Frobeniovy věty existuje nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru (n-h=3-2=1 parametr).
Zpětným chodem dostváme

- z posledního řádku: $l - m = 0$ zvolíme parametr $m = t \Rightarrow l = t$,
- z prvního řádku: $3k - 4l + 7m = 0 \Rightarrow 3k - 4t + 7t = 0 \Rightarrow 3k = -3t \Rightarrow k = -t$,

Vybereme jedno z možných řešení, tj. zvolíme za parametr t konkrétní číslo. Např. $t = 1$, pak

$$-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, tedy uvažované vektory jsou LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ.

Poznámky

Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou koeficienty lineární kombinace $(\star)$ rovny nule, tj. $k, l, m = 0$.

Pokud alespoň jeden koeficient $k, l, m \neq 0$, pak jsou vektory lineárně závislé.

167 - Lineární kombinace vektorů

Poznámky

Zadání Zapište vektor $\vec{d} = (-5, 11, -1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{a} = (-2, 2, 4)$, $\vec{b} = (1, 1, -5)$, $\vec{c} = (-1, 3, -2)$.

Řešení Video **Teorie:** 65

Vektor $\vec{d}$ musí splňovat následující vztah

$$\vec{d} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} + m \cdot \vec{c}. \qquad (**)$$

Dosadíme souřadnice vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ a $\vec{d}$ do $(**)$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -5 & = & -2k & + & l & - & m \\ 11 & = & 2k & + & l & + & 3m \\ -1 & = & 4k & - & 5l & - & 2m, \end{array}$$

čímž jsme získali soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme GEM:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & -5 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /.2 \\ + \\ - \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -4 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /.3 \\ /.2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow h(A) = h(A/B) = n = 3$. Podle Frobeniovy věty tedy existuje právě jednoho řešení. Zpětným chodem dostváme

- z posledního řádku
$$-2m = -4 \Rightarrow m = 2,$$
- z druhého řádku
$$2l + 2m = 6 \Rightarrow 2l + 4 = 6 \Rightarrow l = 1,$$
- z prvního řádku
$$-2k + l - m = -5 \Rightarrow -2k + 1 - 2 = -5 \Rightarrow k = 2.$$

Vektor $\vec{d}$ zapíšeme takto

$$\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}.$$

168 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice A 1. řádu, kde $A = (-7)$.

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Příklady:** 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280

Determinant jednoprvkové matice je roven danému prvku této matice. Tedy

$$\det A = |-7| = \underline{-7}.$$

Poznámky

POZOR!
Označení $|-7|$ neznamená absolutní hodnotu, nýbrž označení determinantu!

169 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matic B, C 2. řádu, kde

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ b) $C = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Příklady:** 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280

ad a) $$\det B = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-7) - 8 \cdot (-3) = -28 + 24 = \underline{-4}.$$

ad b) $$\det C = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = \underline{1}.$$

Poznámky

Determinant 2. řádu vypočteme tak, že od součinu prvků hlavní diagonály odečteme součin prvků vedlejší diagonály.

170 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice D 3. řádu Sarrusovým pravidlem, kde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Příklady:** 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280

$$\det D = \begin{array}{ccc l} 1 & 0 & -1 & - \\ -1 & 2 & 1 & - \\ 3 & 1 & 2 & -\;+ \\ 1 & 0 & -1 & + \\ -1 & 2 & 1 & + \end{array}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$- [3 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 2] =$$

$$= 4 + 1 + 0 - [-6 + 1 - 0] = 5 + 5 = \underline{10}$$

Poznámky

Sarrusovo pravidlo:

Sepíšeme první 2 řádky.
Prvky ležící na úhlopříčkách vynásobíme, přičemž těm, které směřují zleva doprava (hlavní diagonála) přiřadíme znaménko + a těm, které směřují zprava doleva (vedlejší diagonála) přiřadíme znaménko -.

171 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice D 3. řádu Laplaceovým rozvojem, přičemž

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení **Video** **Teorie:** **75**, **76**, **77** **Příklady:** **274**, **275**, **276**, **277**, **278**, **279**, **280**

Provedeme Laplaceův rozvoj podle 1. řádku (viz poznámka).

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{10}$$

Poznámky

Pro Laplaceův rozvoj vybíráme řádek nebo sloupec matice, ve kterém je obsaženo nejvíce nul.

172 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice D 3. řádu Laplaceovým rozvojem, přičemž

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Příklady:** 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280

Provedeme Laplaceův rozvoj podle 1. řádku (viz poznámka).

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + 0 + (-1) \cdot (-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 3 + 7 = \underline{10}$$

Poznámky

Pro Laplaceův rozvoj vybíráme řádek nebo sloupec matice, ve kterém je obsaženo nejvíce nul.

173 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice D 3. řádu užitím vlastností determinantu, kde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Příklady:** 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280

$$\det D = \begin{array}{|ccc|l} 1 & 0 & -1 & - \\ -1 & 2 & 1 & - \\ 3 & 1 & 2 & -\,+ \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{cccl} 1 & 0 & -1 & + \\ -1 & 2 & 1 & + \end{array}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$- \; [3 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 2] =$$

$$= 4 + 1 + 0 - [-6 + 1 - 0] = 5 + 5 = \underline{10}$$

Poznámky

Sarrusovo pravidlo:

Sepíšeme první 2 řádky.
Prvky ležící na úhlopříčkách vynásobíme, přičemž těm, které směřují zleva doprava (hlavní diagonála) přiřadíme znaménko + a těm, které směřují zprava doleva (vedlejší diagonála) přiřadíme znaménko -.

174 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice E 5. řádu, kde $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Příklady:** 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280

Matici determinantu převedeme na matici trojúhelníkovou.

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \;/.(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \;/.(-3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}_{\det E_1}.$$

Nyní jsme dostali subdeterminant 3. řádu, který spočítáme Sarrusovým pravidlem.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 18 - (6 - 6 - 2) = -16$$

$= \underline{16}$

Poznámky

Determinant matice se nemění, přičteme-li k řádku matice lineární kombinaci zbývajících řádků matice.

Násobíme-li řádek matice determinantu reálným číslem $c \neq 0$, pak musíme determinant vynásobit číslem $\frac{1}{c}$.

Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

175 - Determinant matice

Poznámky

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Příklady:** 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280

Subdeterminant $\det E_2$ 3. řádu spočítáme Sarrusovým pravidlem.

$$\det E_2 = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{array}\right| = -2+2-18-(6-6-2) = -16$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & - \\ 1 & 2 & 3 & - \\ -3 & -2 & -1 & -\;+ \\ 1 & 2 & -1 & + \\ 1 & 2 & 3 & + \end{array}$$

Nyní stačí dosadit spočítanou hodnotu subdeterminantu $\det E_2$ do výpočtu determinantu $\det E$, tedy

$\det E = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot (-16) = \underline{16}$

176 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic Cramerovým pravidlem:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 19 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie:** 78 **Příklady:** 281

Spočítáme příslušné determinanty:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 179 \qquad \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 5 & 14 & -5 \\ 3 & 19 & 2 \end{vmatrix} = 358$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 14 & 2 & -5 \\ 19 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 537 \qquad \det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 19 \end{vmatrix} = 179$$

Spočítáme příslušné složky řešení:

$$x_1 = \frac{det A_1}{det A} = \frac{537}{179} = 3$$

$$x_2 = \frac{det A_2}{det A} = \frac{358}{179} = 2$$

$$x_3 = \frac{det A_3}{det A} = \frac{179}{179} = 1$$

Řešením je sloupcový vektor:
$$\underline{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (3, 2, 1)^T}.$$

Poznámky

Cramerovo pravidlo:

1. jen pro soustavy s regulární maticí soustavy A, tj.
$$det A \neq 0$$
2. vypočtou se determinanty A, A_i (nahradí se příslušný $i-$tý sloupec pravou stranou)
3. spočítájí se složky řešení
$$x_i = \frac{det A_i}{det A}$$

177 - Inverzní matice

Zadání Pomocí adjungované matice vypočtěte inverzní matici k matici D, kde $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Řešení Video **Teorie:** 79, 80 **Příklady:** 282, 283, 284, 285, 286

Matice D musí být regulární, tzn. $\det D \neq 0$. Nejprve spočítáme $\det D$:

$$\det D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -23.$$

Nyní matici D transponujeme (vyměníme řádky za sloupce):

$$D^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme adjungovanou matici $adjD$:

$$adjD = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & -10 \\ 12 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice D^{-1} má tedy následující tvar

$$D^{-1} = -\frac{1}{23} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & -10 \\ 12 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Poznámky

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot adjD.$$

178 - Inverzní matice

Zadání Užitím Gaussovy metody určete inverzní matici k matici A, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Řešení Video **Teorie:** 79, 80 **Příklady:** 282, 283, 284, 285, 286

$$A/E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /.(-1) \\ /.(-2) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /.4 \quad /.2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /.(-1) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} / : 2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = E/A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámky

Matici A převedeme pomocí ekvivalentních úprav na jednotkovou matici E. Pokud stejné upravy použijeme i na jednotkovou matici E, dostaneme tak nakonec matici A^{-1}, tedy inverzní matici k matici A.

179 - Maticová rovnice

Zadání Řešte maticovou rovnici $A \cdot X = B$ s neznámou X, kde
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení Video **Teorie:** 81 **Příklady:** 287, 288, 289

Z rovnice $A \cdot X = B$ vyjádříme X tak, že rovnici vynásobíme ZLEVA maticí A^{-1}.

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B && / \cdot A^{-1} \text{ zleva} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B && \text{odtud dostáváme (viz poznámka):} \\ X &= A^{-1} \cdot B && \text{vynásobíme příslušné matice.} \end{aligned}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1,$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -(-3) & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

		2	3	7
A^{-1}	$\cdot B$	2	-1	0
2	1	6	5	14
-3	-2	-10	-7	-21

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 14 \\ -10 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

Poznámky
A^{-1} inverzní matice k A.

$A^{-1} \cdot A = E$,

E jednotková matice.

180 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 19 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie:** 82 **Příklady:** 290, 291

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{179} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 22 & 7 \\ -25 & -8 & 30 \\ 14 & -17 & 19 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & 4 \\ & A & \cdot & B & 14 \\ & & & & 19 \\ \hline & 24 & 22 & 7 & 3 \\ \frac{1}{179}\cdot & -25 & -8 & 30 & 2 \\ & 14 & -17 & 19 & 1 \end{array}$$

Řešením je sloupcový vektor:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (3, 2, 1)^T.$$

Poznámky

Soustavu můžeme napsat v maticovém tvaru
$$A.X = B$$

A - matice soustavy
B - pravá strana

Násobením zleva inverzní maticí A^{-1} dostaneme řešení soustavy:

$$\begin{array}{rcll} A \cdot X & = & B & /.A^{-1}\ zleva \\ A^{-1} \cdot A \cdot X & = & A^{-1} \cdot B & \\ E \cdot X & = & A^{-1} \cdot B & \\ X & = & A^{-1} \cdot B & \end{array}$$

Řešené příklady – Analytická geometrie

182 - Analytická geometrie - rovina

Zadání Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny, která prochází průsečíkem přímky a s rovinou ρ a je rovnoběžná s přímkami p, q.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 3t \\ y & = & 4 & - & 4t \\ z & = & 1 & + & t \end{array} \qquad \rho: 2x - 3y + z - 12 = 0 \qquad p: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 4r \\ y & = & 3 & + & 7r \\ z & = & 6 & - & r \end{array} \qquad q: \begin{array}{rcrcr} x & = & 10 & - & 6s \\ y & = & & & 3s \\ z & = & 1 & & \end{array}$$

Řešení **Video** **Teorie: 94, 95** **Příklady: 299,300**

Pro parametrické rovnice potřebujeme bod a dva různé vektory.

Bod - získáme jako průsečík přímky a roviny. Parametrické rovnice dosadíme do obecné rovnice roviny a vypočítáme parametr průsečíku.

Vektory - použijeme směrové vektory přímek p, q, protože jsou, stejně jako přímky, s hledanou rovinou rovnoběžné.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 3t \\ y & = & 4 & - & 4t \\ z & = & 1 & + & t \end{array} \qquad \rho: 2x - 3y + z - 12 = 0$$

$2(2+3t) - 3(4-4t) + 1 + t - 12 = 0$ Řešíme lineární rovnici.

$t = 1$ Dostali jsme jedno řešení. Parametr dosadíme do rovnic přímky.

$A[5, 0, 2]$ Přímka a rovina jsou různoběžné, mají společný průsečík.

$$p: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 4r \\ y & = & 3 & + & 7r \\ z & = & 6 & - & r \end{array}$$

Směrový vektor $\vec{s_p} = (-4, 7, -1)$.

$$q: \begin{array}{rcrcr} x & = & 10 & - & 6s \\ y & = & & & 3s \\ z & = & 1 & & \end{array}$$

Směrový vektor $\vec{s_q} = (-6, 3, 0)$.

Nyní můžeme napsat parametrické rovnice hledané roviny $\alpha: \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 5 & - & 4u & - & 6v \\ y & = & & + & 7u & + & 3v \\ z & = & 2 & - & u & & \end{array}$.

Poznámky

Vzájemná poloha přímky a roviny:

a) různoběžné - jeden společný bod (průsečík),

b) rovnoběžné - žádný společný bod,

c) přímka leží v rovině - ∞-mnoho společných bodů.

183 - Analytická geometrie - rovina

Zadání Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny, která prochází průsečíkem přímky a s rovinou ρ a je rovnoběžná s přímkami p, q.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& 3t \\ y &=& 4 &-& 4t \\ z &=& 1 &+& t \end{array} \qquad \rho: 2x-3y+z-12=0 \qquad p: \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &-& 4r \\ y &=& 3 &+& 7r \\ z &=& 6 &-& r \end{array} \qquad q: \begin{array}{rcrcr} x &=& 10 &-& 6s \\ y &=& & & 3s \\ z &=& 1 & & \end{array}$$

Řešení **Video** **Teorie:** 94, 95 **Příklady:** 299,300

Pro obecnou rovnici $ax+by+cz+d=0$ potřebujeme bod a normálový vektor.
Bod - již máme jako průsečík přímky a roviny.
Normálový vektor - je kolmý k rovině, tedy je kolmý k vektorům $\vec{s_p}, \vec{s_q}$, získáme ho jako vektorový součin $\vec{n}=\vec{s_p}\times\vec{s_q}$.

$$p: \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &-& 4r \\ y &=& 3 &+& 7r \\ z &=& 6 &-& r \end{array}$$

Směrový vektor $\vec{s_p}=(-4,7,-1)$.

$$q: \begin{array}{rcrcr} x &=& 10 &-& 6s \\ y &=& & & 3s \\ z &=& 1 & & \end{array}$$

Směrový vektor $\vec{s_q}=(-6,3,0)$.

$$\vec{n}=\vec{s_p}\times\vec{s_q}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 7 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(3,6,30)$$

$\alpha: 3x+6y+30z+d=0$	Do obecné rovnice dosadíme souřadnice normálového vektoru.
$\alpha: 3.5+6.0+30.2+d=0$	Dosadíme souřadnice bodu A a vypočítáme d.
$d=-75$	
$\alpha: 3x+6y+30z-75=0$	Rovnici ještě vydělíme 3.
$\alpha: x+2y+10z-25=0$	Dostali jsme hledanou rovnici.

Poznámky

Vektorový součin dvou vektorů:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ jsou jednotkové vektory ve směru os kartézské soustavy souřadnic.
Nebo

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \end{vmatrix}\right.$$

184 - Analytická geometrie - vzdálenost

Zadání Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky r. Bod je průsečík dvou přímek a, b a přímka je dána bodem K a směrovým vektorem $\vec{s}$.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& 3t \\ y &=& 4 &-& t \\ z &=& 1 &+& t \end{array} \qquad b: \begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &-& 4s \\ y &=& 7 &+& 4s \\ z &=& 2 \end{array} \qquad K[1,3,1] \qquad \vec{s} = (2,-2,1)$$

Řešení Video **Teorie:** 98 **Příklady:** 303, 304

Nejdříve najdeme bod A. Budeme řešit soustavu 6 rovnic o 5 neznámých. Tu převedeme na 3 rovnice o 2 neznámých.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& 3t \\ y &=& 4 &-& t \\ z &=& 1 &+& t \end{array} \qquad b: \begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &-& 4s \\ y &=& 7 &+& 4s \\ z &=& 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 &+& 3t &=& 1 &-& 4s \\ 4 &-& t &=& 7 &+& 4s \\ 1 &+& t &=& 2 \end{array}$$

Z poslední rovnice vypočítáme t.

$t = 1$

Dosadíme do prvních dvou rovnic a vypočítáme s.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 &+& 3 &=& 1 &-& 4s \\ 4 &-& 1 &=& 7 &+& 4s \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrr} 4 &=& - & 4s \\ -4 &=& + & 4s \end{array}$$

Z první rovnice je $s = -1$, z druhé rovnice také.

Soustava má jediné řešení, přímky jsou různoběžné, mají průsečík.

$A[5,3,2]$

Parametr $t = 1$ dosadíme do rovnic přímky a nebo parametr $s = -1$ do přímky b.

Poznámky

Určete společné body přímek, tj. sestavte si a řešte příslušnou soustavu lineárních rovnic.
Pak:
a) různoběžky - jeden společný bod (průsečík),
b) rovnoběžky - žádný společný bod, ale leží v jedné rovině,
c) mimoběžky - žádný společný bod a neleží v jedné rovině,
d) totožné přímky - ∞-mnoho společných bodů.

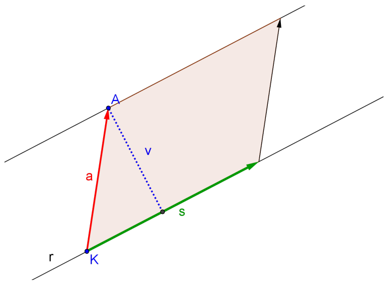
185 - Analytická geometrie - vzdálenost

Zadání Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky r. Bod je průsečík dvou přímek a, b a přímka r je dána bodem K a směrovým vektorem $\vec{s}$.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 3t \\ y & = & 4 & - & t \\ z & = & 1 & + & t \end{array} \qquad b: \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & 4s \\ y & = & 7 & + & 4s \\ z & = & 2 & & \end{array} \qquad K[1,3,1] \qquad \vec{s} = (2,-2,1)$$

Řešení Video **Teorie:** 98 **Příklady:** 303, 304

Nyní se můžeme pustit do výpočtu vzdálenosti bodu A od přímky r.



Vzdálenost v vypočítáme podle vzorce $v = \frac{\left|\vec{s} \times \vec{a}\right|}{\left|\vec{s}\right|}$.

Z obrázku vidíme, že $\vec{s}$ je směrový vektor přímky, $\vec{a} = A - K$. Připomeňte si odvození vzorce z přednášek.

$K[1,3,1]$, $A[5,3,2]$, $\vec{s} = (2,-2,1)$

$\vec{a} = A - K = (4,0,1)$ Vypočítáme souřadnice vektoru $\vec{a}$.

$$\vec{s} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2,2,8)$$

V čitateli potřebujeme vektorový součin.

$\left|\vec{s} \times \vec{a}\right| = \sqrt{4+4+64} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ Velikost vektorového součinu.

$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

$$v = \frac{\left|\vec{s} \times \vec{a}\right|}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

Poznámky

186 - Analytická geometrie - odchylka

Zadání Ověřte, zda jsou přímky p, q kolmé. Přímka p je průsečnicí rovin α, β a přímka q je dána bodem Q a směrovým vektorem $\vec{s_q}$.

$\alpha: 2x - y + 3z - 4 = 0$ $\beta: 4x + y - 2z + 1 = 0$ $Q\,[7, 6, -1]$ $\vec{s_q} = (6, 0, 1)$

Řešení Video **Teorie:** 93 **Příklady:** 305

Dvě přímky jsou kolmé, mají-li kolmé směrové vektory. Potřebujeme tedy souřadnice obou směrových vektorů. Směrový vektor přímky p vypočítáme jako vektorový součin normálových vektorů rovin α, β.
Připomeňme si ještě, že vektory jsou kolmé, je-li jejich skalární součin roven 0.

$$\vec{n_\alpha} = (2, -1, 3), \vec{n_\beta} = (4, 1, -2)$$

$$\vec{s_p} = \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 16, 6)$$

Toto je hledaný směrový vektor $\vec{s_p}$.

$$\vec{s_q} = (6, 0, 1)$$

Kolmost ověříme skalárním součinem.

$$\vec{s_p} \cdot \vec{s_q} = -1 \cdot 6 + 16 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 0$$

Vektory a tedy i zadané přímky jsou kolmé.

Poznámky

Určete společné body přímek, tj. sestavte si a řešte příslušnou soustavu lineárních rovnic. Pak:
a) různoběžky - jeden společný bod (průsečík),
b) rovnoběžky - žádný společný bod, ale leží v jedné rovině,
c) mimoběžky - žádný společný bod a neleží v jedné rovině,
d) totožné přímky - ∞-mnoho společných bodů.
Vektorový součin dvou vektorů:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ jsou jednotkové vektory ve směru os kartézské soustavy souřadnic.
Nebo

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Matematika I: Pracovní listy do cvičení

Dagmar Dlouhá, Radka Hamříková, Zuzana Morávková, Michaela Tužilová

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Pracovní listy – Funkce jedné proměnné

189 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^2 - x - 2 < 0$ c) $2x^2 + 9x - 5 \geq 0$ d) $-x^2 + 3x > 0$

Řešení **Video**

Tahák

Kořeny kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

190 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $x^2 = 3$ b) $x^2 > 3$ c) $x(x-2) > 0$ d) $(x+1)(x-2) \leq 0$ e) $x(3-x) \geq 5$ f) $x^2 \leq -4(x+1)$

Řešení **Video**

191 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $\dfrac{x+1}{3-x} < 0$ b) $\dfrac{2x-1}{x+3} > 1$ c) $\dfrac{1}{x-4} > 0$ d) $\dfrac{x+1}{-3} < 0$ e) $\dfrac{-2-x}{\frac{1}{2}+x} \leq 0$ f) $-\frac{2}{3} \cdot \dfrac{x-1}{x+7} \geq 0$

Řešení Video

192 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $\dfrac{5x-8}{5-x} < -2$

b) $\dfrac{(x+1)(5-x)}{x} > 0$

c) $\dfrac{x+1}{2x+3} < \dfrac{3-x}{2x+3}$

d) $\dfrac{3-x}{x+5} \leq \dfrac{1}{x}$

Řešení Video

193 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $|x| = 5$ b) $|x| + 2 = 0$ c) $|x| - 3 < 0$ d) $|2x| > 3$ e) $3 - |x| = 7$ f) $3 - |x| < 7$

Řešení Video

194 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $|x-1| = 5$ b) $|x-1| > 5$ c) $|4-2x| = 6$ d) $|4-2x| < 6$

Řešení Video

195 - Definiční obory

Zadání Určete podmínky a najděte definiční obor funkce.

a) $y = \ln \dfrac{2+x}{x} + \sqrt{4-3x-x^2}$

b) $y = \sqrt{(1-2x)\ln x}$

c) $y = \ln\left(2 + \dfrac{2x+6}{3-x}\right)$

d) $y = \dfrac{1}{(4-x)\ln(x-2)}$

Řešení Video **Teorie:** 13 **Řešené příklady:** 103, 104, 105 , 106, 107

Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od nuly

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$

Arkussinus, arkuskosinus
argument je z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

196 - Definiční obory

Zadání Určete podmínky a najděte definiční obor funkce.

a) $y = \tan\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $y = \dfrac{x}{\sin 2x}$ c) $y = \cot \dfrac{2x+\pi}{5}$ d) $y = \dfrac{1}{1-\cos 2x}$

Řešení Video **Teorie:** 13 **Řešené příklady:** 103, 104, 105 , 106, 107

Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od nuly

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$

Arkussinus, arkuskosinus
argument je z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

197 - Definiční obory

Zadání Určete podmínky a najděte definiční obor funkce.

a) $y = \arcsin\left(\dfrac{2x+6}{3}\right)$ b) $y = \arcsin\left(2 - \dfrac{x}{2x+3}\right)$ c) $y = \arccos\left(\dfrac{2x-1}{3x}\right)$ d) $y = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

Řešení Video **Teorie:** 13 **Řešené příklady:** 103, 104, 105 , 106, 107

Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od nuly

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$

Arkussinus, arkuskosinus
argument je z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

198 - Graf lineární funkce

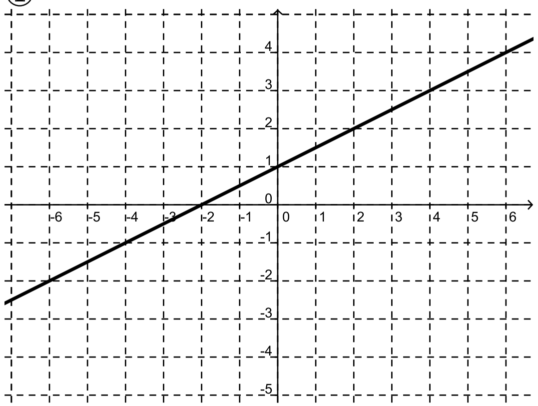
Zadání Přiřaďte k obrázku správný předpis.

a) $y = 2$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = \frac{1}{2}x + 1$ e) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ f) $x = 2.5$

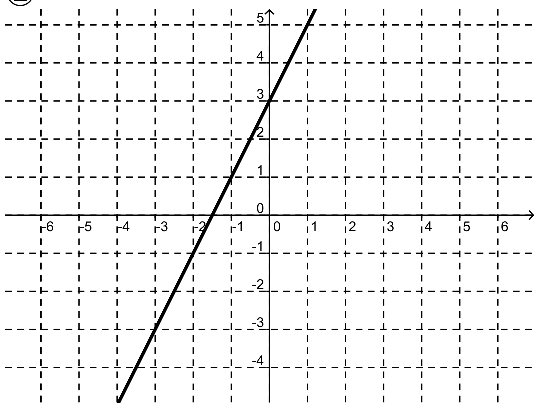
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 22**

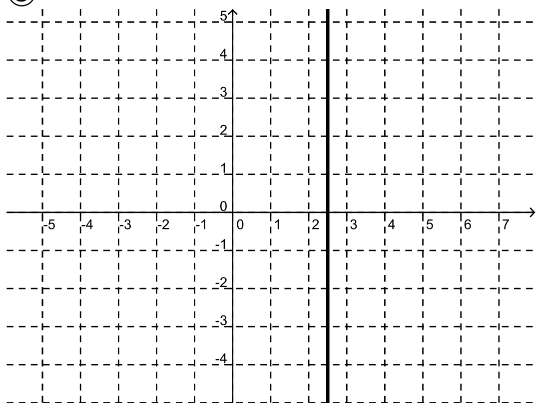
①



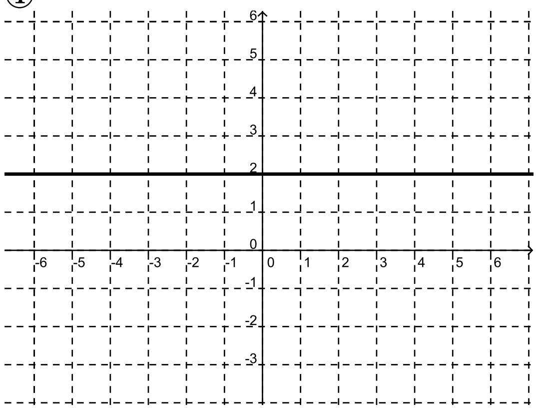
②



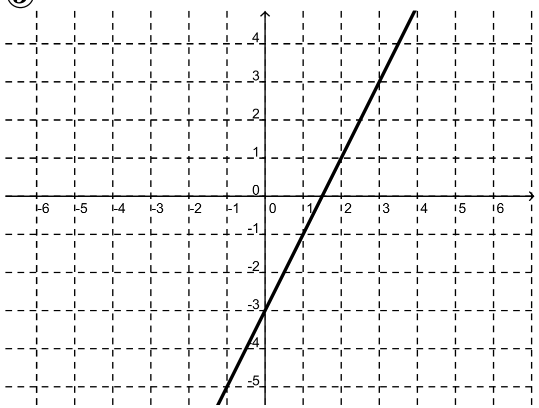
③



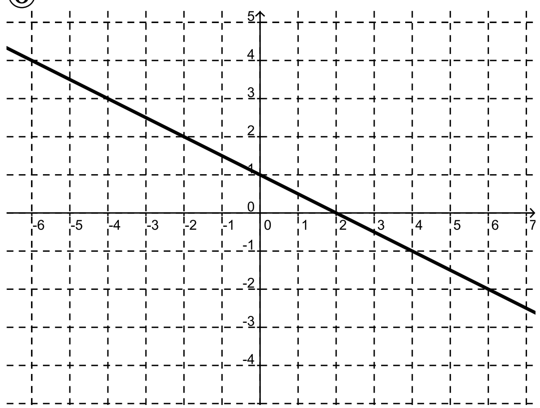
④



⑤



⑥



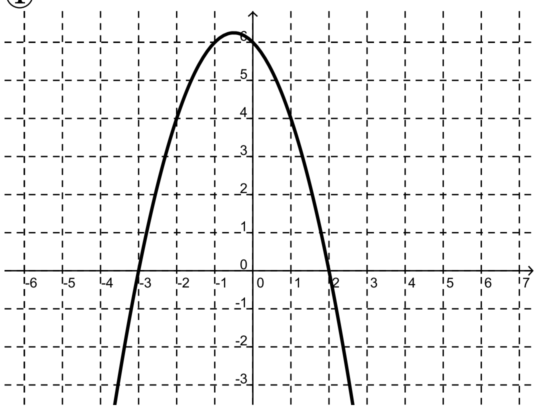
199 - Graf kvadratické funkce

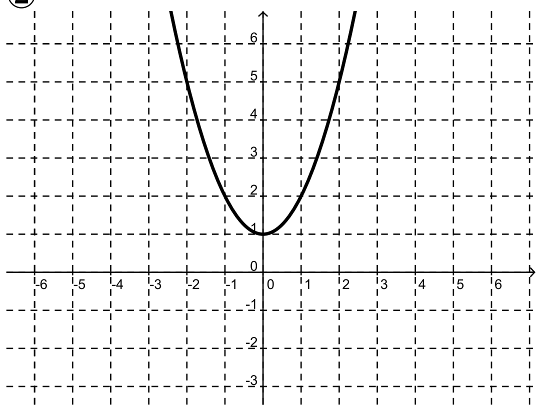
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

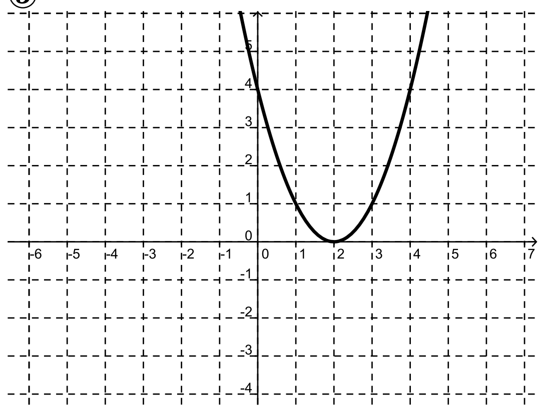
a) $y = x^2 + 1$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = 4 - x^2$ d) $y = (x-2)^2$ e) $y = \frac{1}{2}\left(6 - x - x^2\right)$ f) $y = 6 - x - x^2$

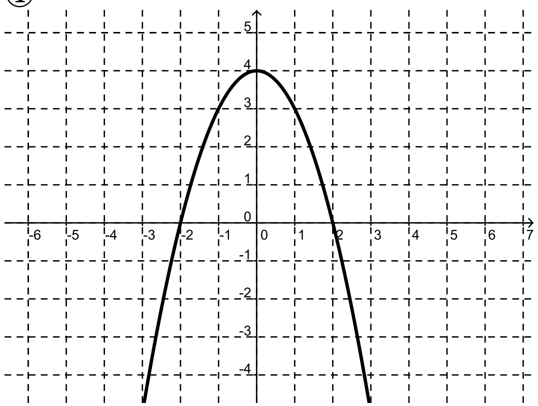
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

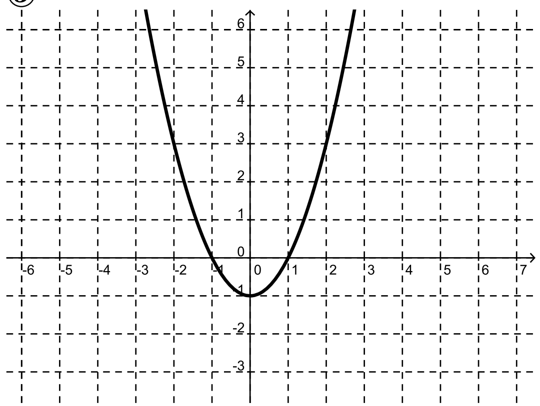
Řešení **Video** **Teorie: 23**

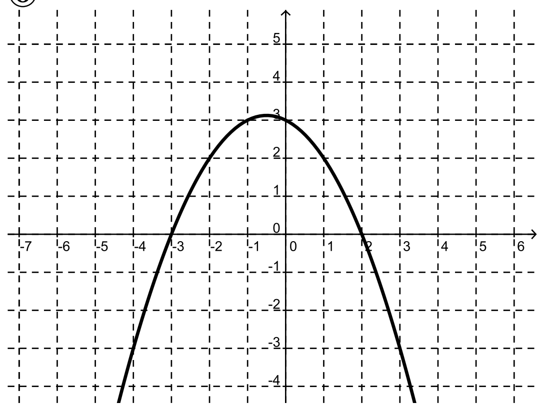
①


②


③


④


⑤


⑥


200 - Graf lineární lomené funkce

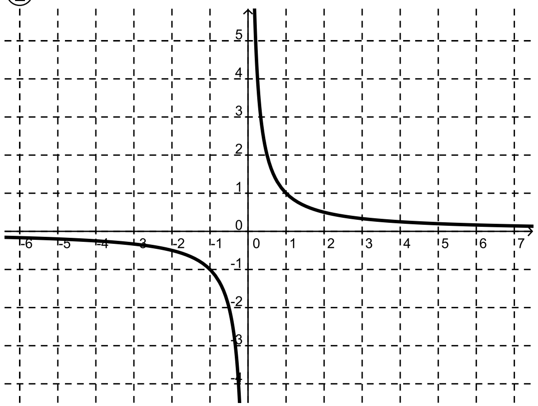
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = \dfrac{1}{x}$ b) $y = \dfrac{1}{x+1}$ c) $y = \dfrac{2}{x}$ d) $y = -\dfrac{3}{x-1}$ e) $y = \dfrac{2x+1}{x}$ f) $y = \dfrac{1-2x}{x-2}$

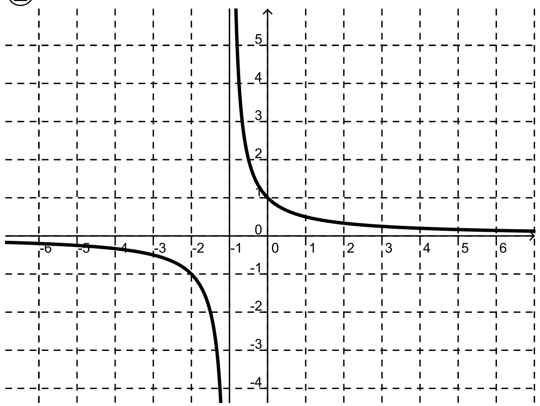
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 26**

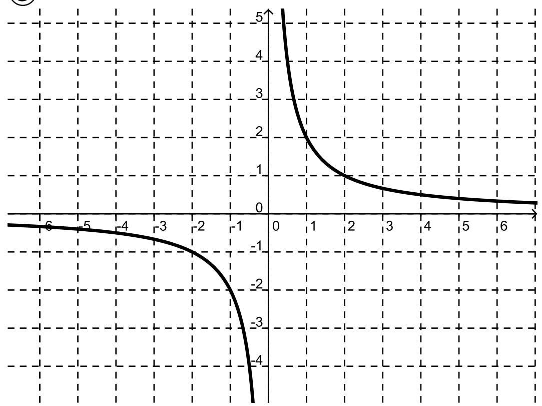
①



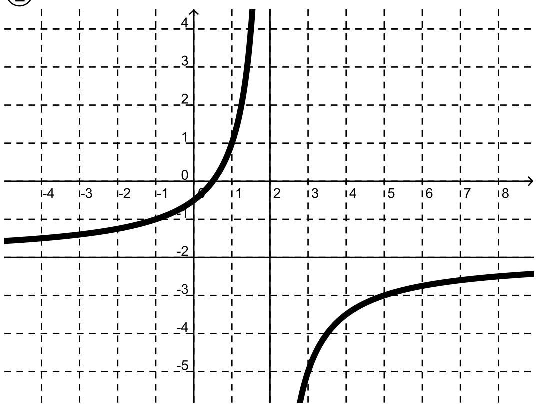
②



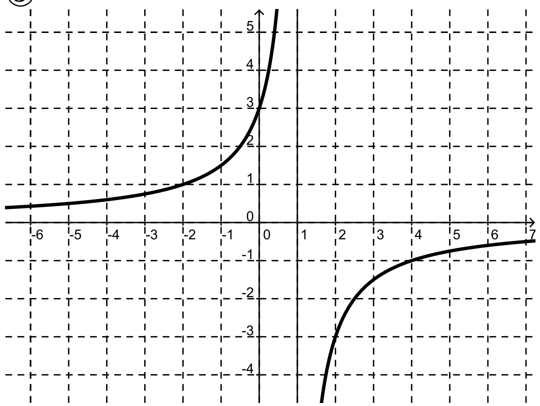
③



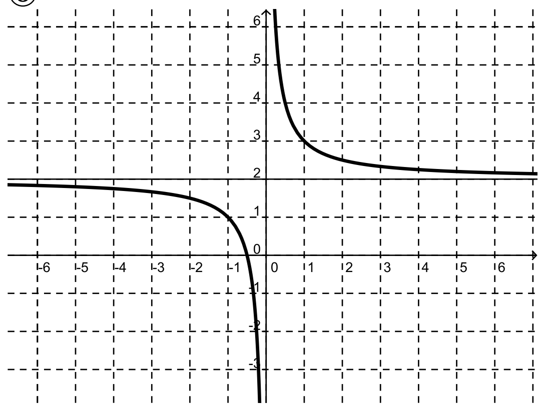
④



⑤



⑥



201 - Graf exponenciální funkce

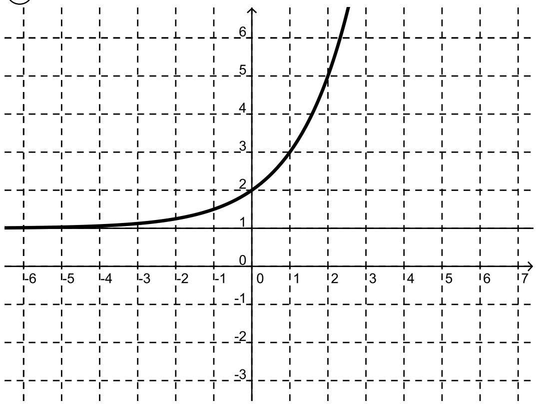
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = 2^x$ b) $y = -2^x$ c) $y = 2^x + 1$ d) $y = 2^{(x+1)}$ e) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ f) $y = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

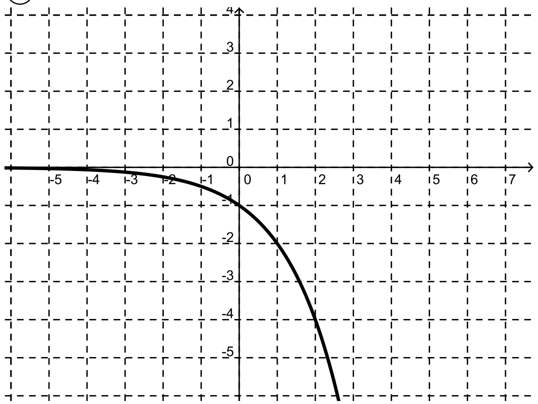
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení Video **Teorie:** 28

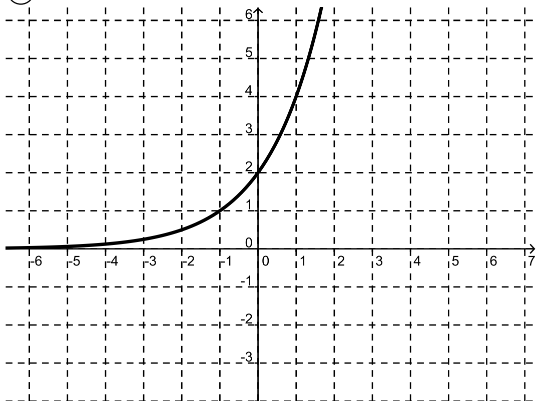
①



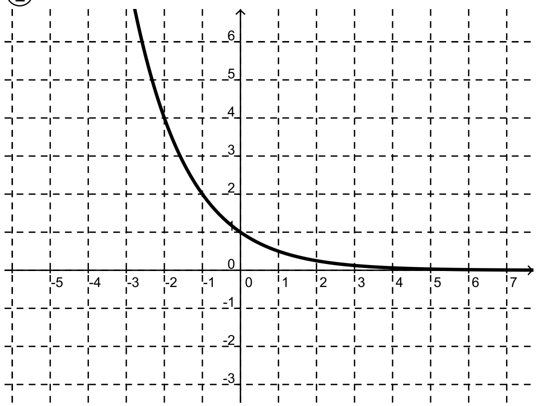
②



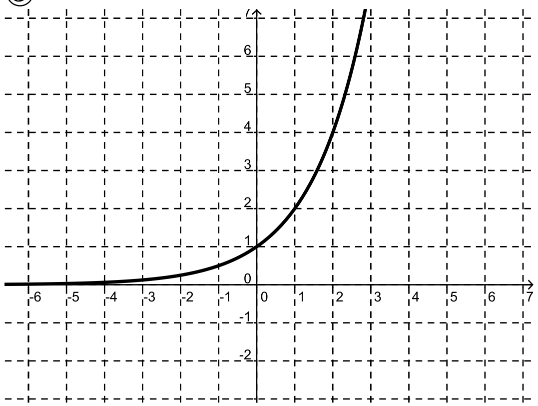
③



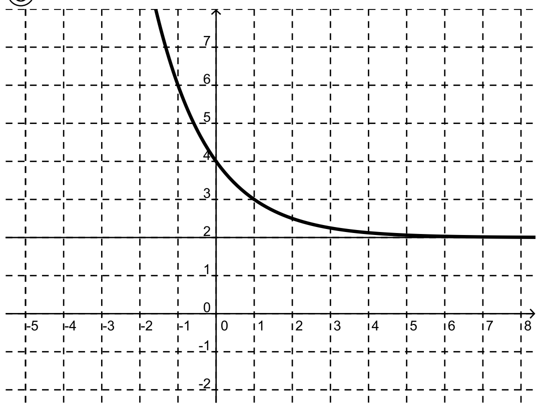
④



⑤



⑥



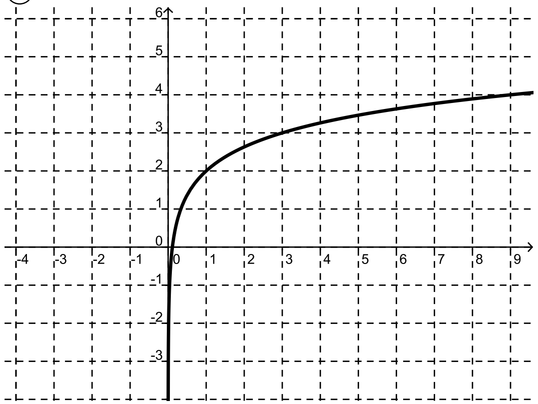
202 - Graf logaritmické funkce

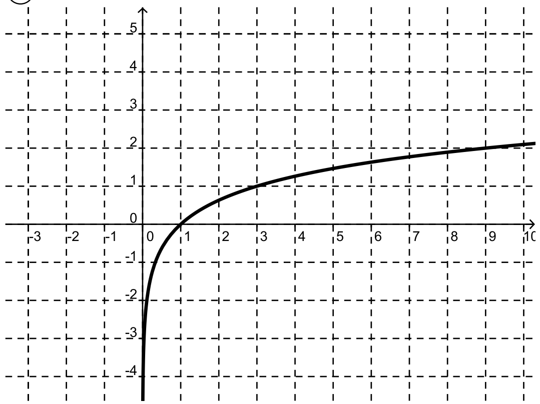
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

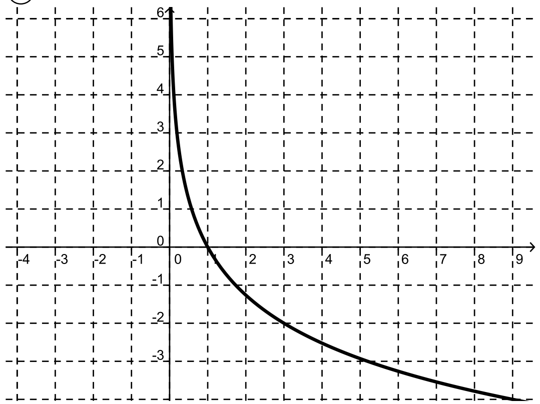
a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{1/3} x$ c) $y = \log_3 (x-2)$ d) $y = 2 \cdot \log_{1/3} x$ e) $y = 2 + \log_3 x$ f) $y = \log_3 (x+2)$

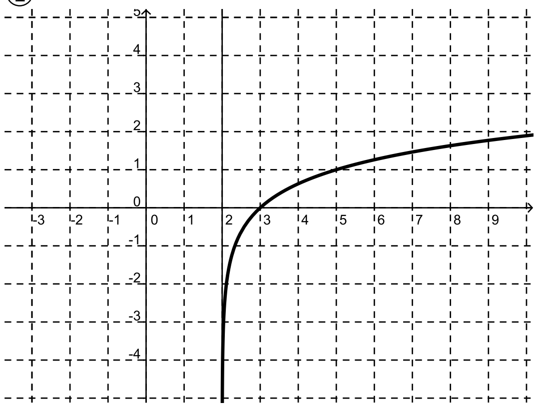
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

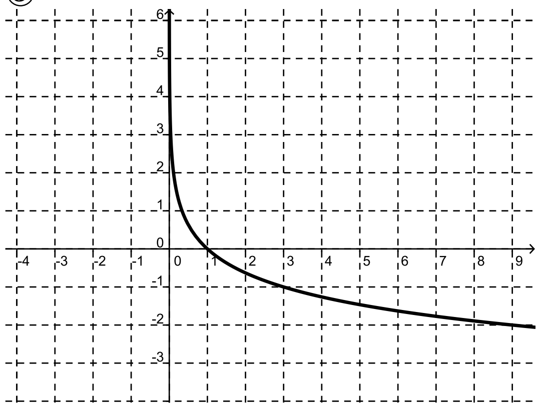
Řešení Video **Teorie:** 29

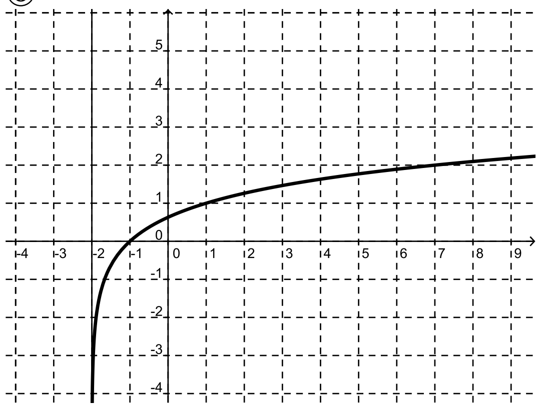
①


②


③


④


⑤


⑥


203 - Graf goniometrické funkce sinus

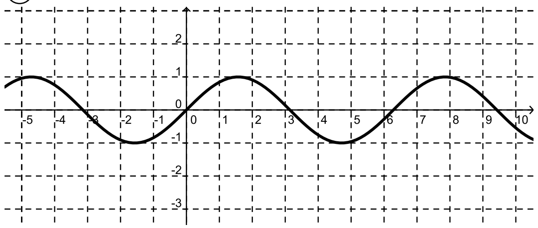
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = \sin x$ b) $y = \sin 2x$ c) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ d) $y = 2 \cdot \sin x$ e) $y = 2 + \sin x$ f) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

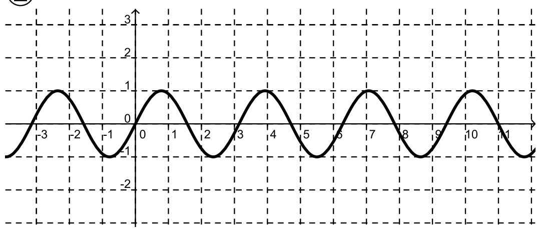
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení Video **Teorie:** 30

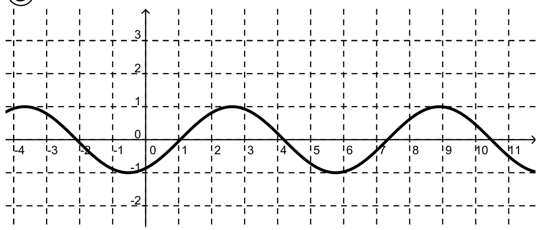
①



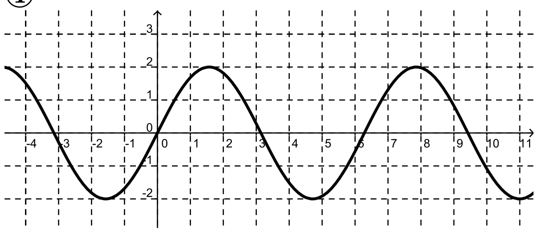
②



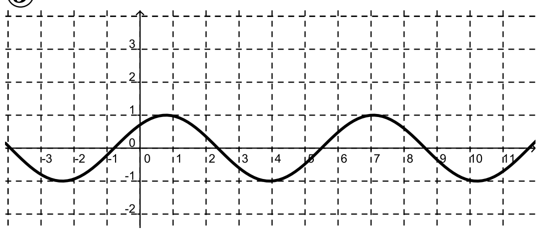
③



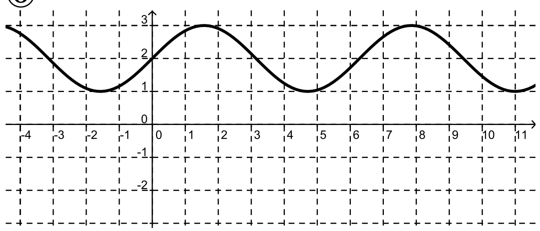
④



⑤



⑥



204 - Graf goniometrické funkce kosinus

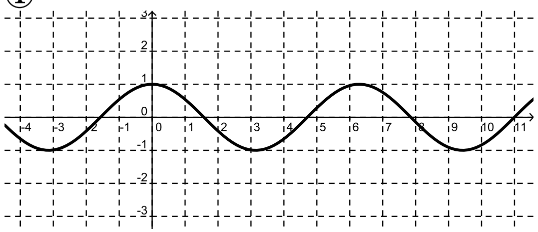
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = \cos x$ b) $y = \cos \frac{x}{3}$ c) $y = \frac{1}{3} \cos x$ d) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ f) $y = 1 - \cos x$

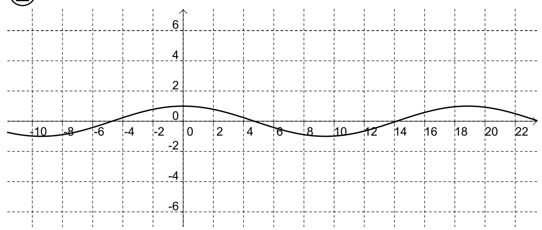
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení Video **Teorie:** 30

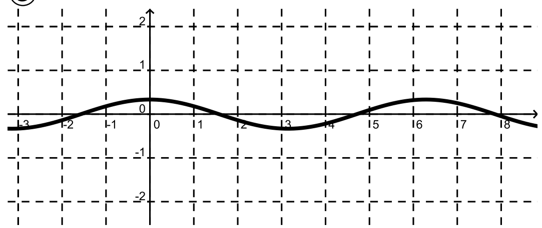
①



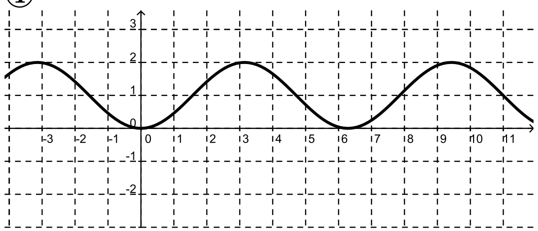
②



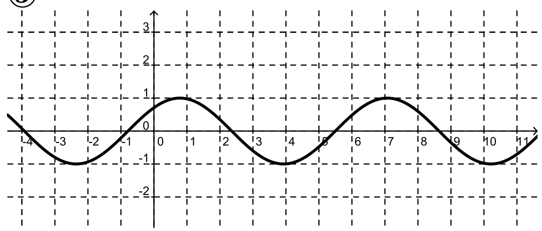
③



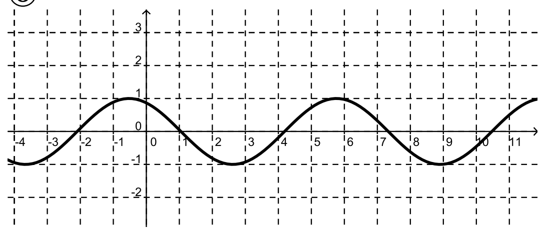
④



⑤



⑥



205 - Graf goniometrické funkce tangens a kotangens

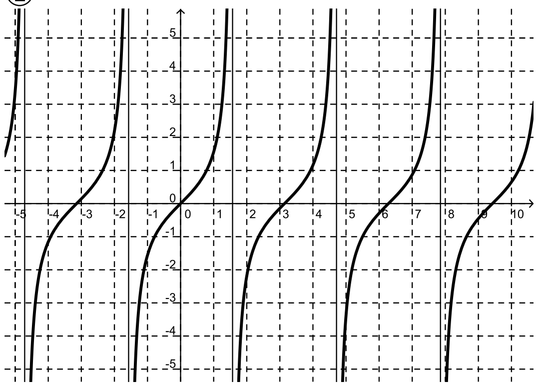
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = \tan x$ b) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ c) $y = -\tan x$ d) $y = \cot x$ e) $y = \cot 2x$ f) $y = -\cot x$

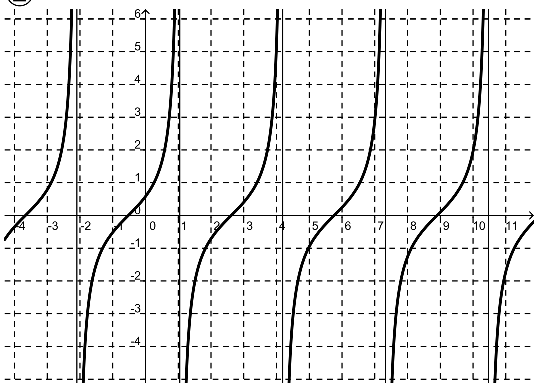
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 31**

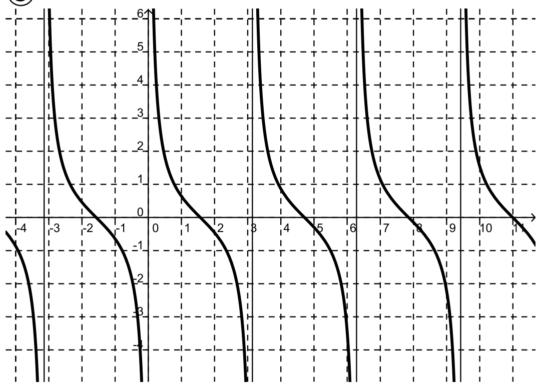
①



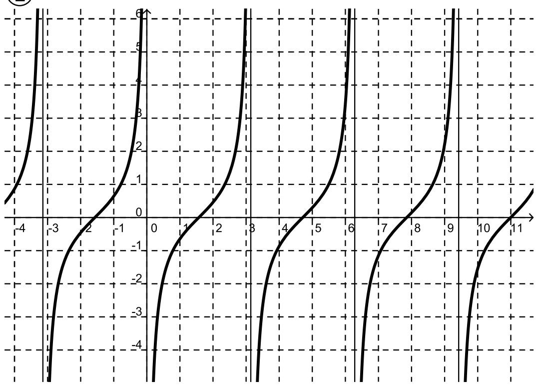
②



③

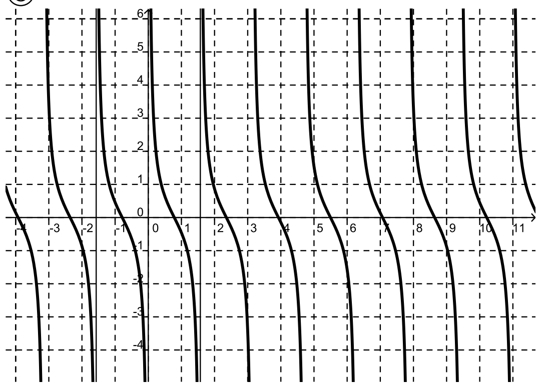


④



⑤

⑥



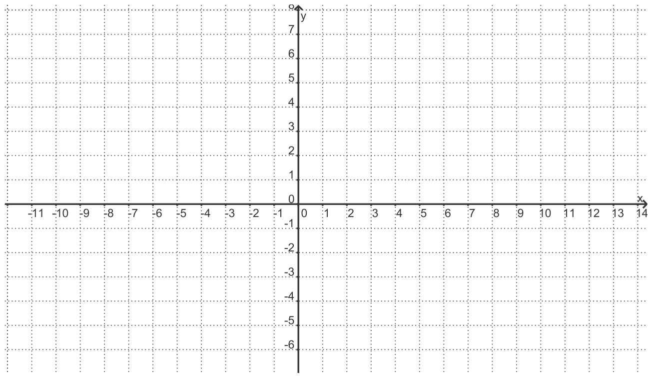
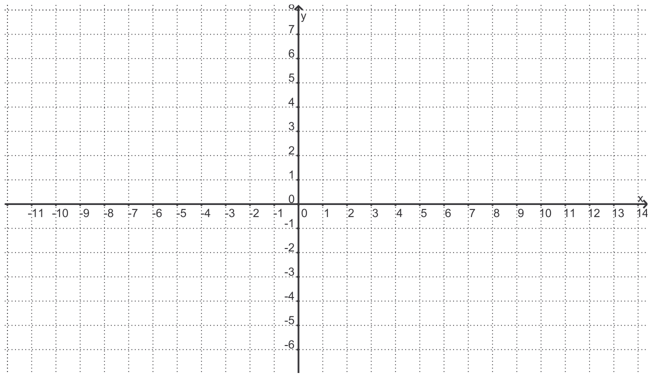
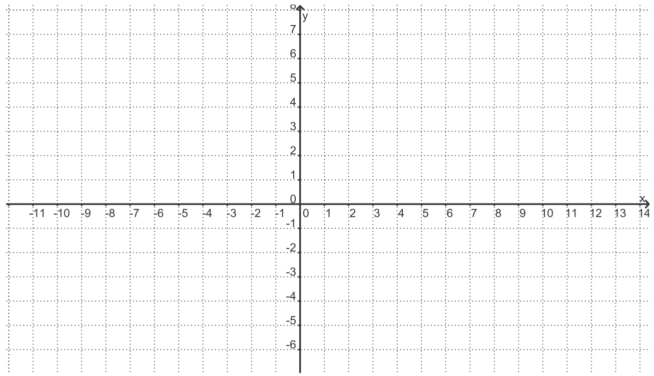
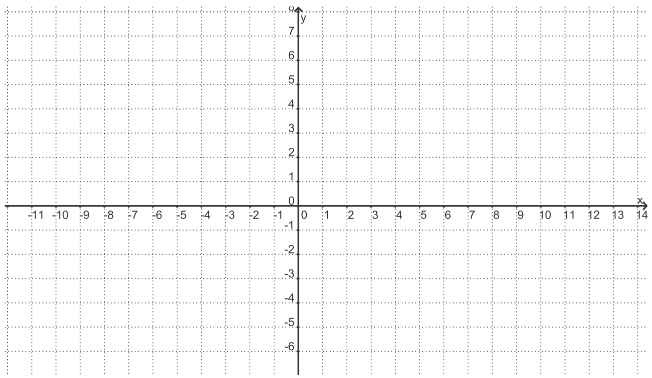
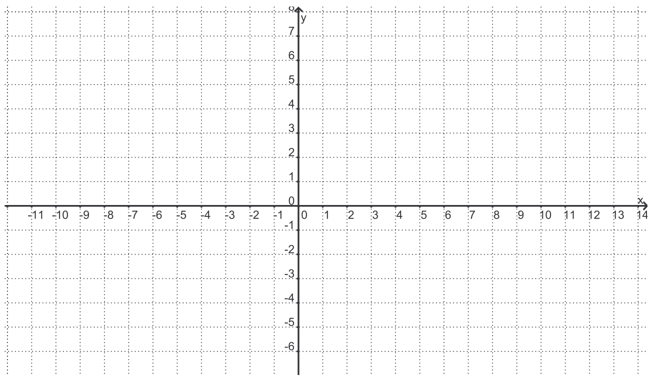
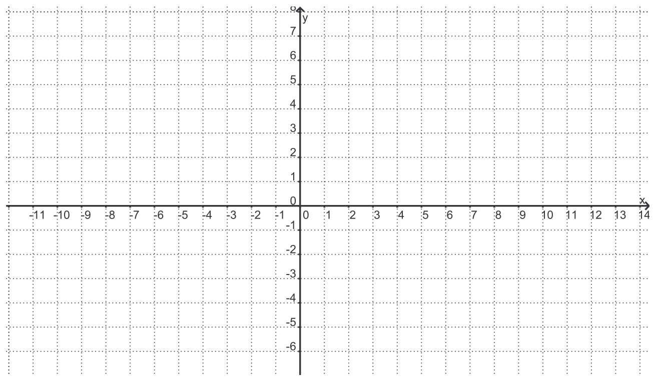
206 - Graf lineární funkce - doplnit

Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = 2x - 4$ b) $y = 4 - x$ c) $y = \frac{1}{3}x + 2$ d) $y = \dfrac{x-1}{2}$ e) $y = \dfrac{1-3x}{2}$ f) $y = 4$

Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení Video **Teorie:** 22

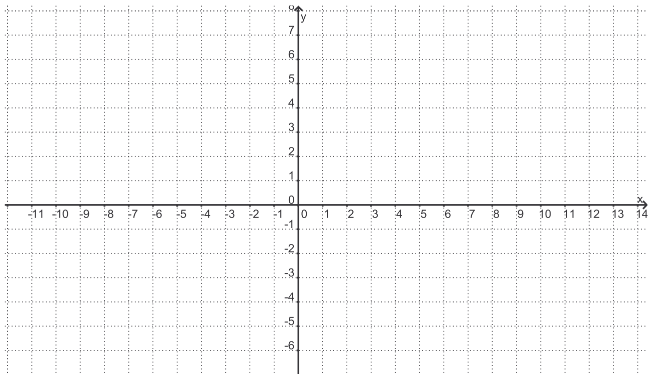
207 - Graf kvadratické funkce - doplnit

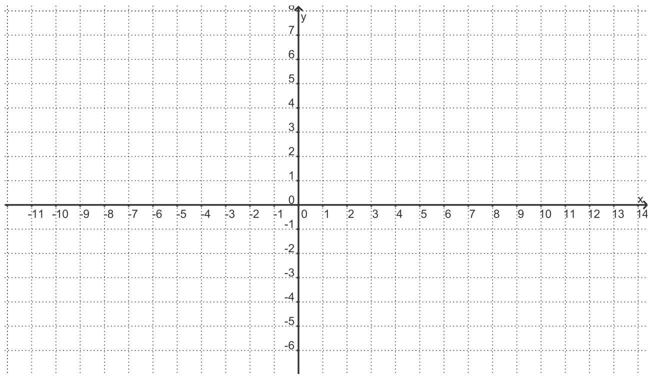
Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

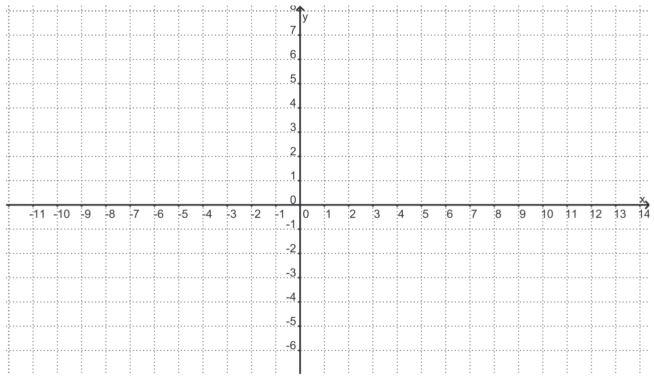
a) $y = x^2 + 2x$ b) $y = 2x - x^2$ c) $y = x^2 + 2x + 1$ d) $y = x^2 - 2x + 2$ e) $y = 3 - 3x^2$ f) $y = x^2 - 4x + 3$

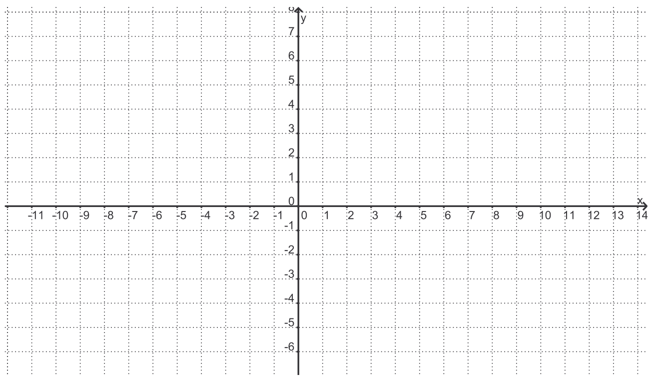
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

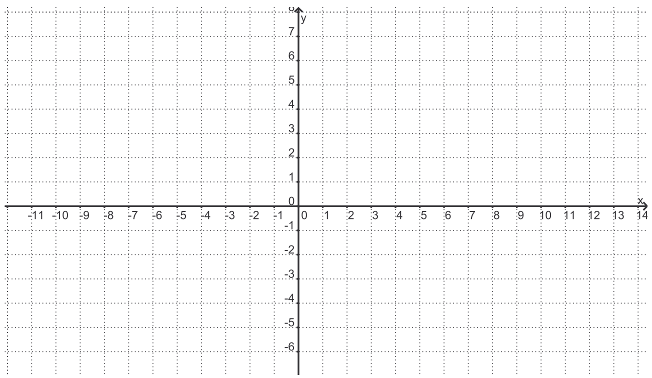
Řešení Video **Teorie:** 23

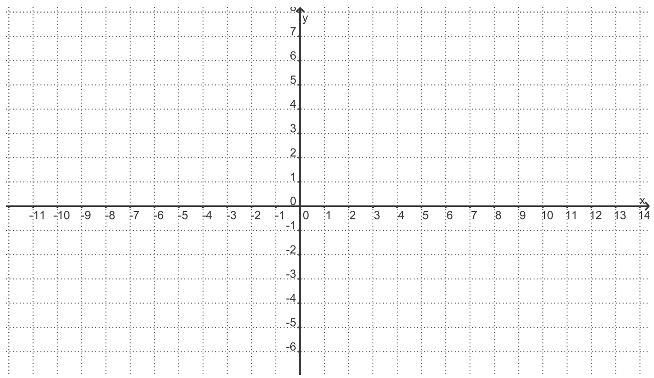












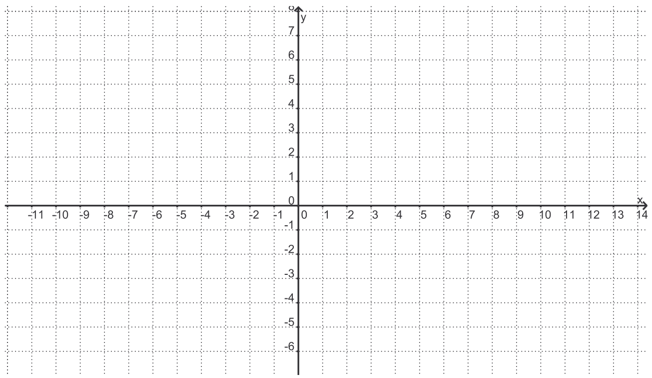
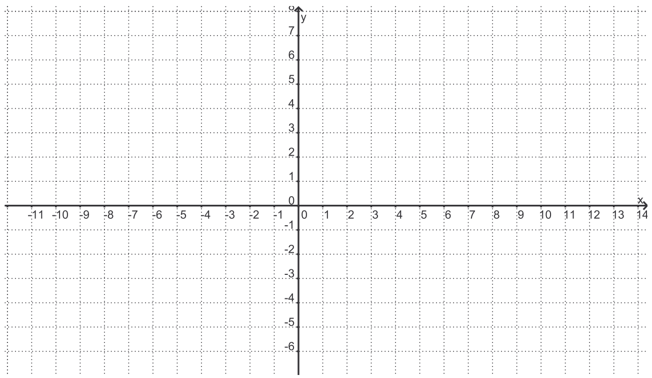
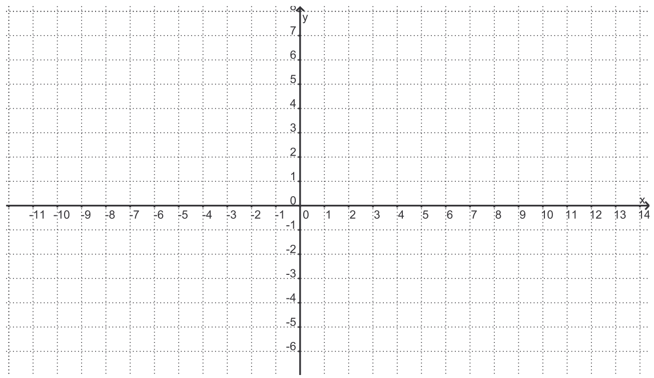
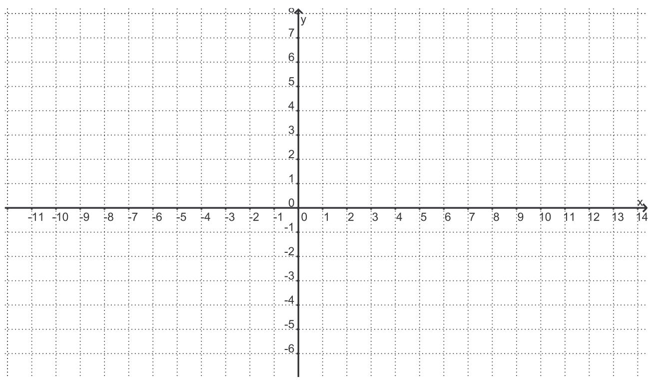
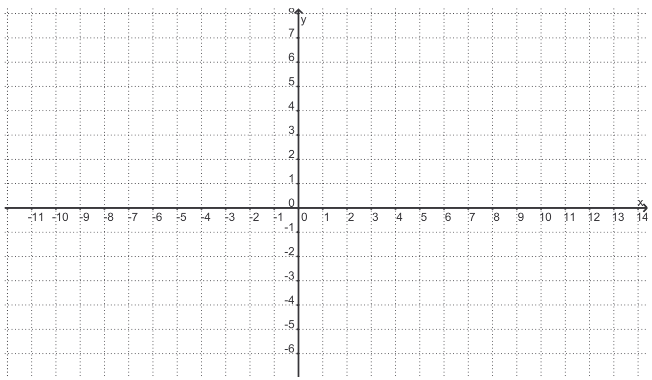
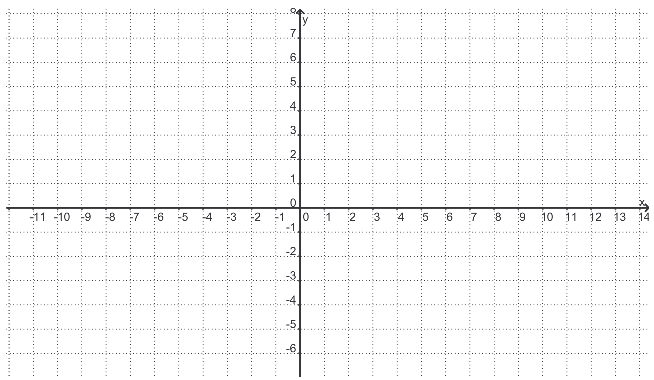
208 - Graf lineární lomené funkce - doplnit

Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = -\dfrac{1}{x}$ b) $y = \dfrac{2}{x-1}$ c) $y = \dfrac{x}{x-1}$ d) $y = \dfrac{2x-1}{x}$ e) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ f) $y = \dfrac{1-x}{2-x}$

Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení Video **Teorie:** 26

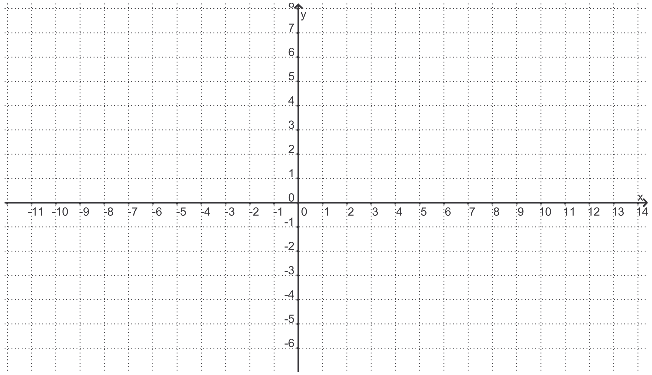
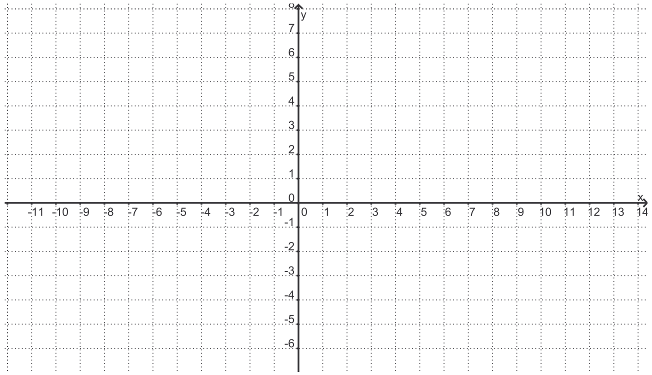
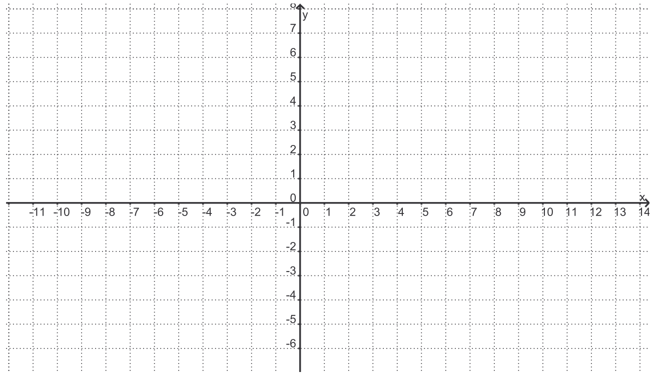
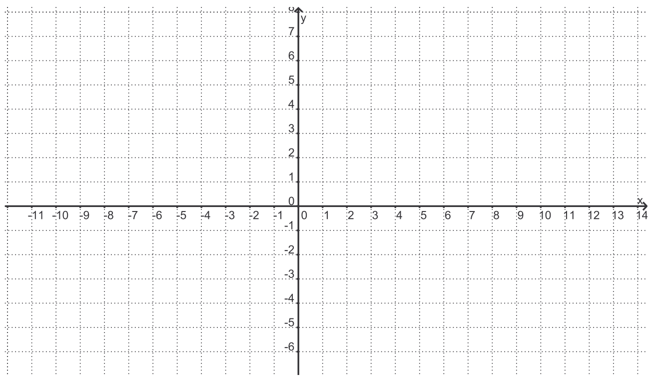
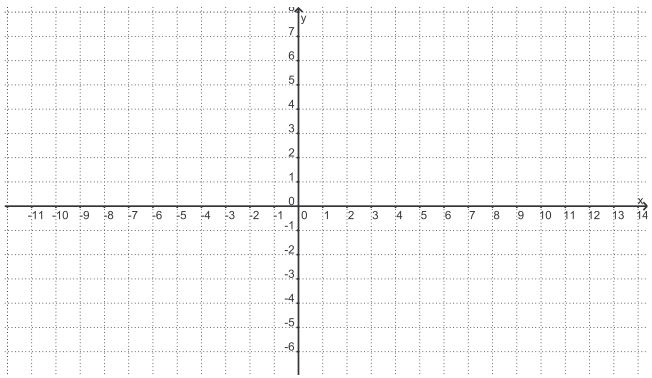
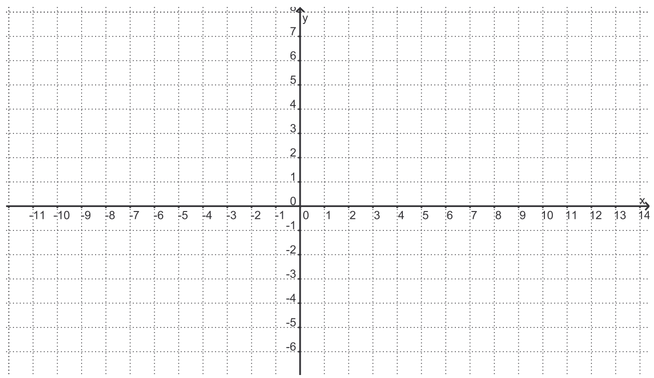
209 - Graf exponenciální funkce - doplnit

Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = 3^x$ b) $y = 1 + 3^x$ c) $y = 3^{x+1}$ d) $y = 1 - 3^x$ e) $y = 3^{-x}$ f) $y = 3 - 3^{-x}$

Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení Video **Teorie:** 28

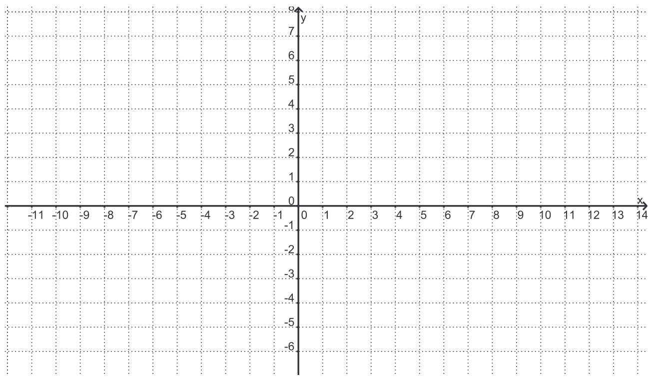
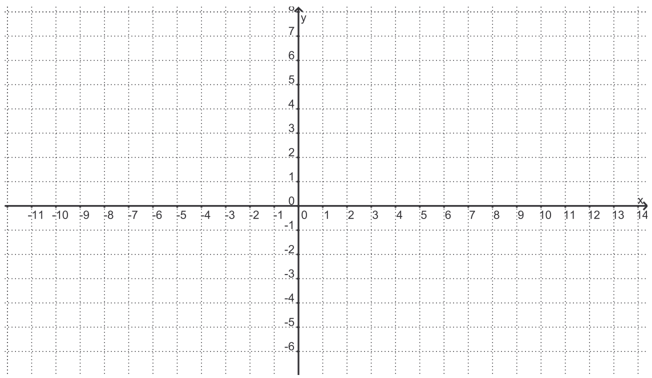
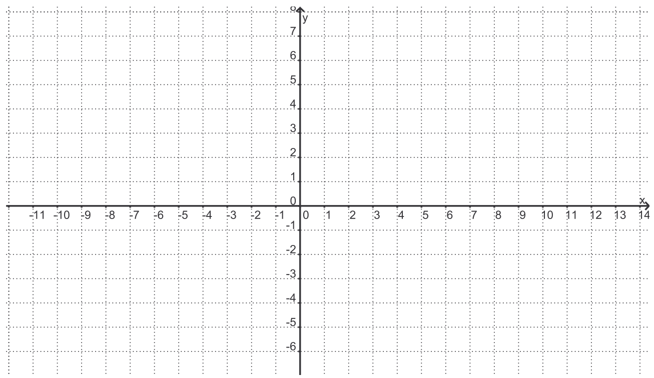
210 - Graf logaritmické funkce - doplnit

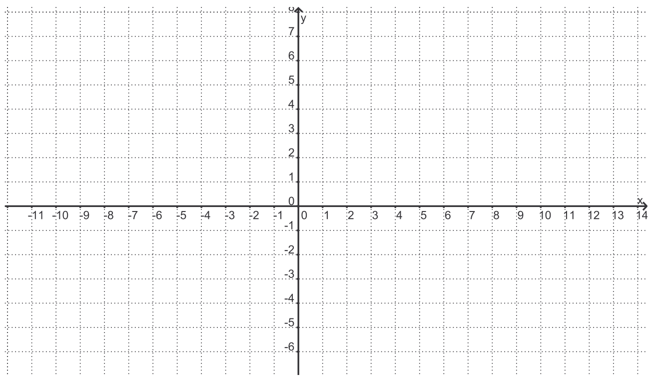
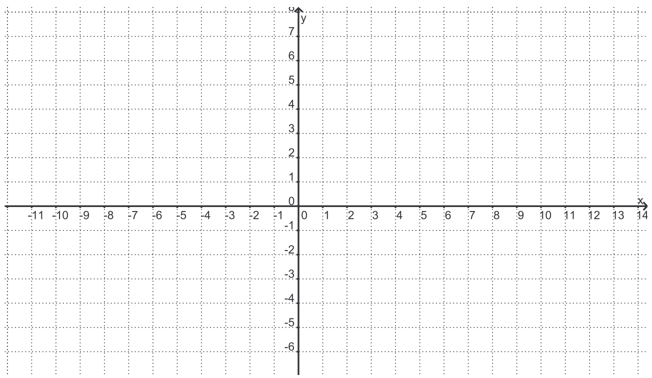
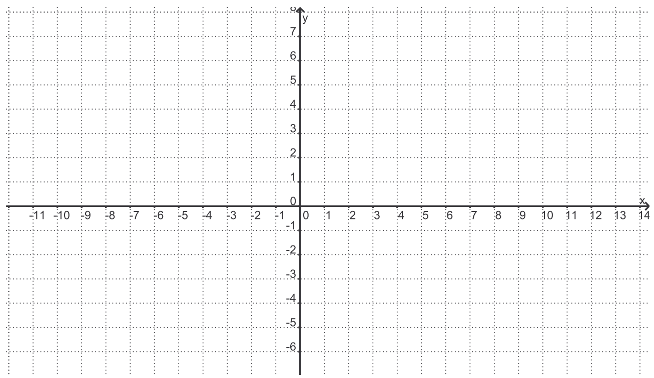
Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = \ln x$ b) $y = \ln(2x)$ c) $y = \ln(2 + x)$ d) $y = 2 + \ln x$ e) $y = 2 \cdot \ln x$ f) $y = 2 - \ln x$

Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie:** **29**

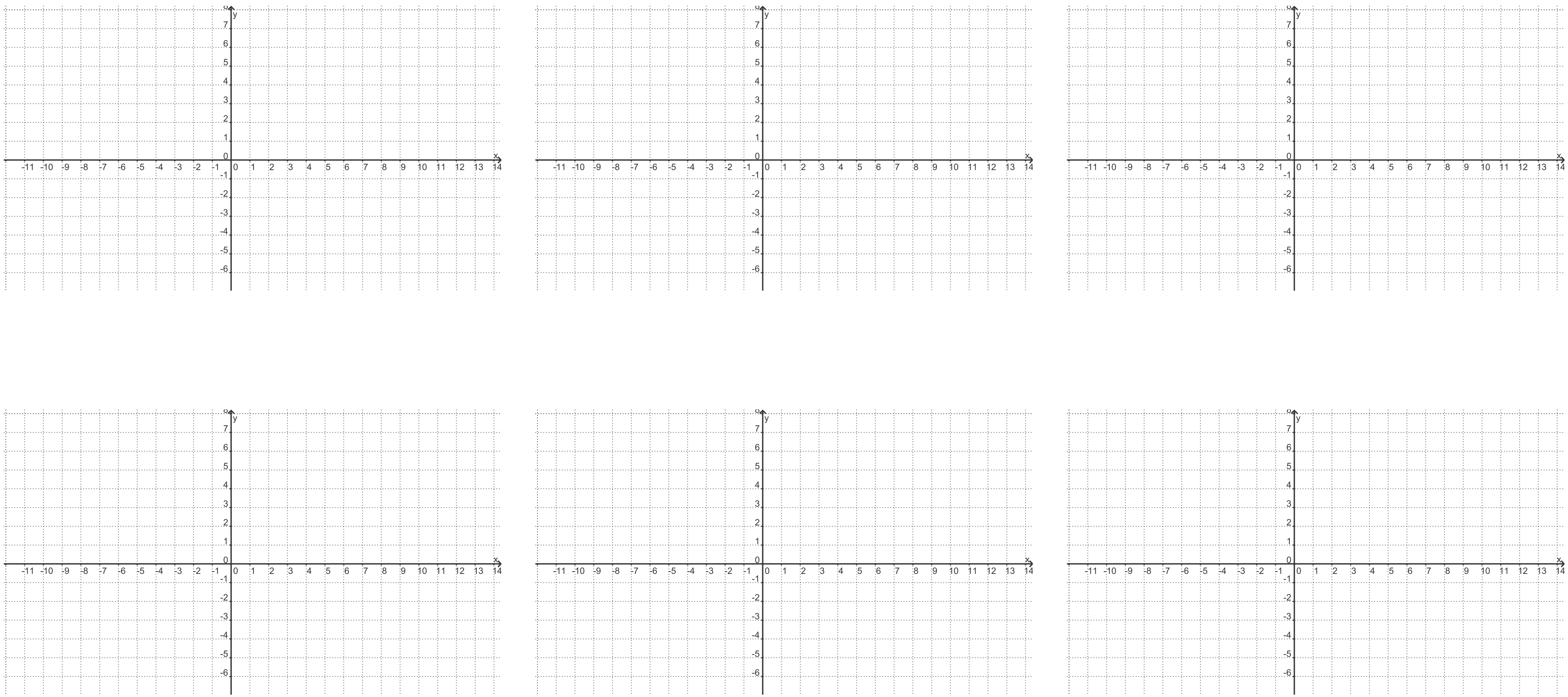
211 - Graf goniometrické funkce sinus - doplnit

Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = \sin x$ b) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ c) $y = \sin(4x)$ d) $y = \sin x + 4$ e) $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ f) $y = 4 \cdot \sin x$

Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 30**



212 - Graf goniometrické funkce kosinus - doplnit

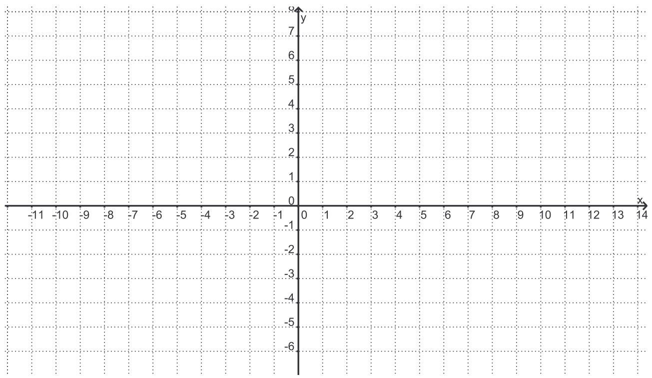
Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

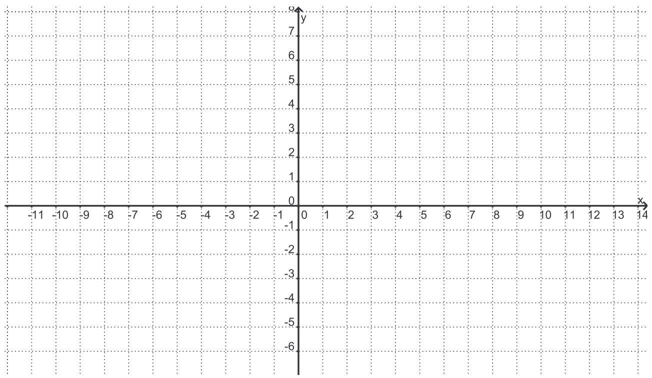
a) $y = \cos x$ b) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ c) $y = \frac{1}{2}\cos x$ d) $y = 2 - \cos x$ e) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

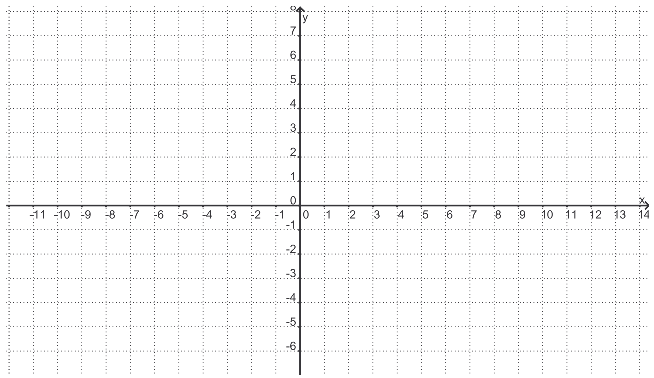
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

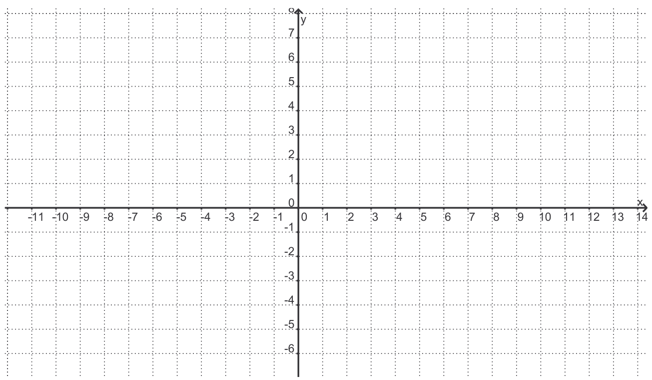
Řešení

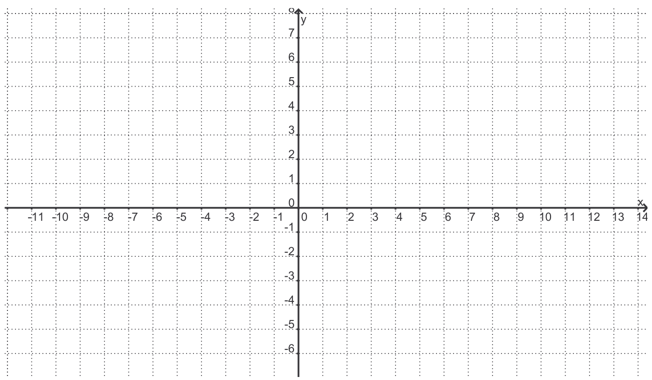
Video **Teorie: 30**

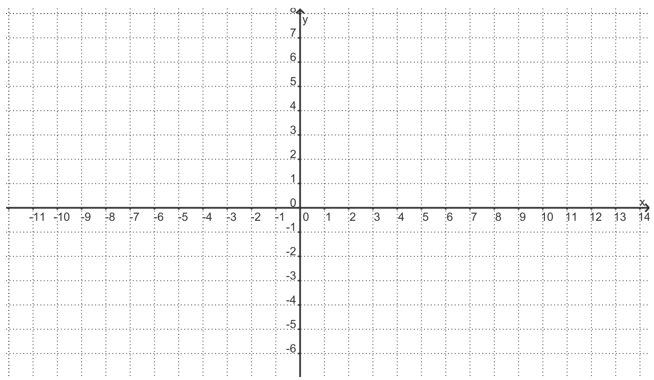












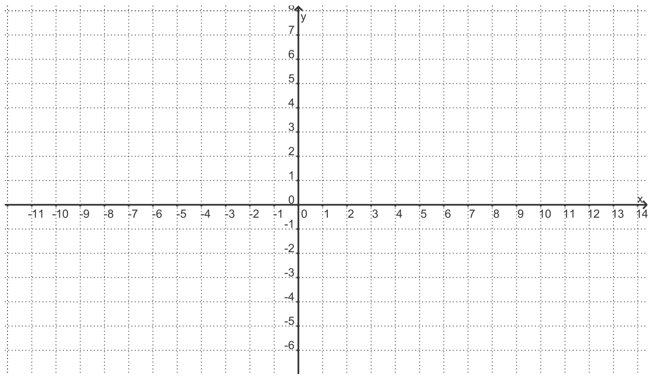
213 - Graf goniometrické funkce tangens a kotangens - doplnit

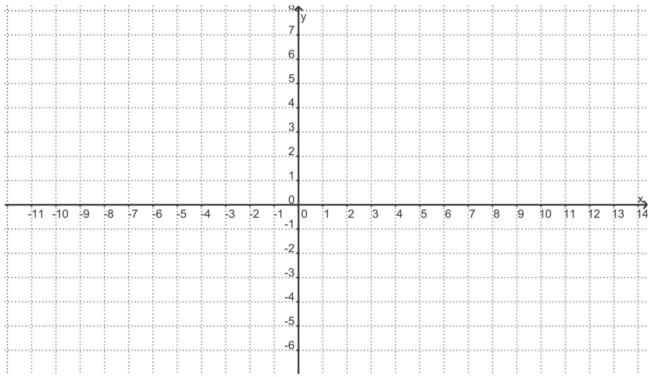
Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

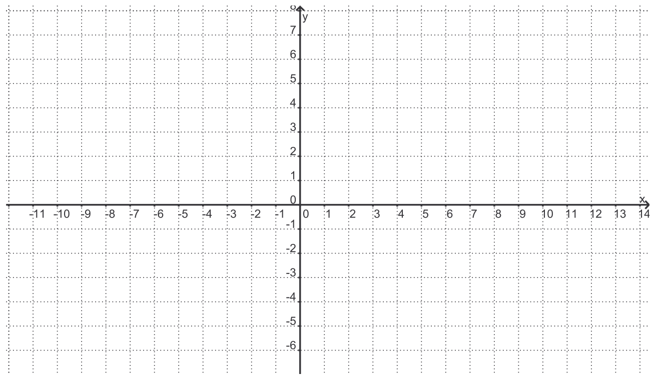
a) $y = \tan x$ b) $y = \cot x$ c) $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ d) $y = \cot\left(\frac{x}{2}\right)$ e) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ f) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

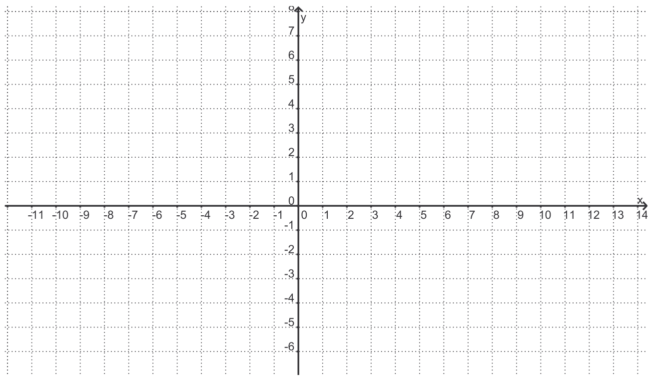
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce omezená? Má funkce extrémy?

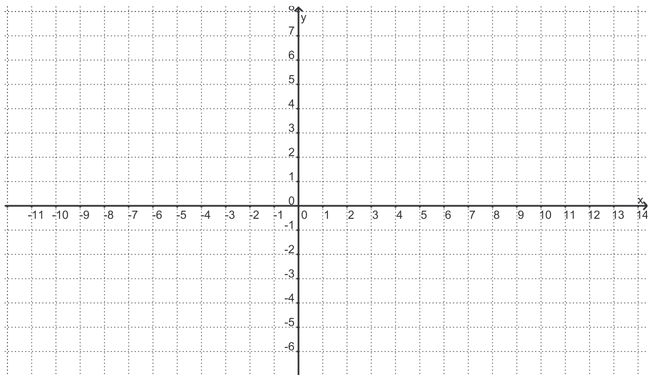
Řešení **Video** **Teorie: 31**

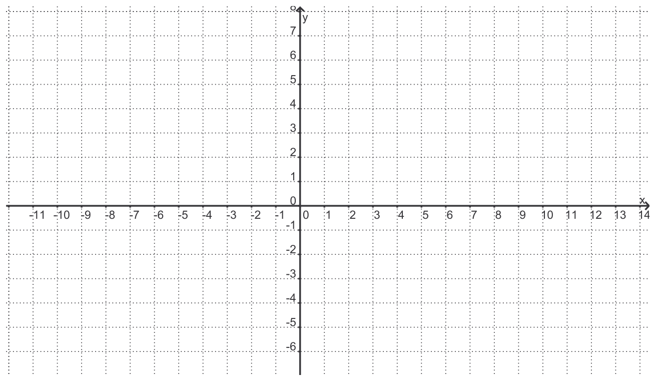








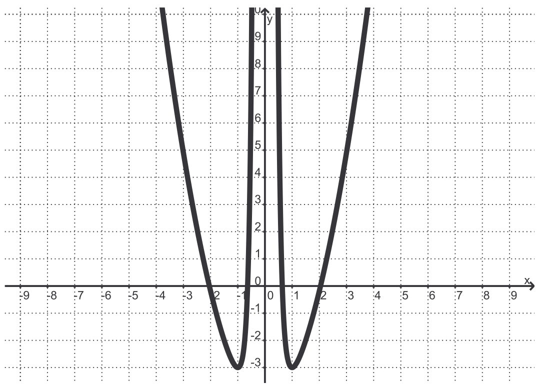
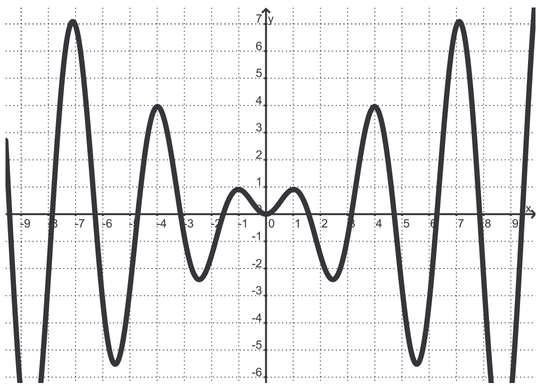
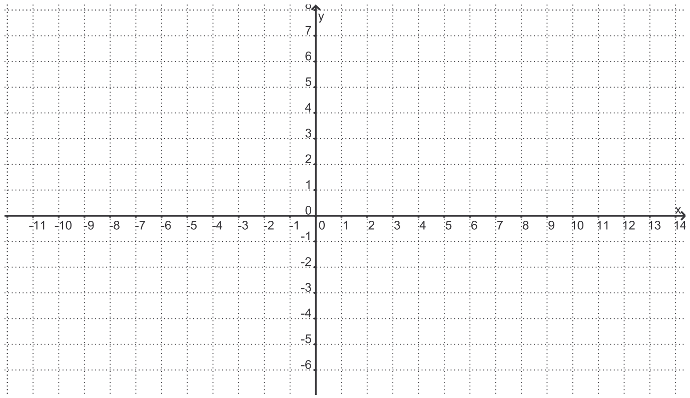


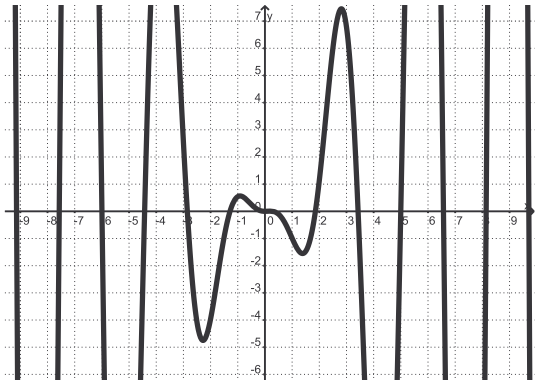
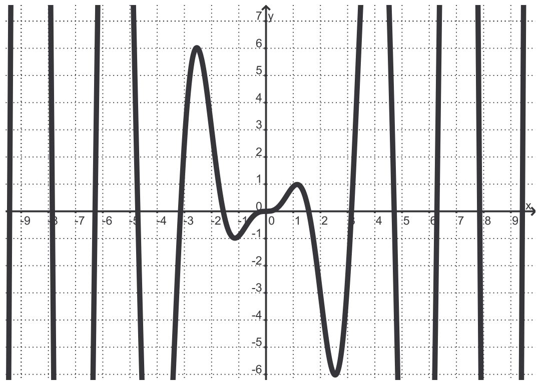
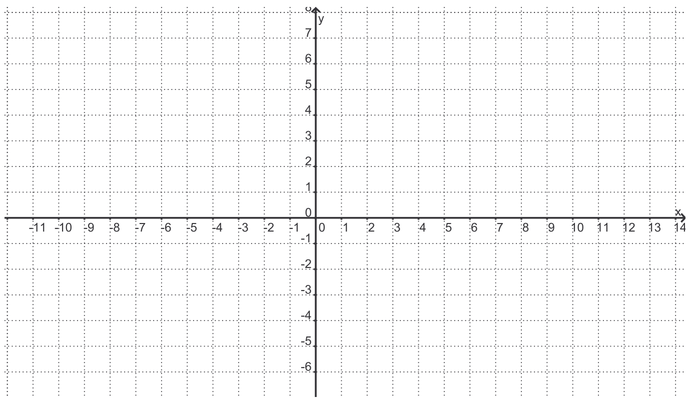


214 - Vlastnosti funkce: sudá a lichá

Zadání Z obrázku rozhodněte, zda se jedná o graf sudé nebo liché funkce.
(Sudá funkce má graf souměrný podle osy y, lichá funkce má graf souměrný podle počátku.)

Řešení Video **Teorie:** 16 **Řešené příklady:** 109, 110

215 - Vlastnosti funkce: sudá a lichá

Zadání Určete, zda je funkce sudá nebo lichá.

a) $y = x^2 + \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 2} + 4$ b) $y = \dfrac{x}{\sin 2x} - x$ c) $y = x^3 \cdot \cos x + 4$ d) $y = \ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$

Řešení Video **Teorie:** 16 **Řešené příklady:** 109, 110

Tahák

Pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.

Sudá funkce: $f(-x) = f(x)$

Lichá funkce: $f(-x) = -f(x)$

216 - Složená funkce

Zadání Napište předpis složené funkce $f:\ y = h\left(g(x)\right)$ a určete její definiční obor:

a) $g: y = x^2$
$h: y = \log(x)$

b) $g: y = x + 2$
$h: y = \cos(x)$

c) $g: y = \dfrac{1}{x}$
$h: y = 2x^3 + x + 2$

d) $g: y = \sin(x) + 1$
$h: y = \sqrt{x}$

Řešení **Video** **Teorie: 15**

217 - Inverzní funkce

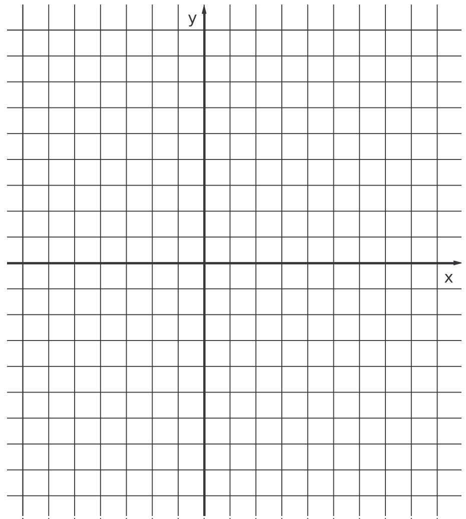
Zadání Určete inverzní funkci, její definiční obor a obor hodnot. Zakreslete graf funkce a funkce inverzní.

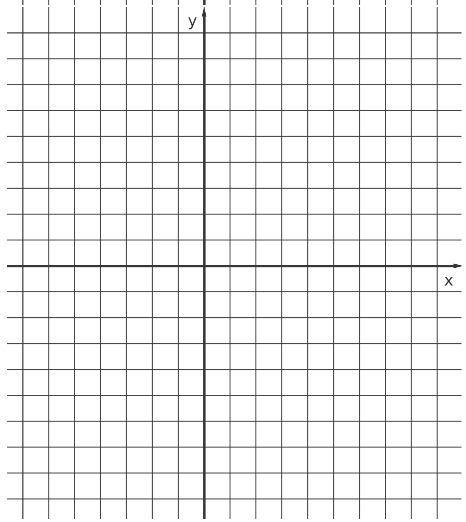
a) $f:\ y = 2\sqrt{x} + 1$

b) $f:\ y = \frac{3}{4}x - 2$

Řešení

Video **Teorie:** 20 **Řešené příklady:** 108





Tahák

Funkce inverzní existuje pro funkce prosté.

Pro definiční obor a obor hodnot platí:

$D_{f^{-1}} = H_f \quad H_{f^{-1}} = D_f$

Dále platí:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

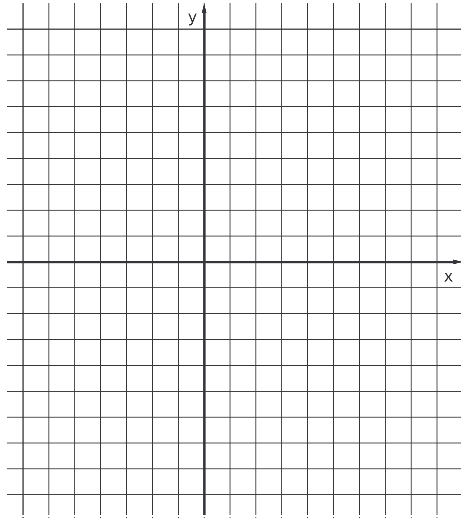
218 - Inverzní funkce

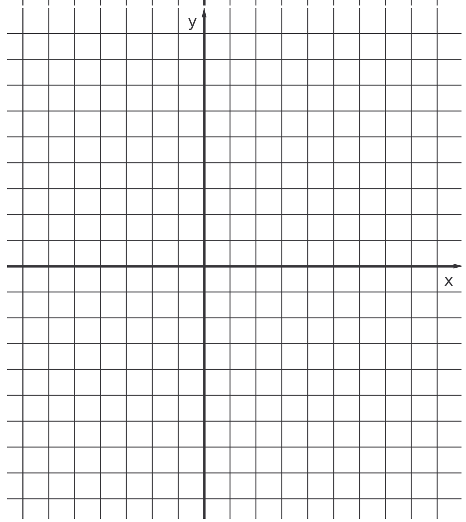
Zadání Určete inverzní funkci, její definiční obor a obor hodnot. Zakreslete graf funkce a funkce inverzní.

a) $f: \; y = 4 + \ln \frac{x}{2}$

b) $f: \; y = \arctan(x-2)$

Řešení Video **Teorie:** 20 **Řešené příklady:** 108





Tahák

Funkce inverzní existuje pro funkce prosté.

Pro definiční obor a obor hodnot platí:

$D_{f^{-1}} = H_f \quad H_{f^{-1}} = D_f$

Dále platí:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

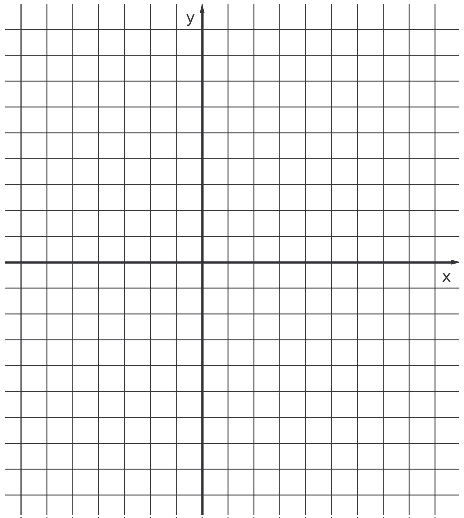
219 - Inverzní funkce

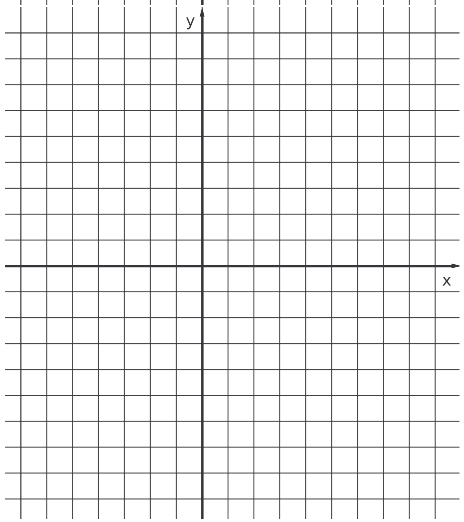
Zadání Určete inverzní funkci, její definiční obor a obor hodnot. Zakreslete graf funkce a funkce inverzní.

a) $f:\ y = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad x \in \left\langle -\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \right\rangle$

b) $f:\ y = 2^{3x+1}$

Řešení Video **Teorie:** 20 **Řešené příklady:** 108





Tahák

Funkce inverzní existuje pro funkce prosté.

Pro definiční obor a obor hodnot platí:

$D_{f^{-1}} = H_f \quad H_{f^{-1}} = D_f$

Dále platí:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

220 - Limity

Zadání Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+5x+6}$ c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-3x-10}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$

Řešení **Video** **Teorie: 36 - 40** **Řešené příklady: 111 - 123**

Tahák

Nejdříve dosaďte hodnotu x do funkčního předpisu.

O jaký typ limity se jedná?

Typ „$\frac{0}{0}$“

Kvadratický trojčlen rozložte pomocí kořenů kvadratické rovnice.

Zlomek s odmocninou rozšiřte pomocí vzorce $(a-b)(a+b)$.

221 - Limity

Zadání Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-9}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to \pm 5} \dfrac{x+1}{x^2-25}$ d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Řešené příklady:** 111 - 123

Tahák

Nejdříve dosaďte hodnotu x do funkčního předpisu.

O jaký typ limity se jedná?

Typ „$\frac{k}{0}$“

Vyřešte jednostranné limity.

222 - Limity

Zadání Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 4x}{3x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{5}}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan 3x}{\sin 4x + \tan 5x}$

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Řešené příklady:** 111 - 123

Tahák

Nejdříve dosaďte hodnotu x do funkčního předpisu.

O jaký typ limity se jedná?

Typ „$\frac{0}{0}$“

Použijeme vzorec

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

nebo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\,.$$

Jestliže část vzorce v zadání chybí, rozšiřte zlomek výrazem $\frac{x}{x}$.

223 - Limity

Zadání Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-x+1}{5x^3-6x^2+3x+8}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4-10x^2+7}{3x^3-2x+5}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2+x}{4+x}\right)^{2x}$

Řešení Video **Teorie:** 36 - 40 **Řešené příklady:** 111 - 123

Tahák

Nejdříve dosaďte hodnotu x do funkčního předpisu.

O jaký typ limity se jedná?

Typ „$\frac{\infty}{\infty}$"

V prvním případě vytkneme z čitatele i ze jmenovatele x v nejvyšší mocnině. Zlomky $\frac{k}{\infty}$ se blíží k nule.

Typ „ 1^∞"

V druhém případě upravte zlomek na tvar $\left(1+\frac{k}{x}\right)$ a použijte vzorec

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Pracovní listy – Diferenciální počet funkce jedné proměnné

225 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = x^5$

b) $y = x^3 + \sqrt{x}$

c) $y = 3x^4 - 5x^2 + 7\sqrt[3]{x}$

d) $y = 5x^3 + \dfrac{1}{x}$

e) $y = \sqrt{3}x^{12} + 6$

f) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^4} - 22$

g) $y = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{5\sqrt{x}}{4} + 9$

h) $y = \pi x^3 + \sqrt{5}x^2 + \ln(3)x^7$

i) $y = \dfrac{7}{\sqrt{x}} + \dfrac{11x^3}{6} + \dfrac{\pi + 2}{x^3}$

Řešení Video **Teorie:** 44, 45, 46 **Řešené příklady:** 125, 126, 127, 128

Tahák

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$

$[c]' = 0$

$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$

226 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = 3\sin(x) + 2\ln(x)$

b) $y = 4\sin(x) - \dfrac{\cos(x)}{5} + 4$

c) $y = \dfrac{2}{3}\tan(x) + 7x^3 + \dfrac{19}{5}$

d) $y = 8\mathrm{e}^x + 2^x - 7x^3$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3^x + 5 + 2\cot(x)$

f) $y = \log_2(x) - \dfrac{8}{x} + 5$

Řešení Video **Teorie:** 44, 45, 46 **Řešené příklady:** 125, 126, 127, 128

Tahák

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$

$[c]' = 0$

$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$

$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x \qquad [\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x \cdot \ln(a)$

$[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \qquad [\log_a(x)]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$[\sin(x)]' = \cos(x)$

$[\cos(x)]' = -\sin(x)$

$[\tan(x)]' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$[\cot(x)]' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

227 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = 2\arcsin(x) + 3$

b) $y = \log_4(x) - 5x^2 + 1$

c) $y = -3\arctan(x) + \dfrac{9}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $y = -3 \cdot 4^x - 3 + \dfrac{2}{5}\operatorname{arccot} x$

e) $y = \dfrac{\arccos(x)}{3} + 4x^9 - 3$

f) $y = x + \dfrac{3}{x^3} - 2\sin(x)$

Řešení Video **Teorie:** 44, 45, 46 **Řešené příklady:** 125, 126, 127, 128

Tahák

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$

$[c]' = 0$

$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$

$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x \qquad [\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x \cdot \ln(a)$

$[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \qquad [\log_a(x)]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$[\sin(x)]' = \cos(x)$

$[\cos(x)]' = -\sin(x)$

$[\tan(x)]' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$[\cot(x)]' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

228 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = x \cdot \sin(x)$

b) $y = x^3 \cdot \ln(x) + 3$

c) $y = 2\arcsin(x) \cdot (x^3 + 7x)$

d) $y = \tan(x) \cdot (x^3 + x^2 + 1)$

e) $y = \mathrm{e}^x \cdot x^2 + \dfrac{1}{x} - \sqrt{2}$

f) $y = -11\arctan(x) \cdot (x - 3x^4)$

Řešení Video **Teorie:** 44, 45, 46 **Řešené příklady:** 125, 126, 127, 128

Tahák

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$[c]' = 0$

$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$

$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x \qquad [\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x \cdot \ln(a)$

$[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \qquad [\log_a(x)]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$[\sin(x)]' = \cos(x)$

$[\cos(x)]' = -\sin(x)$

$[\tan(x)]' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$[\cot(x)]' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

$[\arcsin(x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$[\arccos(x)]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$[\arctan(x)]' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$[\text{arccot}(x)]' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

229 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$

b) $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(x)}$

c) $y = \dfrac{x^2+x+1}{\cos(x)}$

d) $y = \dfrac{\tan(x)}{3x^4} + \dfrac{5x^3}{2} - 45x - 5$

e) $y = \dfrac{2^x}{5x-9}$

f) $y = \dfrac{7x}{2\arctan(x)} - 3x - 1$

Řešení Video **Teorie:** 44, 45, 46 **Řešené příklady:** 125, 126, 127, 128

Tahák

$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$

$[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x) \qquad c\in\mathbb{R}$

$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$[c]' = 0$

$[x^n]' = n\cdot x^{n-1}$

$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x \qquad [\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x\cdot\ln(a)$

$[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \qquad [\log_a(x)]' = \dfrac{1}{x\cdot\ln(a)}$

$[\sin(x)]' = \cos(x)$

$[\cos(x)]' = -\sin(x)$

$[\tan(x)]' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$[\cot(x)]' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

$[\arcsin(x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\arccos(x)]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\arctan(x)]' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$[\operatorname{arccot}(x)]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

230 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = (x^3 + 1)^4$

c) $y = 5 \arcsin(8x^2)$

e) $y = \sqrt{4x^3 + 3}$

g) $y = \sqrt{\cos(x)}$

b) $y = \ln(-7x)$

d) $y = \mathrm{e}^{1-4x} + \ln(x^4)$

f) $y = \tan^2(x)$

h) $y = 2\ln^3(x) - 3x$

Řešení Video **Teorie:** 44, 45, 46, 47 **Řešené příklady:** 125, 126, 127, 128, 129, 130

Tahák

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$[c]' = 0$$

$$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$$

$$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x \qquad [\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x \cdot \ln(a)$$

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x} \qquad [\log_a(x)]' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

$$[\sin(x)]' = \cos(x)$$

$$[\cos(x)]' = -\sin(x)$$

$$[\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$[\cot(x)]' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$[\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctan(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$[\mathrm{arccot}(x)]' = -\frac{1}{1+x^2}$$

231 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \sin(x) \cdot (4x^3 - 3x + 2)^3$

b) $y = 4\,\mathrm{arccot}(x^3 - x) \cdot (2x - 1)$

c) $y = \dfrac{5x - 7}{\sin(3x)} + \log(7 - 2x)$

d) $y = \ln\left(x^2 \cdot (3x - 1)\right)$

e) $y = x \cdot 2^{x^2 - 1}$

f) $y = \dfrac{2}{5}\sqrt{\mathrm{e}^x \cdot x^4 + 3}$

Řešení Video **Teorie:** 44, 45, 46, 47 **Řešené příklady:** 125, 126, 127, 128, 129, 130

Tahák

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$[f\left(g(x)\right)]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

$[c]' = 0$

$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$

$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x \qquad [\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x \cdot \ln(a)$

$[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \qquad [\log_a(x)]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$[\sin(x)]' = \cos(x)$

$[\cos(x)]' = -\sin(x)$

$[\tan(x)]' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$[\cot(x)]' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

$[\arcsin(x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$[\arccos(x)]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$[\arctan(x)]' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$[\mathrm{arccot}(x)]' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

232 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

b) $y = \ln^2(4x^7 - 5x^2 + 1)$

c) $y = \mathrm{e}^{\sin(x)}$

d) $y = \dfrac{x \cdot \ln x}{1 + \ln x}$

e) $y = \ln \sqrt{x^2+1}$

f) $y = 2^{\frac{1}{\cos x}}$

Řešení Video **Teorie:** 44, 45, 46, 47 **Řešené příklady:** 125,126, 127, 128, 129, 130

Tahák

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$[c]' = 0$

$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$

$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x \qquad [\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x \cdot \ln(a)$

$[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \qquad [\log_a(x)]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$[\sin(x)]' = \cos(x)$

$[\cos(x)]' = -\sin(x)$

$[\tan(x)]' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$[\cot(x)]' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

$[\arcsin(x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\arccos(x)]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\arctan(x)]' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$[\operatorname{arccot}(x)]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

233 - Druhá derivace

Zadání Vypočítejte druhou derivaci explicitní funkce a výsledek upravte:

a) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

b) $y = x\big(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\big)$

c) $y = e^{\sin x}$

Řešení Video **Teorie:** 44, 45, 46, 47, 49 **Řešené příklady:** 132, 133, 134

Tahák

$y'' = [y']'$

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$[c]' = 0$

$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$

$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x \qquad [\mathrm{a}^x]' = \mathrm{a}^x \cdot \ln(a)$

$[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \qquad [\log_a(x)]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$[\sin(x)]' = \cos(x)$

$[\cos(x)]' = -\sin(x)$

$[\tan(x)]' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$[\cot(x)]' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

$[\arcsin(x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\arccos(x)]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\arctan(x)]' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$[\mathrm{arccot}(x)]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

234 - Derivace - logaritmické derivování

Zadání Logaritmickým derivováním vypočítejte derivaci funkce:

a) $y = x^{\frac{1}{x}}$ b) $y = x^{\ln x}$ c) $y = x^{\cos x}$

Řešení **Video** **Teorie: 48** **Řešené příklady: 131**

Tahák

Logaritmické derivování

$$y = f(x)^{g(x)}$$
$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$$
$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$
$$y' = y \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right]$$
$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right]$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$$
$$[\ln x]' = \frac{1}{x}$$
$$[\cos x]' = -\sin x$$

235 - Derivace parametricky zadané funkce

Zadání Vypočítejte první derivaci parametricky zadané funkce:

a) $x = \tan t\,, \quad y = \dfrac{\sin 2t}{2}\,, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$

b) $x = 5\,(t - \cos t)\,, \quad y = 5\,(1 + \sin t)\,, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$

Řešení Video **Teorie:** 50 **Řešené příklady:** 135, 136

Tahák

$x = \varphi\,(t)$
$y = \psi\,(t)$

$y' = \dfrac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \quad \dot{\varphi}(t) \neq 0$

236 - Derivace parametricky zadané funkce

Zadání Vypočítejte druhou derivaci parametricky zadané funkce:

a) $x = \dfrac{1-t}{1+t} \quad y = \dfrac{2t}{1+t} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$

b) $x = a\cos t\,, \quad y = b\sin t\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,,\ t \in (0, \pi)$

Řešení Video **Teorie:** 50 **Řešené příklady:** 135, 136

Tahák

$x = \varphi\,(t)$
$y = \psi\,(t)$

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \qquad \dot{\varphi}(t) \neq 0$$

$$y'' = \frac{\ddot{\psi}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t) \cdot \ddot{\varphi}(t)}{\left(\dot{\varphi}(t)\right)^3} \qquad \dot{\varphi}(t) \neq 0$$

237 - Tečna ke grafu funkce

Zadání Určete obecnou rovnici tečny t a normály n v dotykovém bodě T ke grafu funkce f dané předpisem:

a) $y = \dfrac{8}{4+x^2} \quad T = [2; ?]$

b) $y = \ln x, \quad T = [e; ?]$

Řešení

Video **Teorie:** 51 **Řešené příklady:** 138, 139

Tahák

směrnicový tvar rovnice tečny

$t : y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$

bod dotyku

$T = [x_0; y_0]$

směrnice tečny

$k_t = f'\,(x_0)$

směrnicový tvar rovnice normály

$t : y - y_0 = k_n\,(x - x_0)$

bod dotyku

$T = [x_0; y_0]$

směrnice normály

$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$

obecná rovnice přímky

$ax + by + c = 0$

238 - Tečna ke grafu funkce

Zadání Určete rovnice tečen ke grafu funkce f, které jsou rovnoběžné s přímkou p:

a) $y = x^2 + 4x - 5, \quad p: \; x + 4y = 0$

b) $y = x^3 - 12x, \quad p \; : y = 2$

Řešení Video **Teorie:** 51 **Řešené příklady:** 138, 139

Tahák

směrnicový tvar rovnice tečny

$t : y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$

bod dotyku

$T = [x_0; y_0]$

směrnice tečny

$k_t = f'\,(x_0)$

239 - Tečna ke grafu funkce

Zadání Určete rovnice tečen ke grafu funkce f, které jsou rovnoběžné s osou x:

a) $y = x^4 - 12x$

b) $y = x^2 + 4x - 5$

Řešení **Video** **Teorie: 51** **Řešené příklady: 138, 139**

Tahák

směrnicový tvar rovnice tečny

$t : y - y_0 = k_t (x - x_0)$

bod dotyku

$T = [x_0; y_0]$

směrnice tečny

$k_t = f'(x_0)$

240 - Tečna ke grafu parametricky zadané funkce

Zadání Určete rovnici tečny t a normály n cykloidy v dotykovém bodě T, v němž $t = \frac{\pi}{2}$.
Parametrické rovnice cykloidy jsou:

$$\begin{aligned} x &= a\,(t - \sin t) \\ y &= a\,(1 - \cos t)\,; \quad a > 0,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{aligned}$$

Řešení Video **Teorie:** 51 **Řešené příklady:** 138, 139

Tahák

směrnicový tvar rovnice tečny
$t : y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$
bod dotyku
$T = [x_0; y_0]$
směrnice tečny
$k_t = f'\,(x_0)$

směrnicový tvar rovnice normály
$t : y - y_0 = k_n\,(x - x_0)$
bod dotyku
$T = [x_0; y_0]$
směrnice normály
$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$

241 - Taylorův polynom

Zadání Napište Taylorův polynom n-tého stupně $T_n(x)$ v okolí bodu x_0 pro funkci:

a) $f: y = \ln x,\ x_0 = 1,\ n = 3$

b) $f: y = \cos\frac{x}{2},\ x_0 = \frac{\pi}{2},\ n = 3$

Řešení Video **Teorie:** 52 **Řešené příklady:** 140, 141

Tahák

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_{)})}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

242 - Maclaurinův polynom

Zadání Napište Maclaurinův polynom šestého stupně funkce:

a) $f : y = e^x$

b) $f : y = \sin x$

Řešení

Video **Teorie:** 52 **Řešené příklady:** 140, 141

Tahák

Maclaurinův polynom je Taylorův polynom v bodě $x_0 = 0$.

243 - l'Hospitalovo pravidlo

Zadání Spočítejte limity l'Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

Řešení Video **Teorie:** 53 **Řešené příklady:** 142, 143

Tahák

Limita typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$"

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

244 - l'Hospitalovo pravidlo

Zadání Spočítejte limity l'Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x-4}{x^2-x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3}$

Řešení Video **Teorie:** 53 **Řešené příklady:** 142, 143

Tahák

Limita typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$"

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Poznámka: Jiné typy limit je potřeba upravit na typ „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$".

245 - Monotonnost a lokální extrémy funkce

Zadání Najděte intervaly monotonnosti (kde funkce roste a kde klesá) a lokální extrémy (lokální maximum a minimum).

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

Řešení

Video **Teorie:** 55, 56, 57 **Příklady:** 245, 246, 247, 248

Tahák

1. Definiční obor.
2. První derivace.
3. Znaménko první derivace. Funkce roste $f'(x) > 0$ a funkce klesá $f'(x) < 0$.
4. Lokální extrémy.
5. Pozor na definiční obor. V bodech nespojitosti samozřejmě nejsou žádné extrémy!

246 - Monotonnost a lokální extrémy funkce

Zadání Najděte intervaly monotonnosti (kde funkce roste a kde klesá) a lokální extrémy (lokální maximum a minimum).

a) $f(x) = x - 2\ln(x+1)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x + \ln x$

Řešení

Video **Teorie:** 55, 56, 57 **Příklady:** 245, 246, 247, 248

Tahák

1. Definiční obor.
2. První derivace.
3. Znaménko první derivace. Funkce roste $f'(x) > 0$ a funkce klesá $f'(x) < 0$.
4. Lokální extrémy.
5. Pozor na definiční obor. V bodech nespojitosti samozřejmě nejsou žádné extrémy!

247 - Monotonnost a lokální extrémy funkce

Zadání Najděte intervaly monotonnosti (kde funkce roste a kde klesá) a lokální extrémy (lokální maximum a minimum).

a) $f(x) = x - 5\arctan x$

b) $f(x) = x - 2\sin x$

Řešení

Video **Teorie:** 55, 56, 57 **Příklady:** 245, 246, 247, 248

Tahák

1. Definiční obor.
2. První derivace.
3. Znaménko první derivace. Funkce roste $f'(x) > 0$ a funkce klesá $f'(x) < 0$.
4. Lokální extrémy.
5. Pozor na definiční obor. V bodech nespojitosti samozřejmě nejsou žádné extrémy!

248 - Lokální extrémy

Zadání Najděte lokální extrémy (lokální maximum a minimum) funkce.

a) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 18x^2 + 12$

b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$

Řešení

Video **Teorie:** 55, 56, 57 **Příklady:** 245, 246, 247, 248

Tahák

1. Definiční obor.
2. První derivace.
3. Stacionární body $f'(x) = 0$.
4. Druhá derivace.
5. Lokální minimum $f''(x_0) > 0$.
   Lokální maximum $f''(x_0) < 0$.

249 - Konvexnost, konkávnost, inflexní body

Zadání Najděte intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní, najděte její inflexní body.

a) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 24x^2 - 12$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

Řešení Video **Teorie:** 58, 59, 60 **Řešené příklady:** 148

Tahák

1. Definiční obor.
2. První derivace.
3. Druhá derivace.
4. Znaménko druhé derivace. Funkce konvexní $f''(x) > 0$ a funkce konkávní $f''(x) < 0$.
5. Inflexní body.
6. Pozor na definiční obor. V bodech nespojitosti samozřejmě nejsou žádné inflexní body!

250 - Inflexní body

Zadání Ve kterém z uvedených bodů má zadaná funkce inflexní bod?

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$
i) v bodě $x_0 = \frac{2}{3}$, ii) v bodě $x_0 = \frac{3}{2}$, iii) v bodě $x_0 = -\frac{2}{3}$, iv) funkce nemá inflexní bod.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
i) v bodě $x_0 = \frac{5}{4}$, ii) v bodě $x_0 = -2$, iii) v bodě $x_0 = -\frac{4}{5}$, iv) funkce nemá inflexní bod.

Řešení Video **Teorie:** 58, 59, 60 **Řešené příklady:** 148

Tahák

1. Definiční obor.
2. První derivace.
3. Druhá derivace.
4. Znaménko druhé derivace. Funkce konvexní $f''(x) > 0$ a funkce konkávní $f''(x) < 0$.
5. Inflexní body.
6. Pozor na definiční obor. V bodech nespojitosti samozřejmě nejsou žádné inflexní body!
7. Porovnejte výsledek se zadáním.

251 - Asymptoty

Zadání Určete všechny asymptoty grafu funkce:

a) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x + 3}$

b) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

Řešení Video **Teorie:** 61 **Řešené příklady:** 149, 150

Tahák

1. Definiční obor.
2. Našli jste body nespojitosti?
3. Bude zde svislá asymptota? (Asymptota bez směrnice, jen jedna?)
4. Zjistěte, zda existuje asymptota se směrnicí $y = kx + q$
   $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$

252 - Asymptoty

Zadání Určete všechny asymptoty grafu funkce:

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 1}$

b) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 1}$

Řešení Video **Teorie:** 61 **Řešené příklady:** 149, 150

Tahák

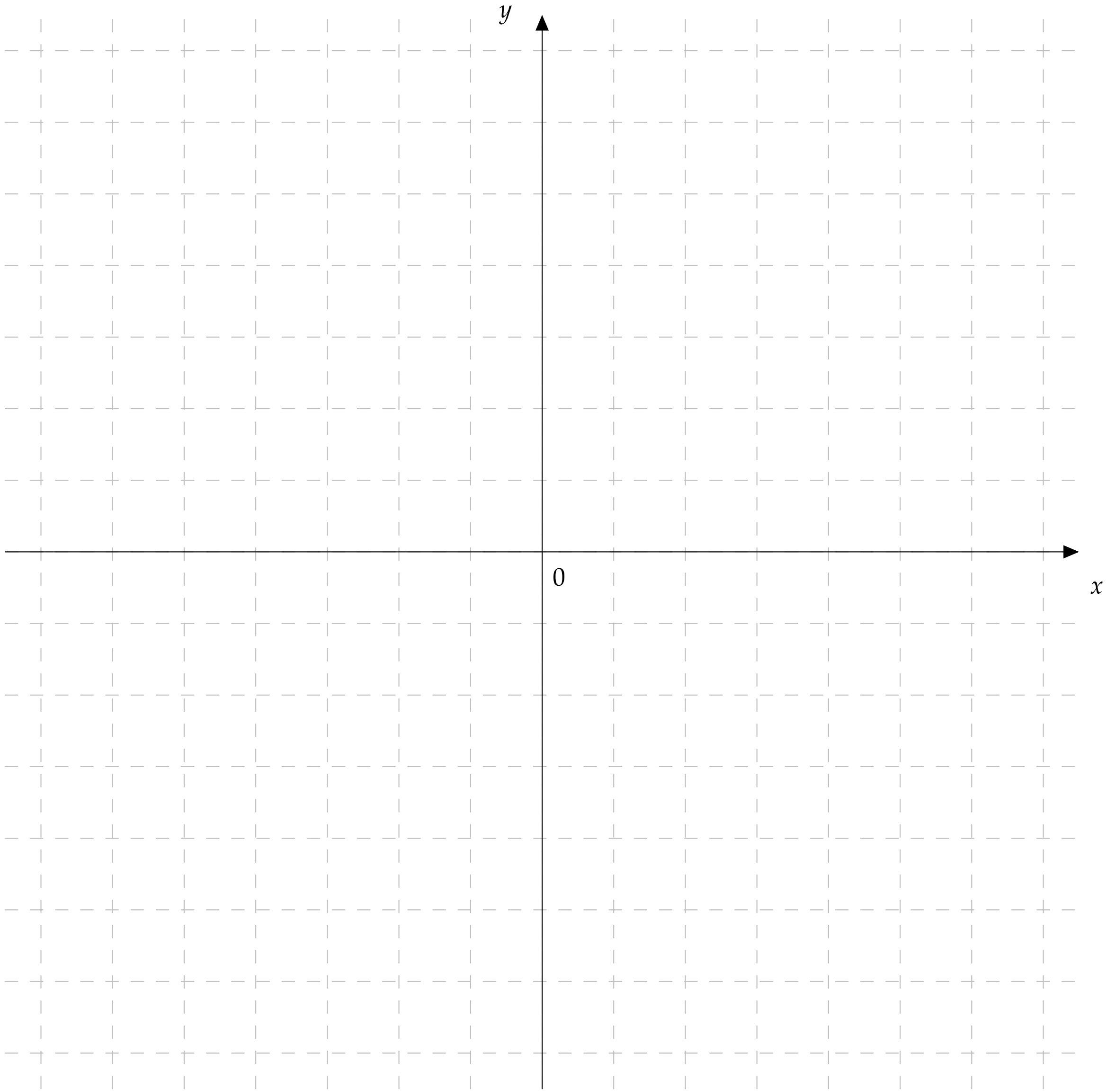
1. Definiční obor.
2. Našli jste body nespojitosti?
3. Bude zde svislá asymptota? (Asymptota bez směrnice, jen jedna?)
4. Zjistěte, zda existuje asymptota se směrnicí $y = kx + q$
   $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$

253 - Průběh funkce

Zadání Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = \mathbb{R}$
   $H_f = \mathbb{R}$
2. funkce nemá body nespojitosti
   limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
3. funkce není sudá, není lichá, není periodická
4. průsečík s osou x je: $[-3, 0]$
   průsečík s osou y je: $[0, 1]$
   funkce je kladná intervalu $(-3, \infty)$
   záporná na $(-\infty, -3)$
5. funkce má lokální maximum v bodě $[-1, 5]$
   a lokální minimum v bodě $[1, \frac{1}{2}]$
   je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$
   a klesající na $(-1, 1)$
6. funkce má inflexní body $[-\frac{1}{2}, 2]$
   funkce je konvexní na intervalu $(-\frac{1}{2}, \infty)$
   a konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{2})$
7. funkce nemá asymptoty

Řešení **Video** **Teorie:** 62

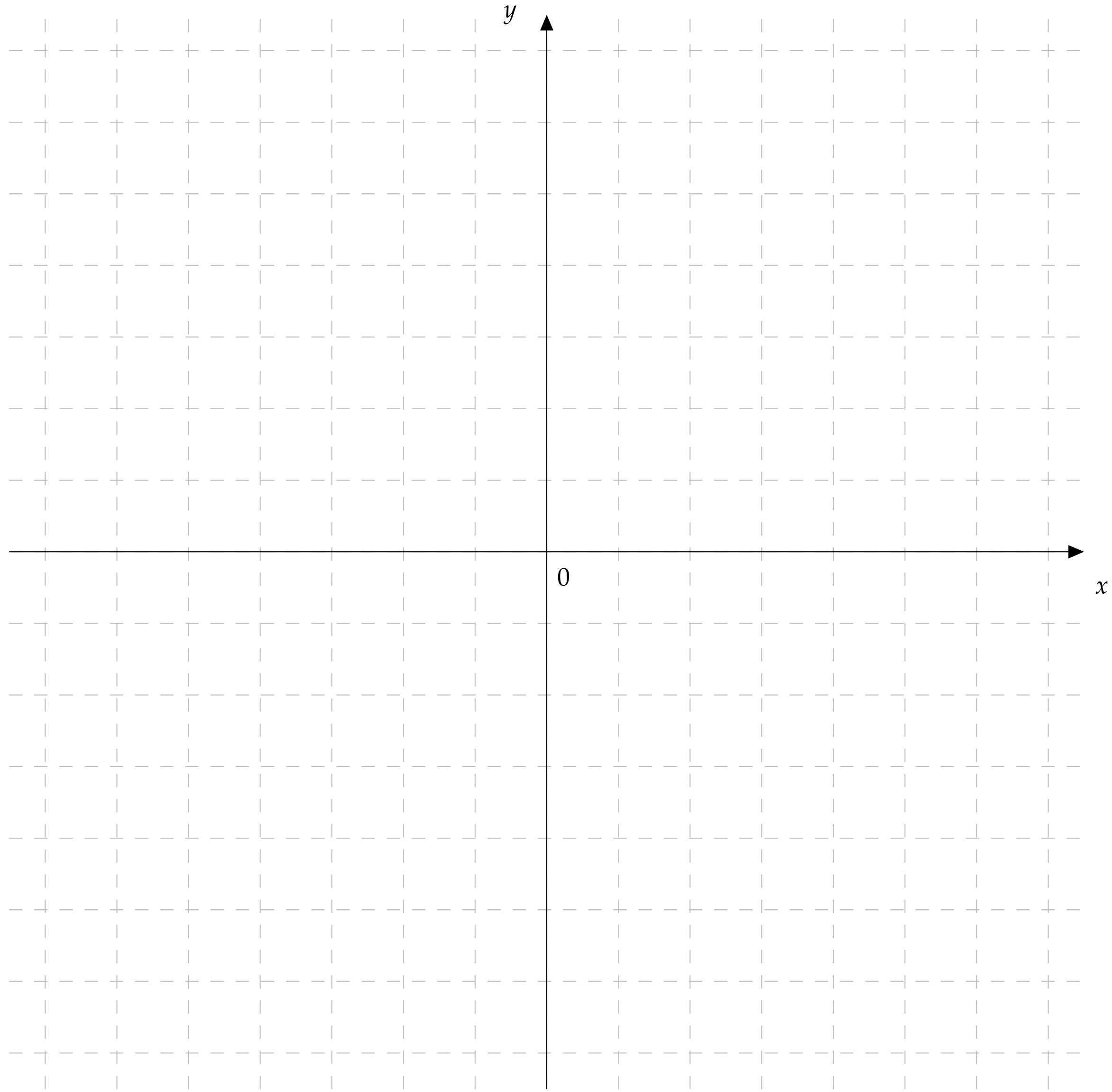


254 - Průběh funkce

Zadání Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = \mathbb{R}$
   $H_f = \langle 0, 3)$
2. funkce nemá body nespojitosti
   limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$
   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$
3. funkce je sudá, není lichá, není periodická
4. průsečík s osou x je: $[0, 0]$
   průsečík s osou y je: $[0, 0]$
   funkce je kladná na $\mathbb{R}$
5. funkce má lokální minimum v bodě $[0, 0]$
   je rostoucí na interval $(0, \infty)$
   a klesající na $(-\infty, 0)$
6. funkce má inflexní body $[-2, 1]$ a $[2, 1]$
   funkce je konvexní na intervalu $(-2, 2)$
   a konkávní na $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$
7. funkce má v ∞ a v $-\infty$ asymptotu $y = 3$

Řešení **Video** **Teorie:** 62

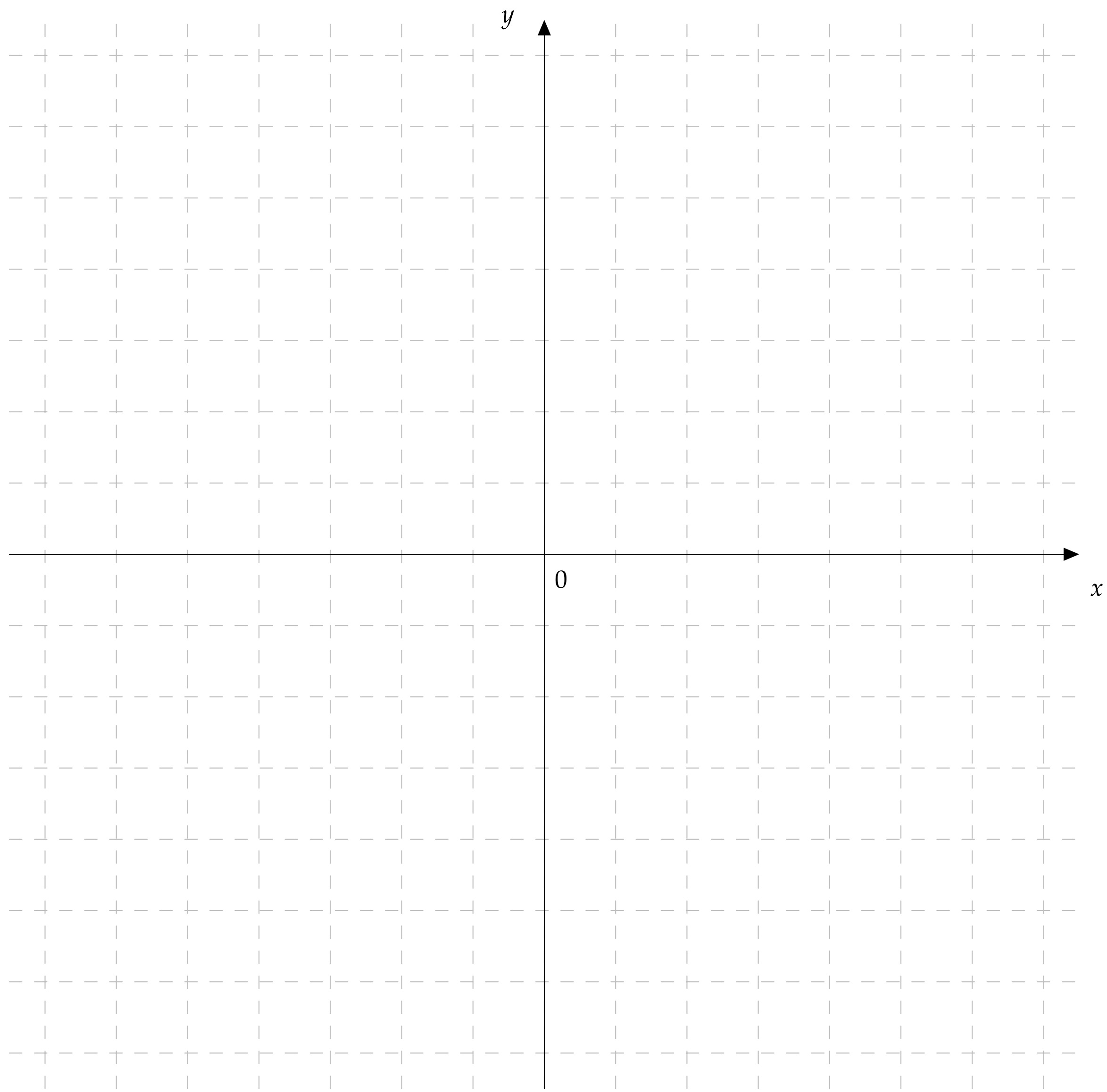


255 - Průběh funkce

Zadání Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = (1, \infty)$
   $H_f = \mathbb{R}$
2. funkce nemá body nespojitosti
   limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$
   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
3. funkce není sudá, není lichá, není periodická
4. průsečík s osou x je: $[4, 0]$
   průsečík s osou y není
   funkce je kladná intervalu $(4, \infty)$
   záporná na $(1, 4)$
5. funkce nemá lokální extrémy
   je rostoucí na celém D_f
6. funkce má inflexní bod $[3, -2]$
   funkce je konvexní na intervalu $(3, \infty)$
   a konkávní na $(1, 3)$
7. funkce má asymptotu $x = 1$

Řešení Video **Teorie:** 62



256 - Průběh funkce

Zadání Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = \mathbb{R}$
   $H_f = \langle -5, \infty)$

2. funkce nemá body nespojitosti
   limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

3. funkce není sudá, není lichá, není periodická

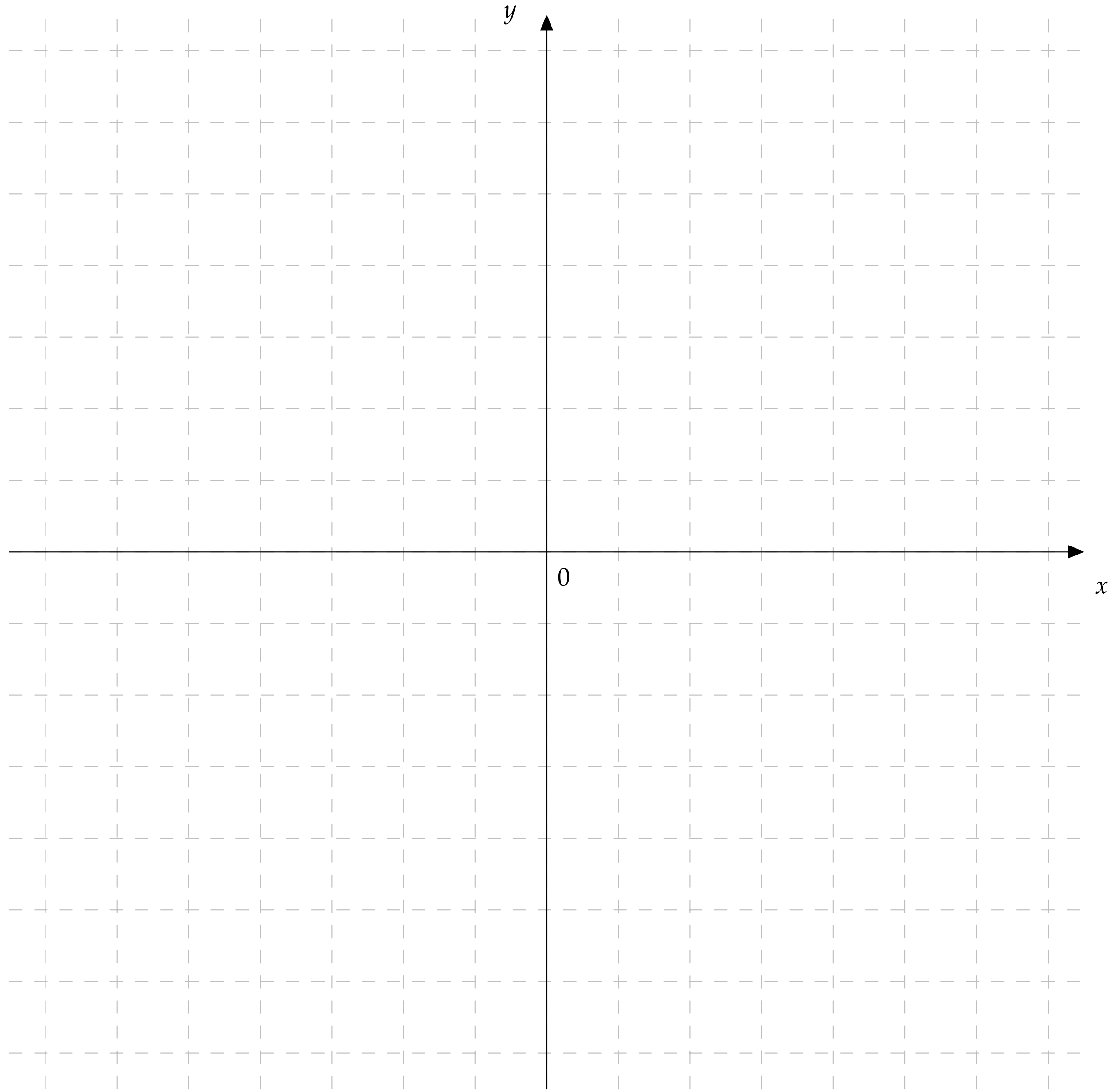
4. průsečíky s osou x je: $[-4, 0]$, a $[2, 0]$
   průsečík s osou y je: $[0, -3]$
   funkce je kladná na $(-\infty, -4)$ a $(2, \infty)$
   zíáporná na $(-4, 2)$

5. funkce má lokální minimum v bodě $[-1, -5]$
   je rostoucí na interval $(-1, \infty)$
   a klesajicí na $(-\infty, -1)$

6. funkce má inflexní bod $[4, 5]$
   funkce je konvexní na intervalu $(-\infty, 4)$
   a konkávní na $(4, \infty)$

7. funkce má v ∞ asymptotu $y = x + 3$

Řešení Video **Teorie:** 62



Pracovní listy – Lineární algebra

258 - Matice

Zadání Vypočtěte matici D danou vztahem: $D = 2 \cdot A - B + C,$

kde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -3 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$

Řešení Video **Teorie:** 66, 67, 68 **Řešené příklady:** 152

Tahák

Rovnici aplikujeme na jednotlivé prvky na stejných pozicích daných matic.

259 - Matice

Zadání Vypočtěte matici D danou vztahem: $D = -3 \cdot A + 2 \cdot B - C$,

kde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -3 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Řešení Video **Teorie:** 66, 67, 68 **Řešené příklady:** 152

Tahák

Rovnici aplikujeme na jednotlivé prvky na stejných pozicích daných matic.

260 - Matice

Zadání

Transponujte matice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 4 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 13 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 1 & -2 & -5 \\ 6 & -5 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & 12 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení Video **Teorie:** 66, 67, 68 **Řešené příklady:** 152

Tahák

Transpozice: výměna řádků a sloupců matice.

261 - Matice

Zadání

Vypočtěte $A \cdot B$, $B \cdot A$ (pokud to lze), jestliže: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení Video **Teorie:** 69 **Řešené příklady:** 153

Tahák

Součin matic:
$A = (a_{ij})$ - matice typu $m \times n$,
$B = (b_{jk})$ - matice typu $n \times p$.
Pak $C = A \cdot B = (c_{ik})$ - matice typu $m \times p$, kde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{jn} \cdot b_{jk} =$$

$$= a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}.$$

262 - Matice

Zadání Vypočtěte $A \cdot B$, $B \cdot A$ (pokud to lze), jestliže: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení Video **Teorie: 69** **Řešené příklady: 153**

Tahák

Součin matic:
$A = (a_{ij})$ - matice typu $m \times n$,
$B = (b_{jk})$ - matice typu $n \times p$.
Pak $C = A \cdot B = (c_{ik})$ - matice typu $m \times p$, kde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{jn} \cdot b_{jk} =$$

$$= a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}.$$

263 - Matice

Zadání Vypočtěte $A \cdot B$, $B \cdot A$ (pokud to lze), jestliže: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 7 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení Video **Teorie:** 69 **Řešené příklady:** 153

Tahák

Součin matic:
$A = (a_{ij})$ - matice typu $m \times n$,
$B = (b_{jk})$ - matice typu $n \times p$.
Pak $C = A \cdot B = (c_{ik})$ - matice typu $m \times p$, kde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{jn} \cdot b_{jk} =$$

$$= a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}.$$

264 - Hodnost matice

Zadání Určete hodnost matice: $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení Video **Teorie:** 70, 71 **Řešené příklady:** 154

Tahák

Původní matici převeďte na stupňovitý tvar. Pak hodnost matice je rovna počtu nenulových řádku stupňovité matice.

265 - Hodnost matice

Zadání Určete hodnost matice: $$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení Video **Teorie:** 70, 71 **Řešené příklady:** 154

Tahák

Původní matici převeďte na stupňovitý tvar. Pak hodnost matice je rovna počtu nenulových řádku stupňovité matice.

266 - Hodnost matice

Zadání

Určete hodnost matice: $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 11 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$

Řešení Video **Teorie:** 70, 71 **Řešené příklady:** 154

Tahák

Původní matici převeďte na stupňovitý tvar. Pak hodnost matice je rovna počtu nenulových řádku stupňovité matice.

267 - Hodnost matice

Zadání

Určete hodnost matice: $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$

Řešení Video **Teorie:** 70, 71 **Řešené příklady:** 154

Tahák

Původní matici převeďte na stupňovitý tvar. Pak hodnost matice je rovna počtu nenulových řádku stupňovité matice.

268 - Hodnost matice

Zadání

Určete hodnost matice: $$E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \\ 6 & -5 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení Video **Teorie:** 70, 71 **Řešené příklady:** 154

Tahák

Původní matici převeďte na stupňovitý tvar. Pak hodnost matice je rovna počtu nenulových řádku stupňovité matice.

269 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 2\ . \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešení

Video **Teorie:** 72, 73, 74 **Řešené příklady:** 155, 157, 158, 160, 162, 163

Tahák

Frobeniova věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

má alespoň jedno řešení právě když

$$h(A) = h(A/\vec{b}),$$

tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené. Pokud

$$h(A) \neq h(A/\vec{b}),$$

pak soustava nemá řešení. Má-li soustava řešení, tj

$$h(A) = h(A/\vec{b}) = h,$$

pak pro

$$h = n$$

má soustava právě jedno řešení, jinak, tj. pro

$$h < n,$$

má soustava ∞-mnoho řešení závislých na $n-h$ parametrech.

270 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}.$$

Řešení Video **Teorie:** 72, 73, 74 **Řešené příklady:** 155, 157, 158, 160, 162, 163

Tahák

Frobeniova věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

má alespoň jedno řešení právě když

$$h(A) = h(A/\vec{b}),$$

tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené. Pokud

$$h(A) \neq h(A/\vec{b}),$$

pak soustava nemá řešení. Má-li soustava řešení, tj

$$h(A) = h(A/\vec{b}) = h,$$

pak pro

$$h = n$$

má soustava právě jedno řešení, jinak, tj. pro

$$h < n,$$

má soustava ∞-mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

271 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}.$$

Řešení Video **Teorie:** 72, 73, 74 **Řešené příklady:** 155, 157, 158, 160, 162, 163

Tahák

Frobeniova věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

má alespoň jedno řešení právě když

$$h(A) = h(A/\vec{b}),$$

tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené. Pokud

$$h(A) \neq h(A/\vec{b}),$$

pak soustava nemá řešení. Má-li soustava řešení, tj

$$h(A) = h(A/\vec{b}) = h,$$

pak pro

$$h = n$$

má soustava právě jedno řešení, jinak, tj. pro

$$h < n,$$

má soustava ∞-mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

272 - Soustavy homogenních lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu homogenních lineárních rovnic a proveďte zkoušku:
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Řešení Video **Teorie:** 72, 73, 74 **Řešené příklady:** 155, 157, 158, 160, 162, 163

Tahák

Soustava homogenních lineárních rovnic má vždy řešení - viz. Frobeniova věta, jejíž podmínky jsou zde vždy splněny.
Lze řešit Gaussovou eliminační metodou, nebo zde přímo za pomoci determinantu soustavy (proč?).

273 - Soustavy homogenních lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu homogenních lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & & & + & 4x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 72, 73, 74** **Řešené příklady: 155, 157, 158, 160, 162, 163**

Tahák

Soustava homogenních lineárních rovnic má vždy řešení - viz. Frobeniova věta, jejíž podmínky jsou zde vždy splněny.
Lze řešit Gaussovou eliminační metodou.

274 - Determinanty

Zadání Vypočtěte následující determinanty 2. řádu:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Řešené příklady:** 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175

Tahák

Determinanty 2. řádu

- křížové pravidlo:

Součin prvků na hlavní diagonále mínus součin prvků na vedlejší diagonále.

275 - Determinanty

Zadání Vypočtěte následující determinanty 3. řádu:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Řešené příklady:** 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175

Tahák

Determinanty 3. řádu

- Sarrusovo pravidlo:

Sepíšeme první 2 řádky.
Prvky ležící na úhlopříčkách vynásobíme, přičemž těm, které směřují zleva doprava (hlavní diagonála) přiřadíme znaménko + a těm, které směřují zprava doleva (vedlejší diagonála) přiřadíme znaménko -.

276 - Determinanty

Zadání

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

a) rozvojem podle vhodného řádku,
b) rozvojem podle vhodného sloupce.

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Řešené příklady:** 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175

Tahák

Vhodný řádek (sloupec) je ten, který obsahuje co nejvíce nul.
Laplaceův rozvoj pro matici A řádu n:

a) rozvoj determinantu podle i-tého řádku

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|,$$

b) rozvoj determinantu podle j-tého sloupce

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|,$$

kde matice A_{ij} vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

277 - Determinanty

Zadání

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ úpravou na trojúhelníkový tvar.

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Řešené příklady:** 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175

Tahák

Vlastnosti determinantů:
$|A| = |A^T|$ $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
Má-li matice A dva řádky (sloupce) stejné, pak $|A| = 0$.
Vznikne-li matice B z A: a) vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců), pak: $|B| = -|A|$,
b) vynásobením jednoho řádku (sloupce) číslem $k \in R$, pak $|B| = k \cdot |A|$,
c) přičtením $k-$násobku, $k \in R$, jednoho řádku (sloupce) k jinému, pak: $|B| = |A|$.
Jsou-li řádky (sloupce) matice A lineárně závislé, pak $|A| = 0$.
Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

278 - Determinanty

Zadání

Vypočtěte následující determinant: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Řešení

Tahák

Vlastnosti determinantů:
$|A| = |A^T|$
$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
Má-li matice A dva řádky (sloupce) stejné, pak $|A| = 0$.
Vznikne-li matice B z A: a) vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců), pak: $|B| = -|A|$,
b) vynásobením jednoho řádku (sloupce) číslem $k \in R$, pak $|B| = k \cdot |A|$,
c) přičtením $k-$násobku, $k \in R$, jednoho řádku (sloupce) k jinému, pak: $|B| = |A|$.
Jsou-li řádky (sloupce) matice A lineárně závislé, pak $|A| = 0$.
Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

279 - Determinanty

Zadání Vypočtěte následující determinant:
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Řešené příklady:** 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175

Tahák

Vlastnosti determinantů:
$|A| = |A^T|$
$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
Má-li matice A dva řádky (sloupce) stejné, pak $|A| = 0$.
Vznikne-li matice B z A: a) vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců), pak: $|B| = -|A|$,
b) vynásobením jednoho řádku (sloupce) číslem $k \in R$, pak $|B| = k \cdot |A|$,
c) přičtením $k-$násobku, $k \in R$, jednoho řádku (sloupce) k jinému, pak: $|B| = |A|$.
Jsou-li řádky (sloupce) matice A lineárně závislé, pak $|A| = 0$.
Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

280 - Determinanty

Zadání

Pro která x je determinant $\begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}$ roven 0?

Řešení Video **Teorie:** 75, 76, 77 **Řešené příklady:** 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175

Tahák

Pro sestavení rovnice s neznámou x použijte Sarrusovo pravidlo.

281 - Soustavy lineárních rovnic - Cramerovo pravidlo

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla a proveďte zkoušku:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 9 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -12 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -3 \end{array}.$$

Řešení Video **Teorie:** 78 **Řešené příklady:** 176

Tahák

Cramerovo pravidlo:

1. jen pro soustavy s regulární maticí soustavy A, tj.
$$|A| \neq 0,$$
2. vypočtou se determinanty A, A_i (nahradí se příslušný sloupec pravou stranou),
3. spočítají se složky řešení
$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}.$$

282 - Matice

Zadání Vypočtěte k dané matici A matici inverzní (A^{-1}) a proveďte zkoušku: $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení Video **Teorie:** 79, 80 **Řešené příklady:** 177, 178

Tahák

Každou regulární matici A převedeme jen řádkovými (resp. sloupcovými) úpravami na jednotkovou matici E. Stejné úpravy aplikujeme na jednotkovou matici E, která tímto přejde na inverzní matici A^{-1}.

Matice A a E zapíšeme vedle sebe, tj. $(A,\ E)$, jako matici typu $n \times 2n$).

283 - Matice

Zadání Vypočtěte k dané matici A matici inverzní (A^{-1}) eliminační metodou a proveďte zkoušku: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení Video **Teorie:** 79, 80 **Řešené příklady:** 177, 178

Tahák

Každou regulární matici A převedeme jen řádkovými (resp. sloupcovými) úpravami na jednotkovou matici E. Stejné úpravy aplikujeme na jednotkovou matici E, která tímto přejde na inverzní matici A^{-1}.

Matice A a E zapíšeme vedle sebe, tj. $(A,\ E)$, jako matici typu $n \times 2n$).

284 - Matice

Zadání Vypočtěte k dané matici A matici inverzní (A^{-1}) eliminační metodou a proveďte zkoušku: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení Video **Teorie:** 79, 80 **Řešené příklady:** 177, 178

Tahák

Každou regulární matici A převedeme jen řádkovými (resp. sloupcovými) úpravami na jednotkovou matici E. Stejné úpravy aplikujeme na jednotkovou matici E, která tímto přejde na inverzní matici A^{-1}.

Matice A a E zapíšeme vedle sebe, tj. $(A,\ E)$, jako matici typu $n \times 2n$).

285 - Matice

Zadání Vypočtěte k dané matici A matici inverzní (A^{-1}) užitím determinantu a proveďte zkoušku: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení **Video** **Teorie:** **79**, **80** **Řešené příklady:** **177**, **178**

Tahák

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^{\mathsf{T}},$$

kde $\tilde{A}^{\mathsf{T}}$ je adjungovaná matice k matici A a je tvořena prvky $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$. Matice A_{ij} vynikne z A vynecháním $i-$tého řádku a $j-$tého sloupce.

286 - Matice

Zadání Vypočtěte k dané matici A matici inverzní (A^{-1}) užitím determinantu a proveďte zkoušku: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení Video **Teorie:** 79, 80 **Řešené příklady:** 177, 178

Tahák

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^{\mathsf{T}},$$

kde $\tilde{A}^{\mathsf{T}}$ je adjungovaná matice k matici A a je tvořena prvky $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$. Matice A_{ij} vynikne z A vynecháním $i-$tého řádku a $j-$tého sloupce.

287 - Maticová rovnice

Zadání Řešte rovnici pro neznámou matici X a proveďte zkoušku:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 12 \\ 0 & 10 & 7 \\ 37 & 23 & 73 \end{pmatrix}$$

Řešení **Video** **Teorie: 81** **Řešené příklady: 179**

Tahák

Maticová rovnice ve tvaru

$$A \cdot X = B$$

Násobením zleva inverzní maticí A^{-1} dostaneme řešení soustavy

$$X = A^{-1} \cdot B$$

288 - Maticová rovnice

Zadání Řešte rovnici pro neznámou matici X a proveďte zkoušku:

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 & 51 \\ 13 & 26 & -20 & 23 \end{pmatrix}$$

Řešení Video **Teorie:** 81 **Řešené příklady:** 179

Tahák

Maticová rovnice ve tvaru

$$A \cdot X = B$$

Násobením zleva inverzní maticí A^{-1} dostaneme řešení soustavy

$$X = A^{-1} \cdot B$$

289 - Maticová rovnice

Zadání Řešte rovnici pro neznámou matici X a proveďte zkoušku:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -24 & 38 \end{pmatrix}$$

Řešení Video **Teorie:** 81 **Řešené příklady:** 179

Tahák

Maticová rovnice ve tvaru

$$X \cdot A = B$$

Násobením zprava inverzní maticí A^{-1} dostaneme řešení soustavy

$$X = B \cdot A^{-1}$$

290 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice a proveďte zkoušku:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 9 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -12 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -3 \end{array}.$$

Řešení Video **Teorie:** 82 **Řešené příklady:** 180

Tahák

Soustavu můžeme napsat v maticovém tvaru

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Násobením zleva inverzní maticí A^{-1} dostaneme řešení soustavy

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

291 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice a proveďte zkoušku:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -7 \end{array}.$$

Řešení

Video **Teorie:** 82 **Řešené příklady:** 180

Tahák

Soustavu můžeme napsat v maticovém tvaru

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Násobením zleva inverzní maticí A^{-1} dostaneme řešení soustavy

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Pracovní listy – Analytická geometrie

293 - Skalární součin vektorů

Zadání Vypočtěte sklární součin a úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (tedy $\vec{u} \cdot \vec{v}$):

a) $\vec{u} = (-1, -1, 4)$, $\vec{v} = (-1, 2, -2)$,

b) $\vec{u} = (2, 5, 7)$, $\vec{v} = (-3, 0, 6)$,

c) $\vec{u} = (1, 1, -4)$, $\vec{v} = (1, -2, 2)$.

Řešení **Video** **Teorie:** 88

Tahák

Skalární součin dvou vektorů:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \varphi,$$

kde φ je úhel svírající vektory $\vec{u}, \vec{v}$ nebo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + ... + u_n \cdot v_n,$$

kde $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$.

Velikost (délka) vektoru $\vec{u}$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$$

POZOR: Co je výsledkem skalárního součinu?

294 - Aplikace skalárního součinu

Zadání Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{u}, \vec{v}$ na sebe kolmé:

a) $\vec{u} = (-2, -3, 5),\ \vec{v} = (4, 2, 7)$,

b) $\vec{u} = (2, 3, -1),\ \vec{v} = (13, -6, 8)$,

c) $\vec{u} = (3, -1, -4),\ \vec{v} = (9, -12, 0)$.

Řešení Video **Teorie:** 88

Tahák

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

295 - Vektorový součin

Zadání

Vypočtěte vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (tedy $\vec{u} \times \vec{v}$):

a) $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (3, -1, -2)$,

b) $\vec{u} = (-2, 2, -1)$, $\vec{v} = (3, -6, 5)$,

c) $\vec{u} = (-3, -1, 0)$, $\vec{v} = (4, -3, 7)$.

Řešení **Video** **Teorie:** **89**, **90**

Tahák

Vektorový součin dvou vektorů:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ jsou jednotkové vektory ve směru os kartézské soustavy souřadnic.

Nebo

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

POZOR: Co je výsledkem vektorového součinu?

296 - Aplikace vektorového součinu

Zadání

a) Vypočtěte obsah rovnoběžníku daného stranami $\vec{a} = (1, 1, -2)$, $\vec{b} = (5, -4, 7)$.

b) Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, přičemž $A = [4, 5, -2]$, $B = [1, 0, 6]$, $C = [7, 3, 4]$.

Řešení Video **Teorie:** 89, 90

Tahák

Obsah rovnoběžníku daného stranami $\vec{a}, \vec{b}$:

$$S = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|.$$

297 - Smíšený součin

Zadání

Vypočtěte smíšený součin trojice vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (tedy $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$):

a) $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$, $\vec{c} = (3, 2, -4)$,

b) $\vec{a} = (3, 0, -2)$, $\vec{b} = (0, -3, 5)$, $\vec{c} = (1, -1, 4)$,

c) $\vec{a} = (-7, -2, 5)$, $\vec{b} = (3, -8, 1)$, $\vec{c} = (2, -1, -3)$.

Řešení Video **Teorie:** 91

Tahák

Smíšený součin trojice vektorů:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

POZOR: Co je výsledkem smíšeného součinu?

298 - Aplikace smíšeného součinu

Zadání

a) Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu a čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a} = (1, 1, -2)$, $\vec{b} = (5, -4, 3)$, $\vec{c} = (3, -1, 0)$.

b) Je dán rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$ a vrcholy $A = [0, 1, 2]$, $B = [5, 2, 3]$, $D = [-1, 6, 4]$, $A' = [1, 1, 6]$. Určete souřadnice zbývajících vrcholů a objem tělesa.

Řešení Video **Teorie:** 91

Tahák

Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right| .$$

299 - Rovnice roviny

Zadání

a) Zjistěte zda body $A = [-1, 2, 5]$, $B = [3, -1, 0]$, $C = [-5, -4, 2]$ leží v rovině $\alpha : 2x - 5y + 6z - 11 = 0$.

b) Je dána rovina $\beta : -3x + 2y - 5z + 8 = 0$. Vyjádřete danou rovinu parametricky.

c) Určete obecnou rovnici roviny ρ dané parametricky:
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & -2 & + & 3s & + & r \\ y & = & & & 2s & + & 2r \\ z & = & 1 & & & + & 2r \end{array}.$$

Řešení Video **Teorie:** 94, 95 **Řešené příklady:** 182, 183

Tahák

a) Dosaďte jednotlivé body do rovnice a zjistětě, zda ji splňují.
b) Např. určete 3 body, které leží v rovině a z nich příslušné směrové vektory.
c) Např. řešte jako soustavu tří rovnic o dvou neznámých s, r, tak že vyloučíte jeden parametr (tj. neznámou s, r) a dosazením bodu, který leží v rovině, dopočítáte parametr druhý.
Pozor - x, y, z zde nejsou neznámé! Musí se vyskytovat v obecné rovnici.

300 - Rovnice roviny

Zadání

a) Určete rovnici roviny procházející bodem $M = [1, -2, 3]$ a kolmé na vektor $\vec{a} = (1, 1, -2)$.

b) Určete rovnici roviny procházející bodem $Q = [1, -2, 3]$ a kolmé k ose x.

c) Určete rovnici roviny procházející bodem $M = [1, -2, 3]$ a rovnoběžně s rovinou $\alpha : 2x - y + 3z = 0$.

Řešení Video **Teorie:** 94, 95 **Řešené příklady:** 182, 183

Tahák

Zjistěte normálový vektor dané roviny a pak dosazením bodu M (resp. Q) do obecné rovnice roviny, tj. $ax + by + cz + d = 0$ dopočítejte absolutní člen d.

301 - Rovnice přímky

Zadání

a) Zjistěte zda body $A = [1, -3, 2]$, $B = [-2, -4, 5]$, $C = [2, 0, 2]$ leží na přímce $p: \begin{array}{rcrcr} x &=& -1 &+& 3t \\ y &=& 2 &-& 2t \\ z &=& 1 &+& t \end{array}$

b) Přímka p je dána jako průsečnice rovin $\alpha : x + y - 5z + 1 = 0$ a $\beta : 2x + 3y - 8z + 3 = 0.$
Vyjádřete danou přímku parametricky.

Řešení Video **Teorie:** 92

Tahák

a) Dosaďte jednotlivé body do rovnice přímky a zjistětě, zda ji splňují.
b) Řešte jako soustavu dvou rovnic o třech neznámých, tedy soustavu s jedním parametrem.
Tj. jednu z neznámých x, y, z zvolte jako parametr a zbývající dvě dopočtěte.

302 - Rovnice přímky

Zadání

a) Určete rovnici přímky procházející bodem $M = [1, -1, -3]$ a rovnoběžné s vektorem $\vec{a} = (5, -4, 2)$.

b) Určete rovnici přímky procházející bodem $M = [1, -1, -3]$ a kolmé k rovině $\alpha : x + y - 5z + 1 = 0$.

c) Určete rovnici přímky procházející bodem $R = [1, -1, -3]$ a rovnoběžné s přímkou $p : \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & + & 3t \\ y & = & 3 & - & 2t \\ z & = & 2 & + & 5t \end{array}$.

Řešení Video **Teorie:** 92

Tahák

Zjistěte směrový vektor dané přímky a pak dosaďte bod M (resp. R) a příslušný směrový vektor do parametrické rovnice přímky.

303 - Vzdálenost útvarů v $\mathbf{E}^3$

Zadání

a) Určete vzdálenost bodu $R = [2, 4, 3]$ od přímky dané body $P = [2, 3, 1]$, $Q = [-2, 1, 0]$.

b) Určete vzdálenost bodu $M = [-2, 1, 3]$ od roviny $\rho : 2x + y - 2z + 5 = 0$.

Řešení

Video **Teorie:** 98 **Řešené příklady:** 184, 185

Tahák

Vzdálenost $d(M, p)$ bodu M od přímky $p : \vec{x} = A + t \cdot \vec{u}$:

$$d_p = \frac{\left|\vec{u} \times \vec{AM}\right|}{|\vec{u}|},$$

kde $\vec{u}$ je směrový vektor přímky a A je bod na této přímce. $\vec{AM} = M - A$.

Vzdálenost $d(M, \rho)$ bodu $M = [m_1, m_2, m_3]$ od roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$:

$$d(M, \rho) = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

304 - Vzdálenost útvarů v $\mathbf{E}^3$

Zadání

a) Určete vzdálenost dvou rovnoběžek $p: \begin{array}{rcrcr} x & = & 3t & - & 7 \\ y & = & 4t & - & 4 \\ z & = & -2t & - & 3 \end{array} \quad q: \begin{array}{rcrcr} x & = & 6s & + & 21 \\ y & = & 8s & - & 5 \\ z & = & -4s & + & 2 \end{array}.$

b) Určete vzdálenost rovnoběžných rovin $\alpha: -3x + 7y - 2z + 4 = 0, \quad \beta: 3x - 7y + 2z + 10 = 0.$

Řešení Video **Teorie:** 98 **Řešené příklady:** 184, 185

Tahák

Vzdálenost d dvou rovnoběžek $p: \vec{x}_1 = A + t\cdot\vec{u}, q: \vec{x}_2 = B + s\cdot\vec{v}$:

$$d = \frac{\left|\vec{AB}, \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}.$$

Vzdálenost $d(\alpha, \beta)$ dvou rovnoběžných rovin $\alpha: ax + by + cz + d_1 = 0$, $\beta: ax + by + cz + d_2 = 0$:

$$d(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

305 - Odchylky útvarů v $\mathbf{E}^3$

Zadání

a) Určete odchylku dvou přímek
$$p: \begin{array}{rcrcr} x &=& t &+& 2 \\ y &=& t &+& 3 \\ z &=& \sqrt{2}t &+& 5 \end{array}, \qquad q: \begin{array}{rcrcr} x &=& -r &+& 3 \\ y &=& -r &+& 2 \\ z &=& \sqrt{2}r && \end{array}.$$

b) Určete odchylku přímky
$$p: \begin{array}{rcrcr} x &=& 3t &-& 2 \\ y &=& -2t &+& 1 \\ z &=& t &-& 5 \end{array}$$
od roviny $\rho : 2x - 4y - 3z + 6 = 0.$

c) Určete odchylku rovin $\alpha : x - y + \sqrt{2}z + 2 = 0, \quad \beta : x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0.$

Řešení

Video **Teorie: 97, 93**

Tahák

Odchylka φ dvou přímek p, q:

$$\cos\varphi = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right|,$$

kde $\vec{u}, \vec{v}$ jsou směrové vektory přímek p, q.

Odchylka φ dvou rovin ρ, σ:

$$\cos\varphi = \left| \frac{\vec{n_\rho} \cdot \vec{n_\sigma}}{|\vec{n_\rho}| \cdot |\vec{n_\sigma}|} \right|,$$

kde $\vec{n_\rho}, \vec{n_\sigma}$ jsou normálové vektory rovin ρ, σ.

Odchylka φ přímky p od roviny ρ:

$$\sin\varphi = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \right|,$$

kde $\vec{u}$ je směrový vektor přímky p, $\vec{n}$ je normálový vektor roviny ρ.

306 - Vzájemná poloha dvou přímek

Zadání Určete vzájemnou polohu dvou přímek:

a)
$$p: \begin{array}{rcrcr} x &=& t &+& 2 \\ y &=& t &+& 3 \\ z &=& \sqrt{2}t &+& 5 \end{array}, \qquad q: \begin{array}{rcrcr} x &=& -r &+& 3 \\ y &=& -r &+& 2 \\ z &=& \sqrt{2}r && \end{array},$$

b)
$$p: \begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &+& t \\ y &=& 1 &+& 2t \\ z &=& -2 &-& 3t \end{array}, \qquad q: \begin{array}{rcrcr} x &=& 3 &+& 2r \\ y &=& 1 &+& 4r \\ z &=& -4 &+& -4r \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 93**

Tahák

Určete společné body přímek, tj. sestavte si a řešte příslušnou soustavu lineárních rovnic.

Pak:

a) různoběžky - jeden společný bod (průsečík),

b) rovnoběžky - žádný společný bod, ale leží v jedné rovině,

c) mimoběžky - žádný společný bod a neleží v jedné rovině,

d) totožné přímky - ∞-mnoho společných bodů.

307 - Vzájemná poloha přímky a roviny

Zadání Určete vzájemnou polohu přímky a roviny:

a) $$p: \begin{array}{rcrcr} x & = & 3t & - & 2 \\ y & = & -t & + & 1 \\ z & = & t & - & 5 \end{array}, \qquad \rho: 2x+3y-3z-14=0,$$

b) $$p: \begin{array}{rcrcr} x & = & -t & - & 2 \\ y & = & -2t & + & 4 \\ z & = & -2t & - & 1 \end{array}, \qquad \rho: \begin{array}{rcrcrcr} x & = & -2 & + & 3s & + & r \\ y & = & 4 & + & 2s & + & 2r \\ z & = & 1 & & & + & 2r \end{array}.$$

Napište obecnou rovnici roviny, pak řešte soustavu.

Řešení Video **Teorie:** 96

Tahák

Určete společné body přímky a roviny, tj. sestavte si a řešte příslušnou soustavu lineárních rovnic.

Pak:

a) různoběžné - jeden společný bod (průsečík),

b) rovnoběžné - žádný společný bod,

c) totožné - ∞-mnoho společných bodů.

308 - Vzájemná poloha dvou rovin

Zadání Určete vzájemnou polohu dvou rovin:

a) $\alpha : x - y + 2z + 2 = 0, \qquad \beta : x - 5y + 4z - 3 = 0,$

b) $\rho_1 : \begin{array}{rcrcrcr} x & = & -2 & + & 3s & - & 4r \\ y & = & -3 & + & 2s & + & r \\ z & = & 1 & - & s & - & 2r \end{array}, \qquad \rho_2 : -3x + 10y + 11z - 2 = 0.$

Řešení Video **Teorie:** 97

Tahák

Určete společné body rovin, tj. sestavte si a řešte příslušnou soustavu lineárních rovnic.
Pak:
a) různoběžné - jedna společná přímka (průsečnice),
b) rovnoběžné - žádný společný bod,
c) totožné - ∞-mnoho společných bodů.

Matematika I: Aplikované úlohy

Zuzana Morávková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

310 - Pálkař

Zadání Pálkař odpálí míč pod úhlem $\alpha = 30^\circ$ a rychlostí 20 m/s.

Hráč se nachází v poli 22 m od pálkaře (ve směru letu míče) a běží rychlostí 10 ms^{-1}. Stihne chytit míč?

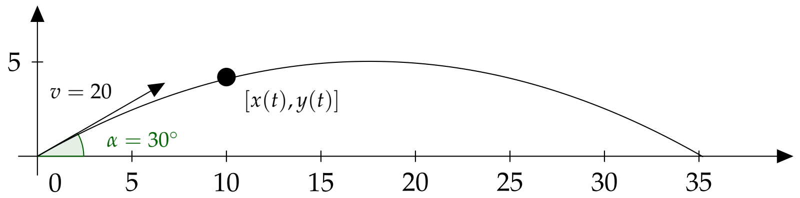
Určete čas a vzdálenost dopadu pro obecnou rychost v a úhel α.
(zanedbáme odpor vzduchu)

Řešení

Šikmý vrh je dán parametrickými rovnicemi:

$$x(t) = v\,t\,\cos(\alpha)$$
$$y(t) = v\,t\,\sin(\alpha) - \frac{1}{2} g\,t^2 \qquad (*)$$

kde t je čas nabývající hodnot od 0 do doby dopadu na zem, $g = 9.81\,m\,s^{-2}$ je konstanta, v je počáteční rychlost a α je elevační úhel. Míč má v každém čase t polohu $[x(t), y(t)]$.



Spočítáme čas dopadu na zem, při kterém má míč y-ovou souřadnici rovnu 0. Do rovnice $(*)$ dosadíme za $y = 0$, $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ a $g = 9.81$:

$$0 = 10t - \frac{9.81}{2} t^2$$

Rovnice má dvě řešení, počáteční čas $t = 0$ a čas dopadu na zem:

$$t_{\text{dopad}} = \frac{20}{9.81} \doteq 2.0387\,\text{s}$$

Vzdálenost dopadu je

$$x(t_{\text{dopad}}) = v\,t_{\text{dopad}}\,\cos(\alpha) = 20\,\frac{20}{9.81}\,\cos(30^\circ) \doteq 35.32\text{ m}$$

Hráč v poli je od místa dopadu vzdálen 35.32-22=13.32 m. Tuto vzdálenost uběhne za:

$$t = \frac{13.32}{10} = 1.332\,\text{s}\,.$$

Spočítáme čas a vzdálenost dopadu na zem pro obecné hodnoty v a α. Do rovnice $(*)$ dosadíme za $y = 0$ a $g = 9.81$:

$$0 = v\,t\,\sin(\alpha) - \frac{1}{2} 9.81\,t^2$$

$$t_{\text{dopad}} = \frac{2}{9.81}\,v \sin(\alpha)$$
$$x(t_{\text{dopad}}) = \frac{2}{9.81}\,v^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

311 - Fotbalista

Zadání Fotbalista kope na bránu ze vzdálenosti 11 m a chce trefit těsně pod horní břevno (2 m). Rychlost míče při výkopu je 20 m/s.

Pod jakým úhlem musí vystřelit, aby se trefil?

(zanebnáme odpor vzduchu)

Řešení

Do rovnic popisující šikmý vrh dosadíme souřadnice cíle $x = 11$, $y = 2$ a $v = 20$, $g = 9.81$:

$$\begin{aligned} x &= v\,t\,\cos(\alpha) \\ y &= v\,t\,\sin(\alpha) - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 11 &= 20t\,\cos(\alpha) \\ 2 &= 20t\,\sin(\alpha) - \frac{1}{2}9.81\,t^2 \end{aligned}\right\} (*)$$

A hledáme $t \in \langle 0, t_{dopad} \rangle$ a $\alpha \in (0°, 90°)$, jako řešení soustavy rovnic $(*)$. Z první rovnice vyjádříme $\sin(\alpha)$ a z druhé $\cos(\alpha)$:

$$\begin{aligned} 11 = 20t\,\cos(\alpha) \quad &\Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{11}{20t} \\ 2 = 20t\,\sin(\alpha) - \frac{1}{2}9.81\,t^2 \quad &\Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{4 + 9.81t^2}{40t} \end{aligned}$$

Dosadíme do známého vztahu $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$:

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \\ \left(\frac{4 + 9.81t^2}{40t}\right)^2 + \left(\frac{11}{20t}\right)^2 &= 1 \\ \left(4 + 9.81t^2\right)^2 + 4 \cdot 11^2 &= 40^2 t^2 \\ 96.2361t^4 - 1521.52t^2 + 500 &= 0 \end{aligned}$$

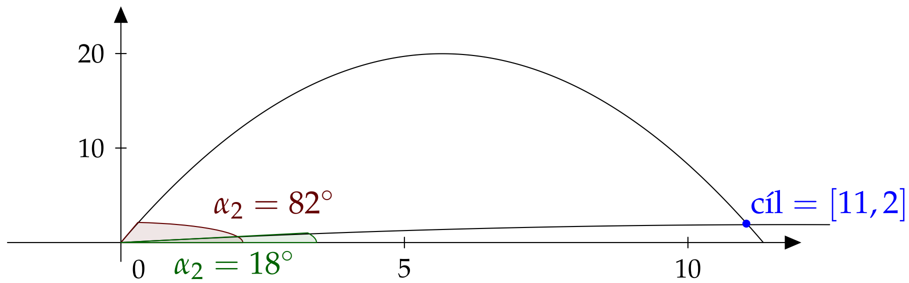
Zavedeme substituci $z = t^2$ a rovnici vyřešíme.

$$96.2361z^2 - 1521.52z + 500 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} z_1 &= 15.4745 \;\Rightarrow\; t_1 = \sqrt{z_1} = 3.9338 \\ z_1 &= 0.3357 \;\Rightarrow\; t_2 = \sqrt{z_2} = 0.5794 \end{aligned}$$

Ze prvního vztahu $(*)$ vyjádříme $\alpha = \arccos\left(\frac{11}{20\,t}\right)$ a spočítáme hledané úhly:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arccos\left(\frac{11}{20\,t_1}\right) = 1.43\,\text{rad} \doteq 82° \\ \alpha_2 &= \arccos\left(\frac{11}{20\,t_2}\right) = 0.32 = \,\text{rad} \doteq 18° \end{aligned}$$

Fotbalista se trefí pro hodnoty úhlu $\alpha_1 = 82°$ (za 3.9338 s) nebo $\alpha_2 = 18°$ (za 0.5794 s).



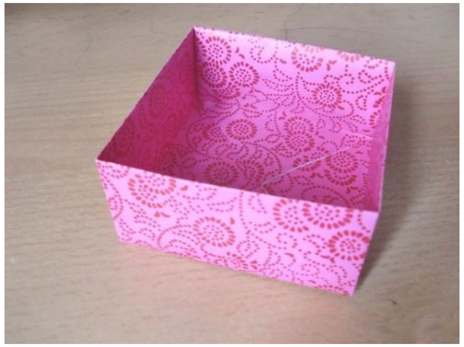
312 - Krabice

Zadání Z desky o rozměrech 80 cm a 50 cm vyřízneme v rozích čtverce a složíme krabici. Určete délku strany čtverce tak, aby objem složené krabice byl co největší?

Lze do výsledné krabice nasypat 10 litrů?

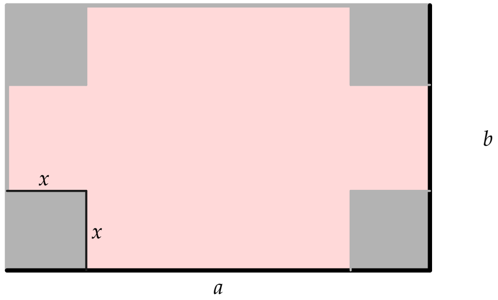
Vyřešte úlohu pro obecné rozměry desky a, b.

Bude-li mít deska čtvercové rozměry, bude mít krabice tvar krychle?



Řešení

Zakreslíme si desku s výřezy:



Výška krabice je x, rozměry podstavy jsou $(80 - 2x)$ a $(50 - 2x)$. Pak objem krabice je dán vztahem:

$$V(x) = (80 - 2x)(50 - 2x)x\,.$$

Hledáme maximum funkce $V(x)$ na intervalu $\langle 0; 25\rangle$. Najdeme stacionární bod funkce $V(x)$:

$$V'(x) = 0$$

$$12x^2 - 520x + 4000 = 0$$

Rovnice má řešení $x = 10$. Výsledná krabice má rozměry podstavy 60 cm a 30 cm a výšku 10 cm. Objem krabice bude:

$$V(10) = (80 - 2 \cdot 10)(50 - 2 \cdot 10)10 = 18000 \text{ cm}^2 = 18 \text{ litrů}.$$

Řešení pro obecné rozměry je:

$$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$$

Bude-li deska čtvercem, pak $a = b$ a řešení je $x = \frac{a}{6}$. Krabice má rozměry:

$$\frac{2}{3}a \times \frac{2}{3}a \times \frac{1}{6}a$$

a objem má hodnotu:

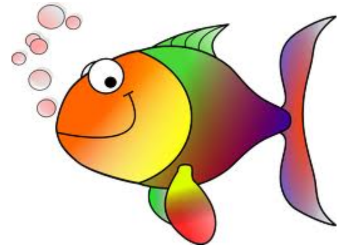
$$V = \frac{2}{27}a^3\,.$$

313 - Drát na výrobu sítí

Zadání Rybář má drát dlouhý 30 metrů. Potřebuje jej rozdělit na dvě části, z jedné vyrobí kostru na kruhovou síť a z druhé části vyrobí kostu na čtvercovou síť.

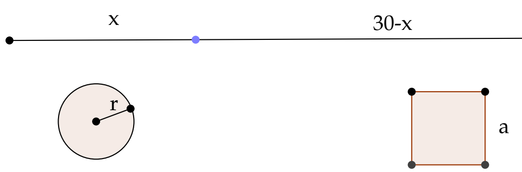
V jakém poměru drát rozdělit, aby součet obsahů obou sítí byl co nejmenší?

Kolik bude obsah kruhové sítě?



Řešení

Drát rozdělíme na dvě části.



Část pro obvod kruhu označíme x, pak část pro čtverec je $30 - x$. Pro obvody platí vztah:

$$o_{\text{kruh}}: \quad 2\pi r = x \quad \Rightarrow \quad r = \frac{x}{2\pi}$$

$$o_{\text{čtverec}}: \quad 4a = 30 - x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{30-x}{4}$$

Hledáme hodnotu x tak, aby součet obsahů kruhu a čtverce byl co největší.
Součet obsahů se spočítá:

$$S = \pi r^2 + a^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{30-x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(30-x)^2}{16}$$

Hodnota součtu obsahů S závisí na hodnotě x a proto je $S(x)$ funkcí proměnné x:

$$S(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(30-x)^2}{16}$$

Najdeme stacionární bod funkce $S(x)$:

$$S'(x) = 0$$

$$\frac{2x}{4\pi} + \frac{-2(30-x)}{16} = 0$$

$$\frac{4x - \pi(30-x)}{8\pi} = 0$$

$$x = \frac{30\pi}{4+\pi} \doteq 13.2$$

Drát rozdělíme na část o délce 13.2 (pro kruh) a 16.8 (pro čtverec). Spočítáme poměr částí drátu:

$$\frac{x}{30-x} = \frac{\frac{30\pi}{4+\pi}}{30 - \frac{30\pi}{4+\pi}} = \frac{\pi}{4}$$

$$S_{\text{kruh}} = \frac{x^2}{4\pi} = \pi\left(\frac{30\pi}{4+\pi}\right)^2 = 547.39$$

314 - Křižování lodí I

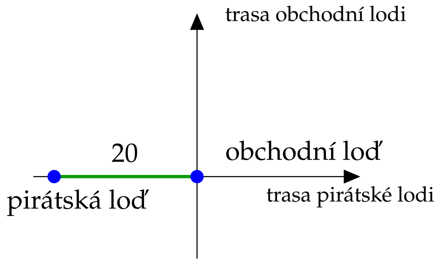
Zadání Trasy dvou lodí se protínají v pravém úhlu. Když je obchodní loď v průsečíku tras, tak je pirátská ještě 20 km vzdálená od onoho průsečíku. Obchodní loď jede rychlostí 30 km/h a pirátská 50 km/h.

Jaká je minimální vzdálenost, kterou od sebe lodi budou mít?

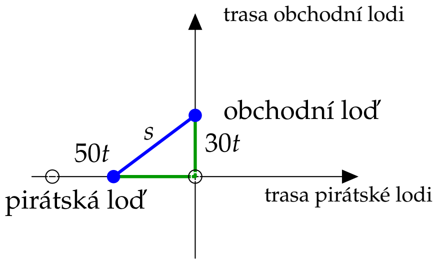
Jaká musí být rychlost pirátské lodi, aby mohli piráti zaútočit dělem s dostřelem 6 km?

Řešení

Nakreslíme si polohu lodí podle popisu v zadání, tedy pro čas $t = 0$ (viz obr.1). Za čas t ujede obchodní loď trasu o délce $30t$ a pirátská loď trasu o délce $50t$. Na druhé obrázku je zobrazena poloha lodí v čase t.



obr. 1: Poloha lodí v čase $t = 0$



obr. 2: Poloha lodí v čase t

Vzdálenost lodí je v čase t vyjádřená vztahem: $s^2 = (30t)^2 + (20 - 50t)^2$. Vyjádříme vzdálenost jako funkci proměnné t:

$$s(t) = \sqrt{(30t)^2 + (20 - 50t)^2}$$

Nejmenší vzdálenost najdeme jako minimum této funkce:

$$s'(t) = 0$$

$$\frac{2 \cdot 30^2 t - 100(20 - 50t)}{2\sqrt{(30t)^2 + (20 - 50t)^2}} = 0$$

$$2 \cdot 30^2 t - 100(20 - 50t) = 0$$

$$t = \frac{5}{17} \doteq 0.29 \text{ hod}$$

$$s(0.29) = 10.289 \text{ km}$$

Pro obecnou rychlost pirátské lodi vzdálenost lodi vyjádřena funkcí:

$$s(t) = \sqrt{(30t)^2 + (20 - v\,t)^2} \qquad (*)$$

Nejmenší vzdálenost najdeme jako minimum této funkce:

$$s'(t) = 0$$

$$\frac{2 \cdot 30^2 t - 2v(20 - v\,t)}{2\sqrt{(30t)^2 + (20 - v\,t)^2}} = 0$$

$$t = \frac{20v}{30^2 + v^2}$$

Lodě budou k sobě nejblíž v čase $t_{\min} = \frac{20v}{30^2+v^2}$. Dosadíme tento čas do vztahu $(*)$ a zjistíme potřebnou rychlost lodi, při které bude nejmenší vzdálenost 6 km.

$$s(t_{\min}) = \frac{600}{v^2 + 900} \quad \Rightarrow \quad 6 = \frac{600}{v^2 + 900}$$

$$v = 95.39 \text{ km/h}$$

315 - Křižování lodí II

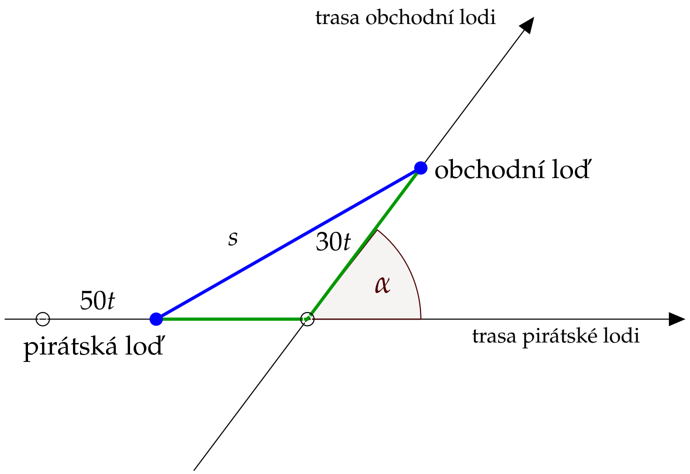
Zadání Trasy dvou lodí se protínají v úhlu α. Když je obchodní loď v průsečíku tras, tak je pirátská ještě 20 km vzdálená od onoho průsečíku. Obchodní loď jede rychlostí 30 km/h a pirátská 50 km/h.

Jaká je minimální vzdálenost, kterou od sebe lodi budou mít?

Spočítejte úlohu pro $\alpha = 60^\circ$ a $\alpha = 45^\circ$.

Řešení

Za čas t ujede obchodní loď trasu o délce $30t$ a pirátská loď trasu o délce $50t$. Na obrázku je zobrazena poloha lodí v čase t.



Vzdálenost lodí je v čase t vyjádřená pomocí kosinové věty vztahem:

$$s^2 = (30t)^2 + (20-50t)^2 - 2(30t)(20-50t)\cos(\pi-\alpha)$$

Vyjádříme vzdálenost jako funkci proměnné t:

$$s(t) = \sqrt{(30t)^2 + (20-50t)^2 - 2(30t)(20-50t)\cos(\pi-\alpha)}$$

Nejmenší vzdálenost najdeme jako minimum této funkce:

$$\begin{aligned} s'(t) &= 0 \\ \frac{2\cdot 30^2 t - 100(20-50t) - 2\cos(\pi-\alpha)(30(20-50t)+(30t)(-50))}{2\sqrt{(30t)^2+(20-50t)^2-2(30t)(20-50t)\cos(\pi-\alpha)}} &= 0 \\ 2\cdot 30^2 t - 100(20-50t) - 2\cos(\pi-\alpha)(30(20-50t)+(30t)(-50)) &= 0 \\ 18t - 20 + 50t - 12\cos(\pi-\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Řešení rovnice je:

$$t = \frac{5+3\cos(\pi-\alpha)}{17}$$

Spočítáme nejmenší vzdálenost a čas, ve kterém ji bude dosaženo, pro zadané hodnoty úhlu α:

$$\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{5+3\cos(\frac{2\pi}{3})}{17} \doteq 0.2059\,\text{hod}$$
$$s(0.2059) = 13.8673\,\text{km}$$

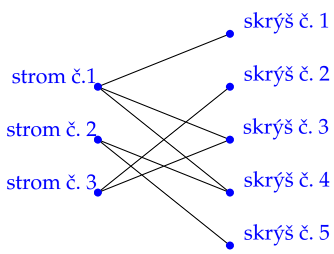
$$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{5+3\cos(\frac{3\pi}{4})}{17} \doteq 0.1693\,\text{hod}$$
$$s(0.1693) = 15.5461\,\text{km}$$

316 - Přeprava ořechů

Zadání Veverka potřebuje od jednotlivých stromů roznést ořechy do svých skrýší. Množství ořechů, které se urodí u jednotlivých stromů a kapacity skrýší jsou uvedené v tabulkách. Možné cesty jsou zobrazeny v grafu.

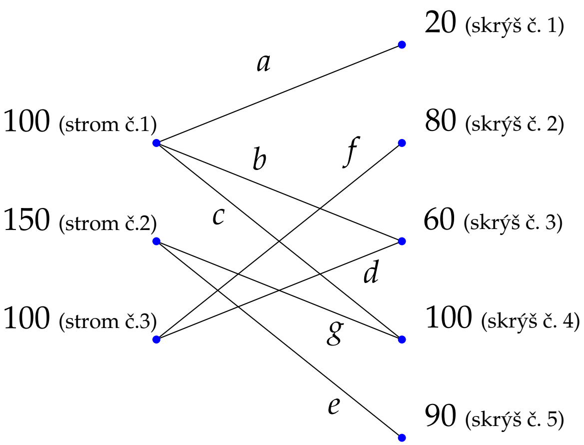
strom č.	1	2	3
úroda	100	150	100

skrýš č.	1	2	3	4	5
má kapacitu	20	80	60	100	90



Řešení

Veverka potřebuje od jednotlivých stromů roznést ořechy do svých skrýší. Jednotlivé cesty označíme a, b, c, d, e, f, g



Součet počtu ořechů, které jsou odneseny od prvního stromu, musí být roven úrodě tohoto stromu. Tedy musí platit $a + b + c = 100$. Obdobně sestavíme rovnice i k ostatním stromům. Další rovnice dostaneme z úvahy, že součet počtu ořechů, přinesených do skrýše, musí být roven kapacitě této skrýše.

Pak dostaneme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 100\\ e+g &= 150\\ d+f &= 100\\ a &= 20\\ f &= 80\\ b+d &= 60\\ c+g &= 100\\ e &= 90 \end{aligned}$$

Soustavu lineárních rovnic zapíšeme maticově:

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\\ 150\\ 100\\ 20\\ 80\\ 60\\ 100\\ 90 \end{pmatrix}$$

Řešení úlohy je: $a = 20$, $b = 40$, $c = 40$, $d = 20$, $e = 90$, $f = 80$, $g = 60$.

317 - Tajné zprávy I

Zadání Kryptografie neboli šifrování je nauka o metodách utajování smyslu zpráv převodem do podoby, která je čitelná jen se speciální znalostí. Slovo kryptografie pochází z řečtiny, *kryptós* je skrytý a *gráphein* znamená psát. Jednou z jeho metod je i maticové šifrování.

Zašifrujte tajnou zprávu: P I R A T I O D J E L I
Pomocí kódovací matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení Písmena v abecedě očíslujeme:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Před šifrováním se znaky převedou na čísla ($A \to 1,\ B \to 2, \ldots,\ Z \to 26$, mezera $\to 27$).

P	I	R	A	T	I		O	D	J	E	L	I
16	9	18	1	20	9	27	15	4	10	5	12	9

Zašifrovaná zpráva se zapíše po posloupcích do matice (počet řádků matice je určen řádem kódovací matice A).
Případný chybějící znak na konci se doplní mezerou:

$$\begin{pmatrix} 16 & 18 & 20 & 27 & 4 & 5 & 9 \\ 9 & 1 & 9 & 15 & 10 & 12 & 27 \end{pmatrix}$$

A vynásobí se zleva maticí A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 18 & 20 & 27 & 4 & 5 & 9 \\ 9 & 1 & 9 & 15 & 10 & 12 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 20 & 38 & 57 & 24 & 29 & 63 \\ 27 & 3 & 27 & 45 & 30 & 36 & 81 \end{pmatrix}$$

Čísla z matice přepíšeme po sloupcích do vzkazu, který může být poslán veřejně, neboť bez znalosti kódovací matice A je nezjistilený:

34	27	20	3	38	27	57	45	24	30	29	36	63	81

318 - Tajné zprávy II

Zadání Rozluštěte tajné zprávy:

zpráva č. 1: 38 36 41 7 69 -7 42 1 81 31

zpráva č. 2: 43 30 -2 46 25 21 50 37 -36 35 22 -26 20 11 2

Zprávy byly zašifrovany pomocí kódovacích matic:

$$\text{zpráva č. 1: } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{zpráva č. 2: } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Řešení Spočítáme inverzní matici:

$$A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

A pomocí této matice dešiftuje vzkaz:

$$\frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 & 41 & 69 & 42 & 81 \\ 36 & 7 & -7 & 1 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 4 & 13 \\ 4 & 13 & 27 & 15 & 21 \end{pmatrix}$$

Vzkaz po sloupcí přečteme:

10	4	5	13	5	27	4	15	13	21
J	D	E	M	E		D	O	M	U

Rozšifrujeme druhou zprávu:

$$\frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 43 & 46 & 50 & 35 & 20 \\ 30 & 25 & 37 & 22 & 11 \\ -2 & 21 & -36 & -26 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 21 & 13 & 13 & 9 \\ 9 & 10 & 5 & 1 & 3 \\ 12 & 5 & 27 & 20 & 5 \end{pmatrix}$$

A zpráva je: MILUJEME MATICE

319 - Plachta nad bazén

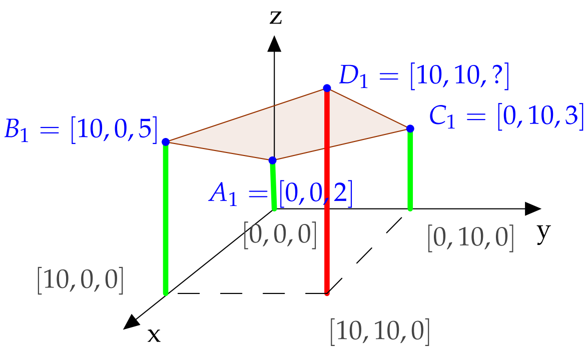
Zadání V rozích bazénu o rozměrech $10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m}$ umístíme tyče o délkách $2, 3, 5$ m. Na konce tyčí připevníme plachtu.

Jaká bude délka tyče ve čtvrtém rohu, chceme-li aby se plachta neprohýbala?

Kolik existuje možností rozmístění tyčí? Při které z nich bude potřeba nejkratší tyč.

Řešení

Tyče umístíme tak jak je zobrazeno na obrázku:



Hledáme z-ovou souřadnici bodu $[10, 10, ?]$. Body na koncích tyčí určují rovinu, ta je určena body $A_1 = [0, 0, 2]$, $B_1 = [10, 0, 5]$, $C_1 = [0, 10, 3]$. Určíme rovnici této roviny. Její směrové vektory jsou $B_1 - A_1 = (10, 0, 3)$ a $C_1 - A_1 = (0, 10, 1)$. Parametrické vyjádření roviny je:

$$\begin{aligned} x &= 10t \\ y &= 10s \\ z &= 2 + 3t + s \quad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Hledáme z-ovou souřadnici bodu $[10, 10, ?]$.

$$\begin{aligned} x &= 10t & \Rightarrow \quad & 10 = 10t & \Rightarrow \quad & t = 1 \\ y &= 10s & \Rightarrow \quad & 10 = 10s & \Rightarrow \quad & s = 1 \\ z &= 2 + 3t + s & \Rightarrow \quad & z = 2 + 3 + 1 & \Rightarrow \quad & z = 6 \end{aligned}$$

Hledaný bod má souřadnice $D_1 = [10, 10, 6]$, tedy délka čtvrté tyče je 6 m.
Existuje i jiná možnost, jak rozmístit tyče. Bude v protilehlém rohu ke čtvrté tyči například tyč o délce 3 m, pak je rovina určena body $A_2 = [0, 0, 3]$, $B_2 = [10, 0, 5]$, $C_2 = [0, 10, 2]$. A směrové vektory roviny jsou $B_2 - A_2 = (10, 0, 3)$ a $C_2 - A_2 = (0, 10, -1)$. Parametrické vyjádření roviny je:

$$\begin{aligned} x &= 10t \\ y &= 10s \\ z &= 3 + 3t - s \quad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Hledaný bod má souřadnice $D_2 = [10, 10, 5]$, tedy délka čtvrté tyče je 5 m.
Bude-li ti tyč o délce 5 m, pak je rovina určena body $A_2 = [0, 0, 5]$, $B_2 = [10, 0, 3]$, $C_3 = [0, 10, 2]$. Hledaný bod má souřadnice $D_3 = [10, 10, 0]$, tedy žádný tyč není potřeba aplachtu lze připevnit na zem.

Matematika I: Testy

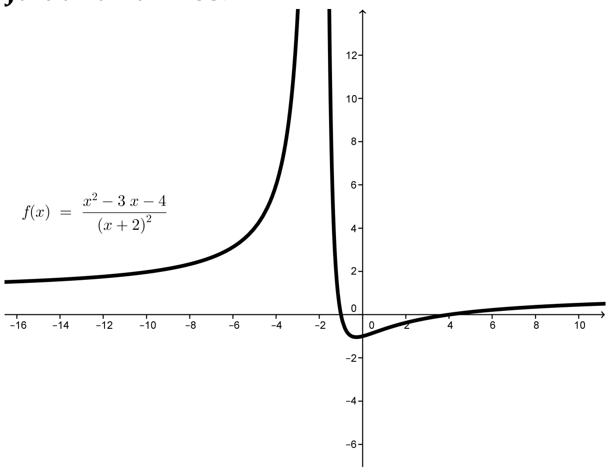
Radka Hamříková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

321 - Test 1

1. **Ja dána funkce:**



Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla, protože $(x+2)^2 \geq 0$ vždy.

(b) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla.

(c) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla bez -2.

(d) Funkce je sudá.

(e) Funkce není ani sudá ani lichá.

(f) Funkce není konvexní.

(g) Funkce není konkávní.

(h) Funkce nemá žádnou asymptotu.

(i) Funkce má jednu asymptotu.

(j) Funkce má dvě asymptoty.

(k) Funkce má jedno lokální minimum.

(l) Funkce má dvě lokální minima.

(m) Funkce nemá lokální maximum.

2. **Je dána matice:** $\begin{pmatrix} X & Y & Z & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & Z \end{pmatrix}$.

Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Matice je čtvercová.

(b) Matice není čtvercová, je typu 3×4, protože druhý a třetí řádek jsou stejné.

(c) Můžeme vypočítat její determinant.

(d) Determinant vyjde 0.

(e) Nemůžeme vypočítat její determinant.

(f) Hodnost matice je rovna 4.

(g) Hodnost matice je rovna 3.

(h) Hodnost matice je rovna 2.

3. **Je dána rovnice** $4x + 3y - 6 = 0$ v E_3. **Zakroužkujte správná tvrzení.**

(a) Jedná se o rovnici přímky.

(b) Je to rovnice roviny.

(c) Tato přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou z.

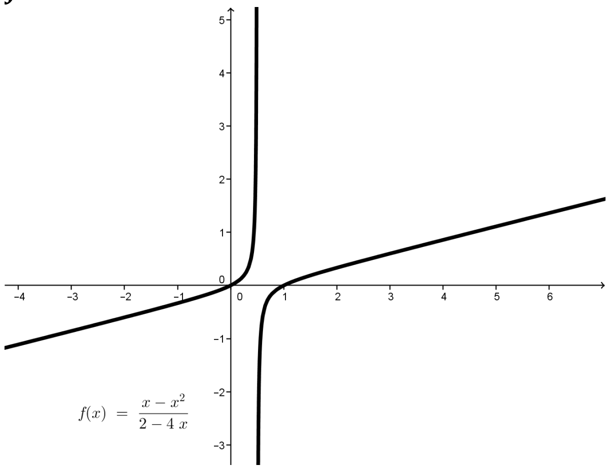
(d) Tato rovina je rovnoběžná se souřadnicovou osou z

(e) Normálový vektor má souřadnice $(4, 3, -6)$.

(f) Normálový vektor má souřadnice $(4, 3, 0)$.

322 - Test 2

1. **Ja dána funkce:**



Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla, protože $2 - 4x \geq$ vždy.

(b) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla bez $-\frac{1}{2}$.

(c) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla bez $\frac{1}{2}$.

(d) Funkce je sudá.

(e) Funkce není ani sudá ani lichá.

(f) Funkce není konvexní.

(g) Funkce je konkávní na intervalu $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(h) Funkce nemá žádnou asymptotu.

(i) Funkce má jednu asymptotu.

(j) Funkce má dvě asymptoty.

(k) Funkce má jedno lokální minimum.

(l) Funkce má dvě lokální minima.

(m) Funkce nemá lokální maximum.

2. **Je dána matice** $\begin{pmatrix} X & Y & Z & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & Z \end{pmatrix}$.

Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Matice je čtvercová.

(b) Matice není čtvercová, je typu 3×4, protože druhý a třetí řádek jsou stejné.

(c) Můžeme vypočítat její determinant.

(d) Determinant vyjde 0.

(e) Nemůžeme vypočítat její determinant.

(f) Hodnost matice je rovna 4.

(g) Hodnost matice je rovna 3.

(h) Hodnost matice je rovna 2.

3. **Je dána rovnice** $4x + 3z - 6 = 0$ v E_3. **Zakroužkujte správná tvrzení.**

(a) Jedná se o rovnici přímky.

(b) Je to rovnice roviny.

(c) Tato přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou y.

(d) Tato rovina je rovnoběžná se souřadnicovou osou y

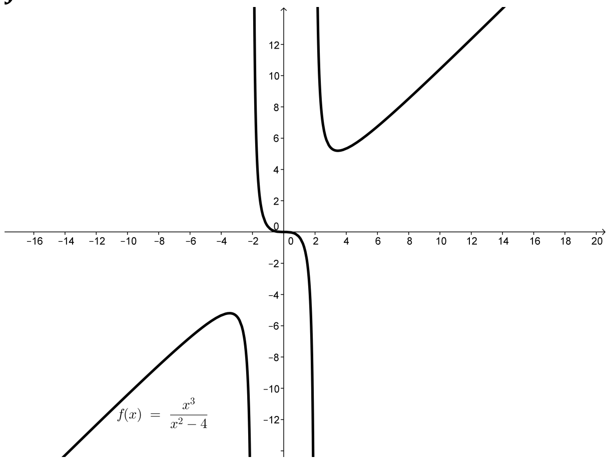
(e) Normálový vektor má souřadnice $(4, 3, -6)$.

(f) Normálový vektor má souřadnice $(4, 3, 0)$.

(g) Normálový vektor má souřadnice $(4, 0, 3)$.

323 - Test 3

1. **Ja dána funkce:**



Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla,
protože $x^2 - 4 \geq 0$ vždy.

(b) Definiční obor funkce jsou všechna kladná čísla.

(c) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla bez ± 2.

(d) Funkce je lichá.

(e) Funkce není ani sudá ani lichá.

(f) Funkce je konvexní na intervalu $(-2, 2)$.

(g) Funkce je konkávní na intervalu $(-2, 2)$.

(h) Funkce má tři asymptoty.

(i) Funkce má dvě asymptoty.

(j) Funkce má jednu asymptotu.

(k) Funkce má jedno lokální minimum.

(l) Funkce má dvě lokální minima.

(m) Funkce nemá lokální maximum.

2. **Je dána matice** $\begin{pmatrix} X & Y & Z & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & Z \\ 0 & X & X & Z \end{pmatrix}$.

Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Matice je čtvercová.

(b) Matice není čtvercová, je typu 3×4, protože třetí a čtvrtý řádek jsou stejné.

(c) Můžeme vypočítat její determinant.

(d) Determinant vyjde 0.

(e) Nemůžeme vypočítat její determinant.

(f) Hodnost matice je rovna 4.

(g) Hodnost matice je rovna 3.

(h) Hodnost matice je rovna 2.

3. **Je dána rovnice** $4x + 5y - 6z = 0$ v E_3.
Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Jedná se o rovnici přímky.

(b) Je to rovnice roviny.

(c) Tato přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou x.

(d) Tato rovina je rovnoběžná se souřadnicovou osou y.

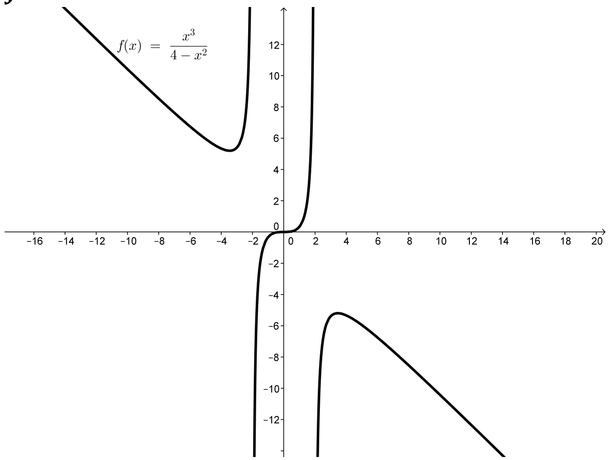
(e) Tato rovina prochází počátkem soustavy souřadnic.

(f) Normálový vektor má souřadnice $(4, 5, -6)$.

(g) Normálový vektor má souřadnice $(4, 3, 0)$.

324 - Test 4

1. **Ja dána funkce:**



Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla, protože $4 - x^2 \geq 0$ vždy.

(b) Definiční obor funkce jsou všechna kladná čísla.

(c) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla bez ± 2.

(d) Funkce je lichá.

(e) Funkce není ani sudá ani lichá.

(f) Funkce je konvexní na intervalu $(-2, 2)$.

(g) Funkce je konkávní na intervalu $(-2, 2)$.

(h) Funkce má tři asymptoty.

(i) Funkce má dvě asymptoty.

(j) Funkce má jednu asymptotu.

(k) Funkce má jedno lokální minimum.

(l) Funkce má dvě lokální minima.

(m) Funkce nemá lokální maximum.

2. **Je dána matice** $\begin{pmatrix} X & Y & Z & X \\ 0 & X & X & Z \\ 0 & X & X & Z \\ 0 & X & X & Z \end{pmatrix}$.

Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Matice je čtvercová.

(b) Matice není čtvercová, je typu 2×4, protože druhý, třetí a čtvrtý řádek jsou stejné.

(c) Můžeme vypočítat její determinant.

(d) Determinant vyjde 0.

(e) Nemůžeme vypočítat její determinant.

(f) Hodnost matice je rovna 4.

(g) Hodnost matice je rovna 3.

(h) Hodnost matice je rovna 2.

3. **Je dána rovnice** $4x + 6z = 0$ v E_3.
Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Jedná se o rovnici přímky.

(b) Je to rovnice roviny.

(c) Tato přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou x.

(d) Tato rovina je rovnoběžná se souřadnicovou osou y.

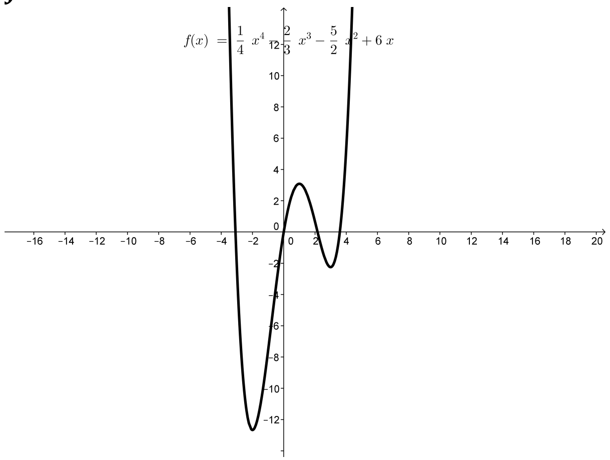
(e) Tato rovina prochází počátkem soustavy souřadnic.

(f) Normálový vektor má souřadnice $(4, 0, 6)$.

(g) Normálový vektor má souřadnice $(4, 6, 0)$.

325 - Test 5

1. **Ja dána funkce:**



Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla.

(b) Definiční obor funkce jsou všechna kladná čísla.

(c) Funkce nemá bod nespojitosti.

(d) Funkce je lichá, protože graf prochází počátkem soustavy souřadnic.

(e) Funkce není ani sudá ani lichá.

(f) Funkce je konvexní na intervalu $(0, 2)$.

(g) Funkce je konkávní na intervalu $(0, 2)$.

(h) Funkce má dvě lokální maxima a jedno lokální minimum.

(i) Funkce má dvě lokální minima a jedno lokální maximum.

(j) Funkce má jednu asymptotu se směrnicí.

(k) Funkce má dvě asymptoty se směrnicí.

(l) Funkce nemá asymptoty.

2. **Je dána matice** $\begin{pmatrix} X & Y & Z & X \\ 0 & Y & X & X \\ 0 & X & X & Z \\ 0 & X & X & Z \end{pmatrix}$.

Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Matice je čtvercová.

(b) Matice není čtvercová, je typu 2×4, protože třetí a čtvrtý řádek jsou stejné.

(c) Můžeme vypočítat její determinant.

(d) Determinant vyjde 0.

(e) Nemůžeme vypočítat její determinant.

(f) Hodnost matice je rovna 4.

(g) Hodnost matice je rovna 3.

(h) Hodnost matice je rovna 2.

3. **Je dána rovnice** $4x + 6y - 2 = 0$ v E_3.
Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Jedná se o rovnici přímky.

(b) Je to rovnice roviny.

(c) Tato přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou x.

(d) Tato rovina je rovnoběžná se souřadnicovou osou z.

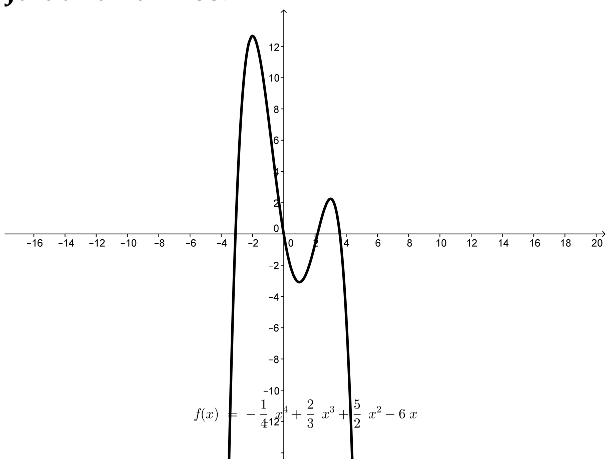
(e) Tato rovina prochází počátkem soustavy souřadnic.

(f) Normálový vektor má souřadnice $(4, 6, -2)$.

(g) Normálový vektor má souřadnice $(4, 6, 0)$.

326 - Test 6

1. **Ja dána funkce:**



Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla.

(b) Definiční obor funkce jsou všechna kladná čísla.

(c) Funkce nemá bod nespojitosti.

(d) Funkce je lichá, protože graf prochází počátkem soustavy souřadnic.

(e) Funkce není ani sudá ani lichá.

(f) Funkce je konvexní na intervalu $(0,2)$.

(g) Funkce je konkávní na intervalu $(0,2)$.

(h) Funkce má dvě lokální maxima a jedno lokální minimum.

(i) Funkce má dvě lokální minima a jedno lokální maximum.

(j) Funkce má jednu asymptotu se směrnicí.

(k) Funkce má dvě asymptoty se směrnicí.

(l) Funkce nemá asymptoty.

2. **Je dána matice** $\begin{pmatrix} X & Y & Z & X \\ 0 & Y & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & Z & Z & Z \end{pmatrix}$.

Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Matice je čtvercová.

(b) Matice není čtvercová, je typu 3×4, protože třetí a čtvrtý řádek jsou lineárně závislé.

(c) Můžeme vypočítat její determinant.

(d) Determinant vyjde 0.

(e) Nemůžeme vypočítat její determinant.

(f) Hodnost matice je rovna 4.

(g) Hodnost matice je rovna 3.

(h) Hodnost matice je rovna 2.

3. **Je dána rovnice** $x + y - 2 = 0$ v E_3.
Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Jedná se o rovnici přímky.

(b) Je to rovnice roviny.

(c) Tato přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou x.

(d) Tato rovina je rovnoběžná se souřadnicovou osou z.

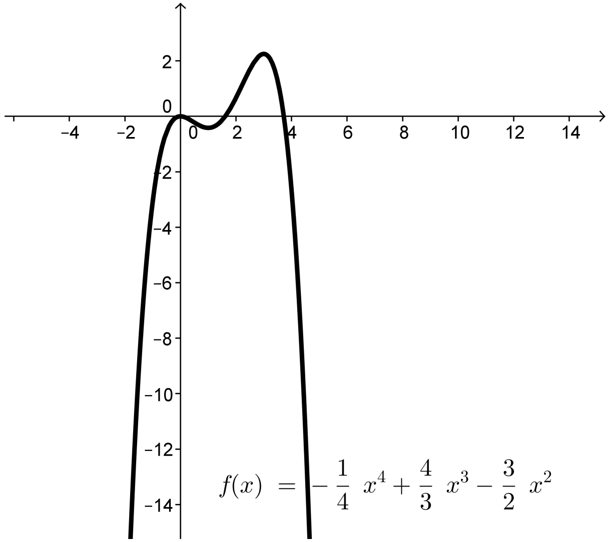
(e) Tato rovina prochází počátkem soustavy souřadnic.

(f) Normálový vektor má souřadnice $(1,1,-2)$.

(g) Normálový vektor má souřadnice $(1,1,0)$.

327 - Test 7

1. **Ja dána funkce:**



Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla.

(b) Definiční obor funkce jsou všechna kladná čísla.

(c) Funkce nemá bod nespojitosti.

(d) Funkce je lichá, protože graf prochází počátkem soustavy souřadnic.

(e) Funkce není ani sudá ani lichá.

(f) Funkce je konvexní na intervalu $(2, 4)$.

(g) Funkce je konkávní na intervalu $(2, 4)$.

(h) Funkce má dvě lokální maxima a jedno lokální minimum.

(i) Funkce má dvě lokální minima a jedno lokální maximum.

(j) Funkce má jednu asymptotu se směrnicí.

(k) Funkce má dvě asymptoty se směrnicí.

(l) Funkce nemá asymptoty.

2. **Je dána matice** $\begin{pmatrix} X & Y & Z & X \\ X & Y & Z & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & Z & Z \end{pmatrix}$.

Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Matice je čtvercová.

(b) Matice není čtvercová, je typu 3×4, protože první a druhý řádek jsou lineárně závislé.

(c) Můžeme vypočítat její determinant.

(d) Determinant vyjde 0.

(e) Nemůžeme vypočítat její determinant.

(f) Hodnost matice je rovna 4.

(g) Hodnost matice je rovna 3.

(h) Hodnost matice je rovna 2.

3. **Je dána rovnice** $x - y - 2 = 0$ v E_3. **Zakroužkujte správná tvrzení.**

(a) Jedná se o rovnici přímky.

(b) Je to rovnice roviny.

(c) Tato přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou x.

(d) Tato rovina je rovnoběžná se souřadnicovou osou z.

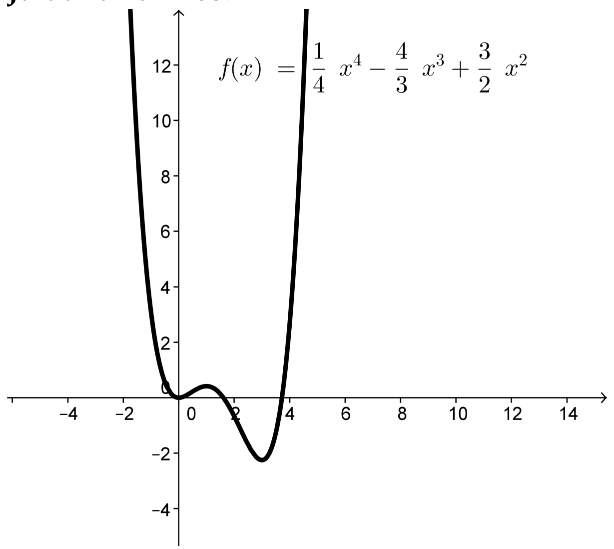
(e) Tato rovina prochází počátkem soustavy souřadnic.

(f) Normálový vektor má souřadnice $(1, -1, -2)$.

(g) Normálový vektor má souřadnice $(1, -1, 0)$.

328 - Test 8

1. **Ja dána funkce:**



Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla.

(b) Definiční obor funkce jsou všechna kladná čísla.

(c) Funkce nemá bod nespojitosti.

(d) Funkce je lichá, protože graf prochází počátkem soustavy souřadnic.

(e) Funkce není ani sudá ani lichá.

(f) Funkce je konvexní na intervalu $(2,4)$.

(g) Funkce je konkávní na intervalu $(2,4)$.

(h) Funkce má dvě lokální maxima a jedno lokální minimum.

(i) Funkce má dvě lokální minima a jedno lokální maximum.

(j) Funkce má jednu asymptotu se směrnicí.

(k) Funkce má dvě asymptoty se směrnicí.

(l) Funkce nemá asymptoty.

2. **Je dána matice** $\begin{pmatrix} X & Y & Z & X \\ -X & -Y & -Z & -X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & Z & Z \end{pmatrix}$.

Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Matice je čtvercová.

(b) Matice není čtvercová, je typu 3×4, protože první a druhý řádek jsou lineárně závislé.

(c) Můžeme vypočítat její determinant.

(d) Determinant vyjde 0.

(e) Nemůžeme vypočítat její determinant.

(f) Hodnost matice je rovna 4.

(g) Hodnost matice je rovna 3.

(h) Hodnost matice je rovna 2.

3. **Je dána rovnice** $x + z - 2 = 0$ v E_3. **Zakroužkujte správná tvrzení.**

(a) Jedná se o rovnici přímky.

(b) Je to rovnice roviny.

(c) Tato přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou x.

(d) Tato rovina je rovnoběžná se souřadnicovou osou y.

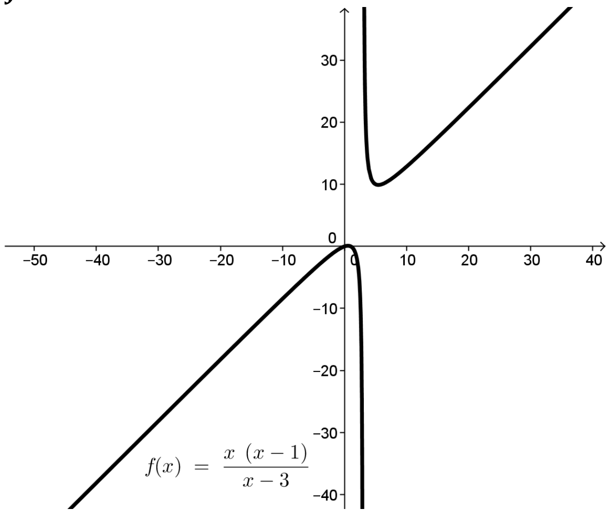
(e) Tato rovina prochází počátkem soustavy souřadnic.

(f) Normálový vektor má souřadnice $(1,1,-2)$.

(g) Normálový vektor má souřadnice $(1,0,1)$.

329 - Test 9

1. **Ja dána funkce:**



Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla.

(b) Definiční obor funkce jsou všechna kladná čísla.

(c) Funkce nemá bod nespojitosti.

(d) Funkce je lichá, protože graf prochází počátkem soustavy souřadnic.

(e) Funkce není ani sudá ani lichá.

(f) Funkce je konvexní na intervalu $(3, \infty)$.

(g) Funkce je konkávní na intervalu $(3, \infty)$.

(h) Funkce má jedno lokální minimum.

(i) Funkce má jedno lokální maximum.

(j) Funkce má jednu asymptotu se směrnicí.

(k) Funkce má dvě asymptoty se směrnicí.

(l) Funkce nemá asymptoty.

2. **Je dána matice** $\begin{pmatrix} X & Y & Z & X \\ -X & -Y & -Z & -X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & Y & Z \end{pmatrix}$.

Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Matice je čtvercová.

(b) Matice není čtvercová, je typu 3×4, protože první a druhý řádek jsou lineárně závislé.

(c) Můžeme vypočítat její determinant.

(d) Determinant vyjde 0.

(e) Nemůžeme vypočítat její determinant.

(f) Hodnost matice je rovna 4.

(g) Hodnost matice je rovna 3.

(h) Hodnost matice je rovna 2.

3. **Je dána rovnice** $y + z - 2 = 0$ v E_3. **Zakroužkujte správná tvrzení.**

(a) Jedná se o rovnici přímky.

(b) Je to rovnice roviny.

(c) Tato přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou x.

(d) Tato rovina je rovnoběžná se souřadnicovou osou x.

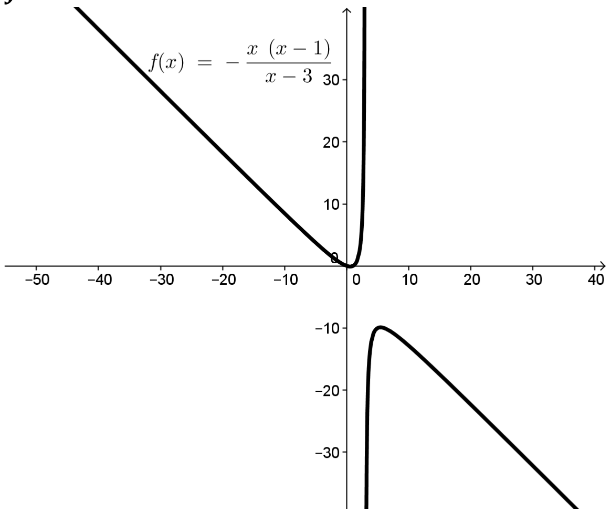
(e) Tato rovina prochází počátkem soustavy souřadnic.

(f) Normálový vektor má souřadnice $(1, 1, -2)$.

(g) Normálový vektor má souřadnice $(0, 1, 1)$.

330 - Test 10

1. **Ja dána funkce:**



Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Definiční obor funkce jsou všechna reálná čísla.

(b) Definiční obor funkce jsou všechna kladná čísla.

(c) Funkce nemá bod nespojitosti.

(d) Funkce je lichá, protože graf prochází počátkem soustavy souřadnic.

(e) Funkce není ani sudá ani lichá.

(f) Funkce je konvexní na intervalu $(3, \infty)$.

(g) Funkce je konkávní na intervalu $(3, \infty)$.

(h) Funkce má jedno lokální minimum.

(i) Funkce má jedno lokální maximum.

(j) Funkce má jednu asymptotu se směrnicí.

(k) Funkce má dvě asymptoty se směrnicí.

(l) Funkce nemá asymptoty.

2. **Je dána matice** $\begin{pmatrix} X & Y & Z & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & Y & Z \end{pmatrix}$.

Zakroužkujte správná tvrzení.

(a) Matice je čtvercová.

(b) Matice není čtvercová, je typu 3×4, protože druhý a třetí řádek jsou lineárně závislé.

(c) Můžeme vypočítat její determinant.

(d) Determinant vyjde 0.

(e) Nemůžeme vypočítat její determinant.

(f) Hodnost matice je rovna 4.

(g) Hodnost matice je rovna 3.

(h) Hodnost matice je rovna 2.

3. **Je dána rovnice** $x + y + z = 0$ v E_3. **Zakroužkujte správná tvrzení.**

(a) Jedná se o rovnici přímky.

(b) Je to rovnice roviny.

(c) Tato přímka je rovnoběžná se souřadnicovou osou x.

(d) Tato rovina je rovnoběžná se souřadnicovou osou x.

(e) Tato rovina prochází počátkem soustavy souřadnic.

(f) Normálový vektor má souřadnice $(1, 1, 0)$.

(g) Normálový vektor má souřadnice $(1, 1, 1)$.

Literatura

[1] AKSOY, Asuman G a Mohamed A KHAMSI. *A problem book in real analysis.* 1st ed. New York: Springer, c2010, 254 p. ISBN 978-1-4419-1295-4.

[2] BURDA, Pavel, Radim HAVELEK, Radoslava HRADECKÁ a Pavel KREML. *Matematika I.* 1. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006, 338 s. ISBN 80-248-1199-5.

[3] CALLAHAN, James. *Advanced calculus: a geometric view*. New York: Springer, c2010, xvi, 526 p. Undergraduate texts in mathematics. ISBN 14-419-7331-1, 978-1-4419-7331-3.

[4] *GeoGebra* [online]. 2013 [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: http://www.geogebra.org/cms/cs/

[5] GERGELITSOVÁ, Šárka. *Počítač ve výuce nejen geometrie: průvodce Geogebrou.* 1. vyd. Praha: Generation Europe, 2011, 247 s. ISBN 978-809-0497-436.

[6] *Gnuplot* [online]. 2013 [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: http://www.gnuplot.info/

[7] HOHENWARTER, Judith a Markus HOHENWARTER. *Introduction to GeoGebra* [online]. 2013 [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: http://www.geogebra.org/book/intro-en.pdf

[8] Manuály a návody k programu GeoGebra v českém jazyce. [online]. [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: http://wiki.geogebra.org/cs/

[9] Pracovní listy a studijní materiály do Matematiky II. [online]. [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: http://mdg.vsb.cz/wiki/index.php/MatematikaII

[10] REKTORYS, Karel. *Co je a k čemu je vyšší matematika*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2001, 156 s. ISBN 80-200-0883-7.

[11] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky I*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2009, xxxii, 720 s. ISBN 978-80-7196-180-21.

[12] *Studijní opory* [online]. [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: http://www.studopory.vsb.cz/

[13] VRBENSKÁ, Helena a Jana BĚLOHLÁVKOVÁ. *Základy matematiky pro bakaláře I*. 3. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009, 89 s. ISBN 978-80-248-2093-4.

[14] VRBENSKÁ, Helena a Jana BĚLOHLÁVKOVÁ. *Základy matematiky pro bakaláře II*. 3. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009, 103 s. ISBN 978-80-248-1957-0.