VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Pracovní sešit do matematiky
Funkce jedné proměnné

Mgr. Zuzana Morávková, Ph.D., RNDr. Alžběta Lampartová, Mgr. Monika Jahodová, Ph.D.

Ostrava 2024

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

NÁRODNÍ PLÁN OBNOVY

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Obsah

Předmluva

V tomto pracovním sešitě se budeme zabývat funkcemi, jejich grafy a vlastnostmi, limitou funkce a její spojitostí.
Studijní text je doplněn interaktivními prvky ve formě odkazu a QR kódu. V přehledu elementárních funkcí jsou těmito prvky odkazy na interaktivní pomůcky v GeoGebře, které Vám pomohou při studiu grafů funkcí.
V části řešených příkladů na definiční obory a limitu funkce jsou odkazy na řešené videopříklady, jejichž autorem je Mgr. Radka Hamříková, Ph.D.
Aktuální verzi tohoto pracovního sešitu najdete na:
https://mdg.vsb.cz/portal/m1/pracovnisesitMI_funkce.pdf

ISBN 978-80-248-4777-1 (on-line)

1 Funkce a její vlastnosti

1.1 Definice funkce

Definice funkce

Definice 1.1 **Funkce** f na množině $D_f \subset \mathbb{R}$ je zobrazení, které každému číslu $x \in D_f$ přiřadí právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$. Zapisujeme:

$$f : y = f(x)\,.$$

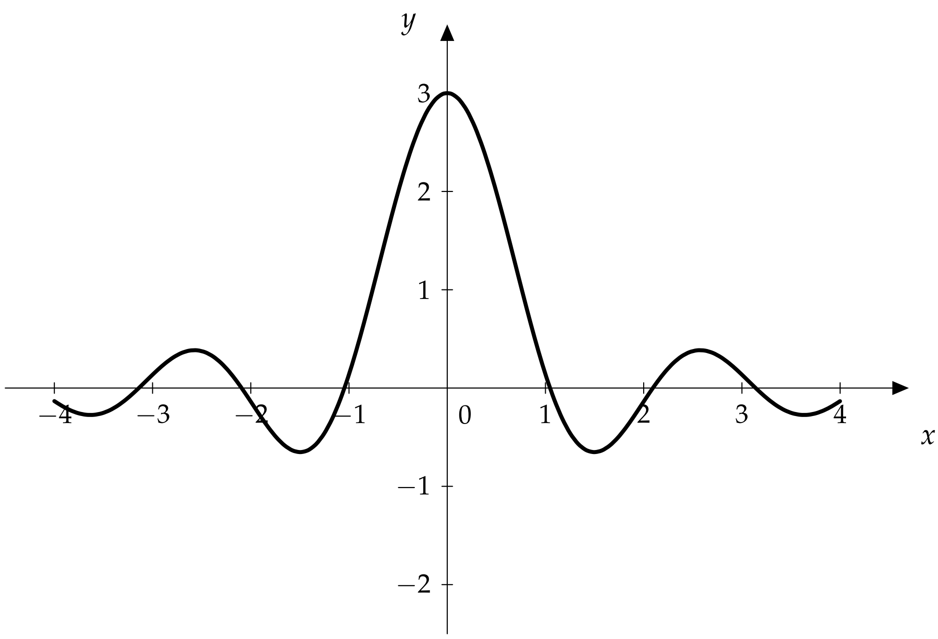
Poznámka

$y = f(x)$ je **funkční předpis** vyjadřující závislost y na x.

x je **nezávislá proměnná** (argument) z definičního oboru.

y je **závislá proměnná** z oboru hodnot, vypočítáme ji z funkčního předpisu.

Hodnotu funkce f v bodě x_0 označíme $f(x_0) = y_0$ a nazývá se **funkční hodnota funkce f v bodě** x_0.



Definiční obory

Definice 1.2 Množinu D_f nazveme **definiční obor funkce** f.

Obor hodnot funkce f je množina všech $y \in \mathbb{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno $x \in D_f$ tak, že $y = f(x)$ a značíme H_f.

Grafem funkce f ve zvolené soustavě souřadnic je množina všech bodů $[x, f(x)]$, kde $x \in D_f$.

1.2 Operace s funkcemi

Jsou dány funkce $g(x)$, $h(x)$ s definičními obory D_g, D_h.
Rovnost funkcí: $g = h$. Řekneme, že si jsou dvě funkce rovny, když platí:

$$g(x) = h(x) \text{ pro každé } x \in D_g \quad \text{a} \quad D_g = D_h$$

Součet funkcí: $f(x) = g(x) + h(x)$ a $D_f = D_g \cap D_h$
Součin funkcí: $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ a $D_f = D_g \cap D_h$
Podíl funkcí: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ a $D_f = D_g \cap (D_h \setminus \{x \in D_h : h(x) = 0\})$

1.3 Složená funkce

Definice 1.3 Funkce f je **složena** z funkcí h a g, když:

$$\text{pro každé } x \in D_f \quad \text{platí} \quad f(x) = h(g(x)),$$

kde $D_f = \{x \in D_g, g(x) \in D_h\}$.

Funkci g nazýváme **vnitřní** a h **vnější** funkcí.

Příklad 1. Napište předpis složené funkce $f:\ y = h\left(g(x)\right)$.

a) $h : y = \sqrt{x}$
$g : y = x + 2$

b) $h : y = 1 + \sin x$
$g : y = x^2 - 5$

c) $h : y = x^2 - 3x$
$g : y = \sin(x)$

a)	$h : y = \sqrt{x}$	$g : y = x + 2$	$h(g(x)) = \sqrt{x+2}$
b)	$h : y = 1 + \sin x$	$g : y = x^2 - 5$	$h(g(x)) = 1 + \sin(x^2 - 5)$
c)	$h : y = x^2 - 3x$	$g : y = \sin(x)$	$h(g(x)) = (\sin(x))^2 - 3 \cdot \sin(x)$

Skládání funkcí není komutativní $h(g(x)) \neq g(h(x))$. Například:

$$h : y = x^2 - 1 \qquad g : y = \frac{1}{x} \qquad h(g(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1 \qquad g(h(x)) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Úlohy k procvičení

Příklad 2. Napište předpis složené funkce $f:\ y = h\left(g(x)\right)$.

a) $g : y = x^2$
$h : y = \log(x)$

b) $g : y = x + 2$
$h : y = \cos(x)$

c) $g : y = \dfrac{1}{x}$
$h : y = 2x^3 + x + 2$

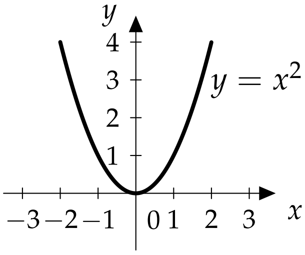
1.4 Vlastnosti funkce

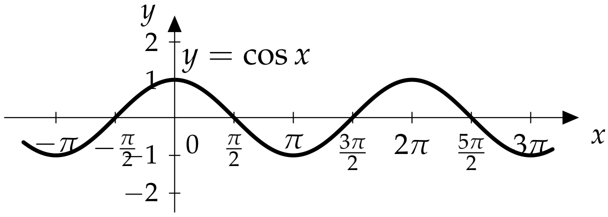
Funkce sudá a lichá

Definice 1.4 Funkce f se nazývá **sudá**, když:

$$\text{pro každé } x \in D_f \text{ platí } -x \in D_f \text{ a také } f(-x) = f(x).$$

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y.



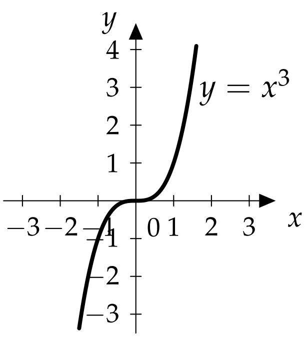


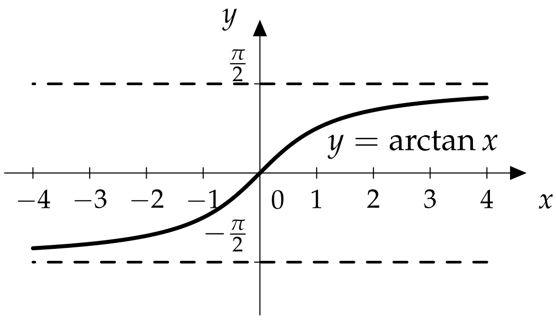
Příklady sudých funkcí

Definice 1.5 Funkce f se nazývá **lichá**, když:

$$\text{pro každé } x \in D_f \text{ platí } -x \in D_f \text{ a také } f(-x) = -f(x).$$

Graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic $[0, 0]$.



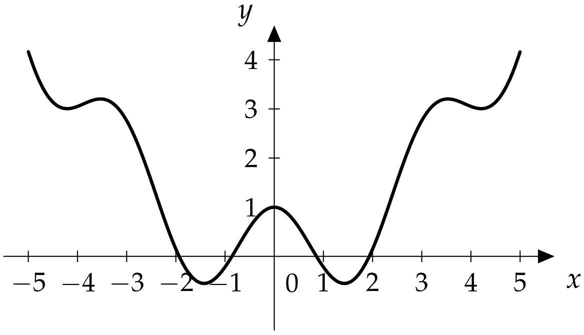


Příklady lichých funkcí

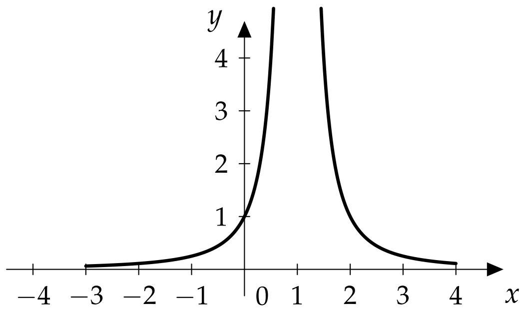
Úlohy k procvičení

Příklad 3. Z obrázku rozhodněte, zda se jedná o graf sudé nebo liché funkce.

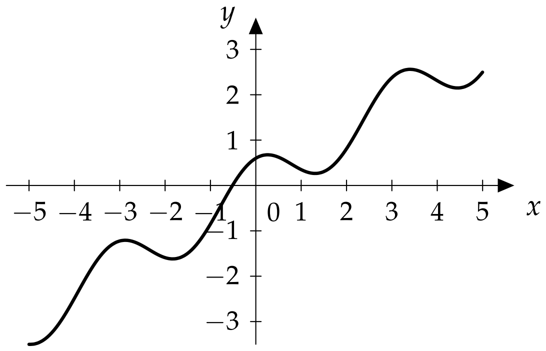
①



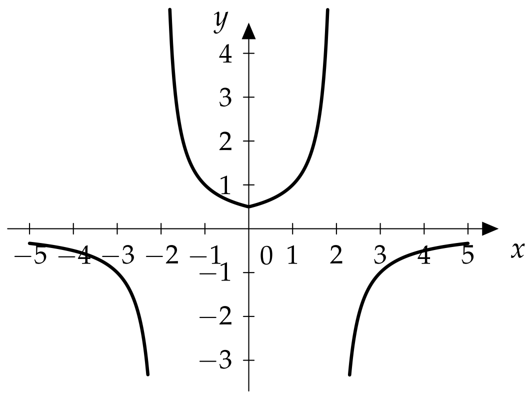
③



②



④



Příklad 4. Určete, zda je funkce $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^4}$ sudá nebo lichá.

Pro rozhodnutí, zda je funkce sudá nebo lichá, je potřeba do předpisu funkce dosadit $(-x)$:

$$f(-x) = \frac{3(-x)}{1+(-x)^4}.$$

Úpravou tohoto výrazu dostáváme:

$$f(-x) = \frac{-3x}{1+x^4}.$$

Snadno vidíme, že $f(-x)$ není rovno $f(x)$, funkce tedy není sudá.
Zkusme nyní porovnat $f(-x)$ a výraz $-f(x)$:

$$-f(x) = (-1)\cdot f(x) = (-1)\cdot\frac{3x}{1+x^4} = \frac{-3x}{1+x^4}.$$

Vidíme, že výrazy $f(-x)$ a $-f(x)$ se rovnají, funkce je tedy lichá.

Funkce $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^4}$ je lichá.

Úlohy k procvičení

Příklad 5. Určete, zda je funkce sudá nebo lichá.

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{x^4-1}{x^2+2} + 4$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sin 2x} - x$

c) $f(x) = x^3 \cdot \cos x + 4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = x \cdot \sin^2 x - x^3$

f) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

g) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$ ★

Periodická funkce

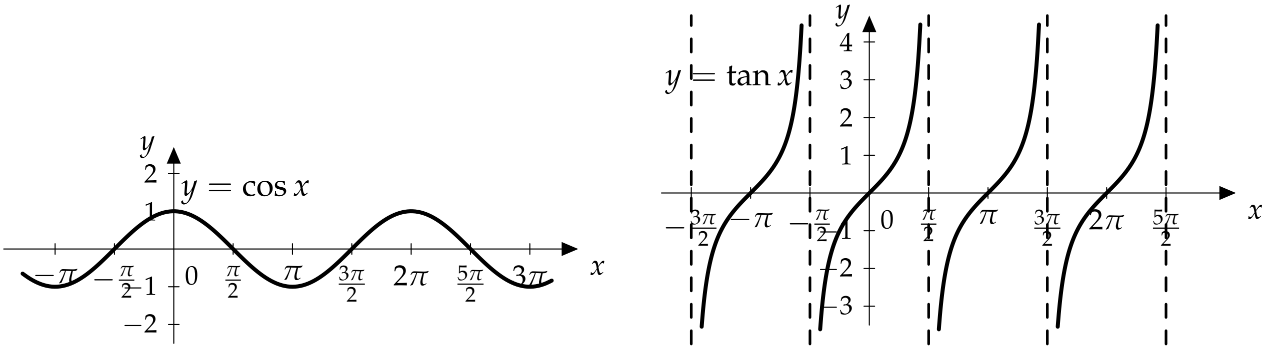
Definice 1.6 Funkce f se nazývá **periodická**, když existuje takové číslo $p > 0$, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ zároveň platí:

1. pro každé $x \in D_f$ je také $x + k \cdot p \in D_f$
2. pro každé $x \in D_f$ platí $f(x + k \cdot p) = f(x)$

Číslo p se nazývá **perioda** funkce f.

Poznámka

Graf periodické funkce se pravidelně opakuje po intervalech, jejichž délka je rovna základní periodě p.



Příklady periodických funkcí

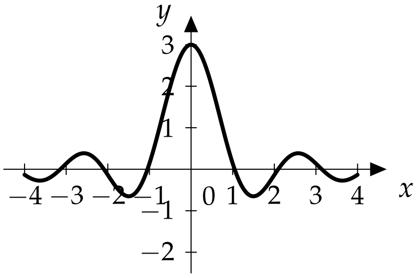
Ohraničená a neohraničená funkce

Definice 1.7 Funkce f se nazývá

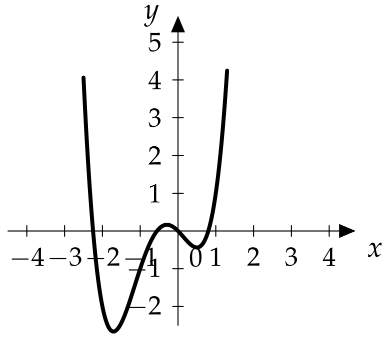
- **ohraničená shora** na množině M, existuje-li takové číslo h, že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq h$.
- **ohraničená zdola** na množině M, existuje-li takové číslo d, že pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq d$.
- **ohraničená** na množině M, je-li na ní ohraničená shora i zdola.

Poznámka

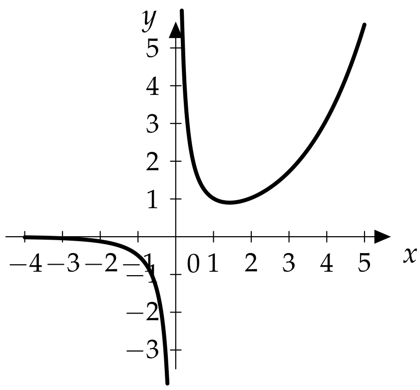
V opačném případě se nazývá **neohraničená**.



Ohraničená funkce



Funkce ohraničená zdola



Neohraničená funkce

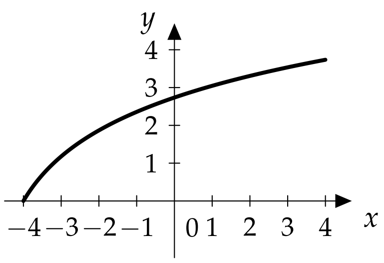
Monotonnost funkce, funkce rostoucí a klesající

Definice 1.8 Funkce f se nazývá

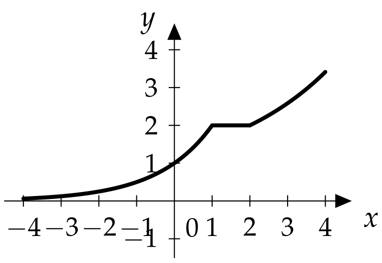
- **rostoucí na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
- **klesající na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.
- **neklesající na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **nerostoucí na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Poznámka

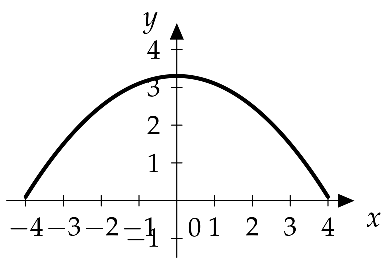
Tyto funkce se nazývají **monotonní** na intervalu I. Funkce rostoucí a klesající na intervalu I se nazývají **ryze monotonní** na intervalu I.



Rostoucí funkce



Neklesající funkce

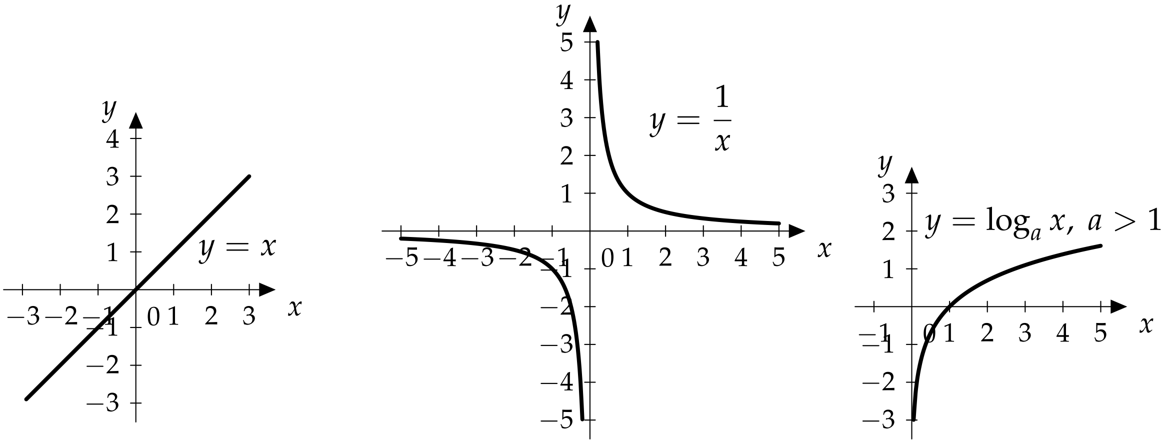


Funkce, která není monotonní

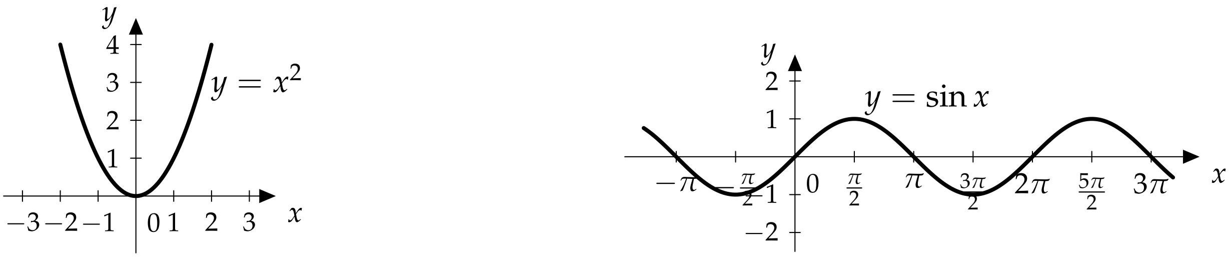
Prostá funkce

Definice 1.9 Funkce f se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí:

$$\text{je-li } x_1 \neq x_2\,,\ \text{pak } f(x_1) \neq f(x_2)\,.$$



Příklady prostých funkcí



Příklady funkcí, které nejsou prosté

Věta 1.1 Každá ryze monotonní funkce je prostá.

1.5 Inverzní funkce

Definice 1.10 **Inverzní funkcí** k prosté funkci $f(x)$ je funkce, která každému $y \in H_f$ přiřadí právě to $x \in D_f$, pro které je $f(x) = y$. Značíme ji f^{-1}.

Grafy funkce f a funkce inverzní f^{-1} jsou symetrické podle osy prvního a třetího kvadrantu, tj. přímky $y = x$.

Poznámka

Pro definiční obor a obor hodnot platí: $D_{f^{-1}} = H_f$, $H_{f^{-1}} = D_f$. Dále platí:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \qquad f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

Například inverzní funkcí k funkci $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je funkce $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$, protože pro každé $x \neq 0$ platí:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

Inverzní funkcí k funkci $f(x) = x^2$ je pro všechna $x \geq 0$ funkce $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, protože pro všechna $x \geq 0$ platí:

$$\sqrt{x^2} = x, \quad (\sqrt{x})^2 = x.$$

2 Přehled elementárních funkcí

Definice 2.11 **Elementární funkcí** nazveme každou funkci, která vznikne ze základních elementárních funkcí $y = c$, $y = x$, $y = \sin(x)$, $y = e^x$ pomocí operací s funkcemi (součet, rozdíl, součin, podíl, složení, inverze).

2.1 Polynomy

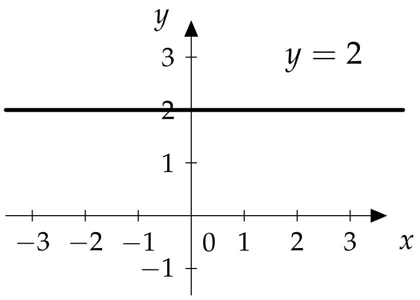
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad \text{kde } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Dále podrobně popíšeme polynomy vybraných typů: konstantní funkce $y = a_0$, lineární funkce $y = a_0 + a_1 x$, $a_1 \neq 0$, kvadratická funkce $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_2 \neq 0$, mocninná funkce (s přirozeným exponentem) $y = x^n$.

Konstantní funkce

$$y = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \{a\}$, grafem je přímka rovnoběžná s osou x, v bodě $[0, a]$ protíná osu y, funkce je sudá, ohraničená, není prostá.

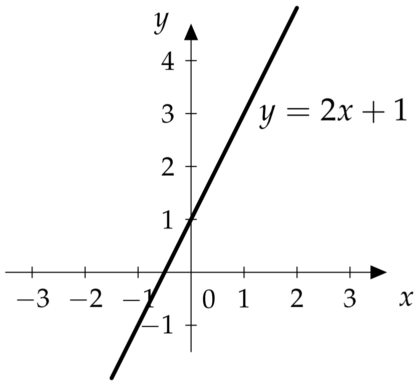


Lineární funkce

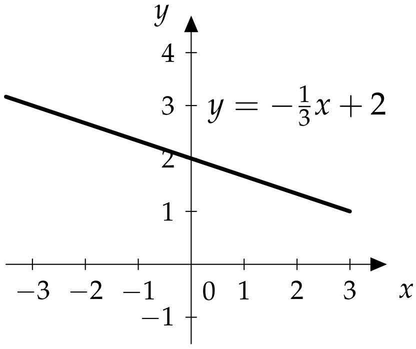
$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$$

$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}$, grafem je přímka, v bodě $\left[-\frac{b}{a}, 0\right]$ protíná osu x, v bodě $[0, b]$ protíná osu y, funkce je neohraničená, prostá.

Pro $a > 0$ je funkce rostoucí:



Pro $a < 0$ je funkce klesající:



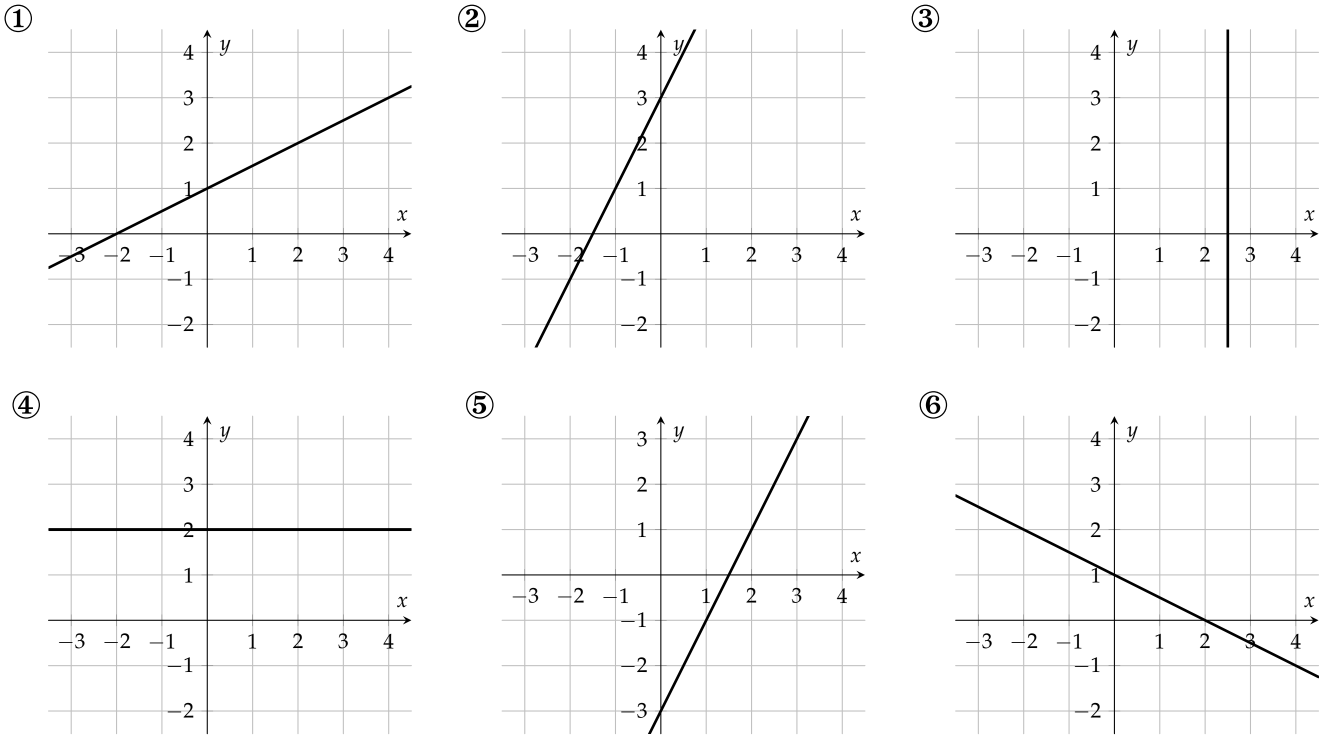
Úlohy k procvičení

Příklad 6. Přiřaďte k obrázku správný předpis.

a) $y = 2$ c) $y = 2x - 3$ e) $y = -\frac{1}{2}x + 1$

b) $y = 2x + 3$ d) $y = \frac{1}{2}x + 1$ f) $x = 2.5$

Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?



Úlohy k procvičení

Příklad 7. Nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = 2x - 4$ c) $y = \frac{1}{3}x + 2$ e) $y = \dfrac{1-3x}{2}$

b) $y = 4 - x$ d) $y = \dfrac{x-1}{2}$ f) $y = 4$

Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?

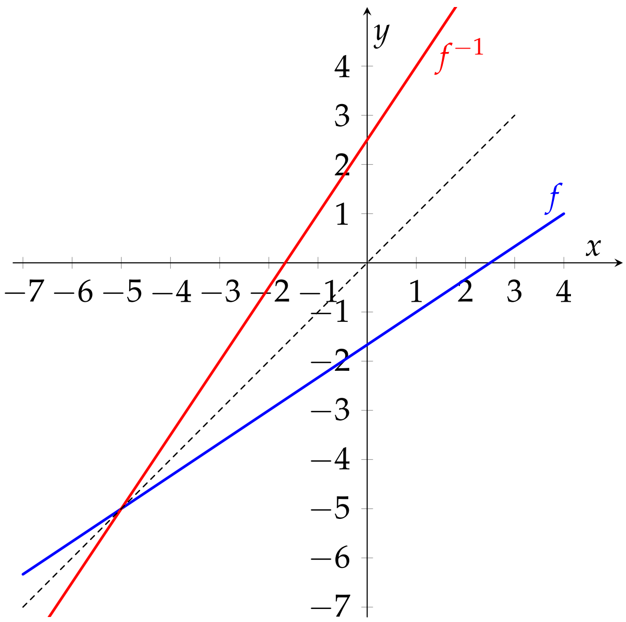
Interaktivní pomůcka pro grafy lineární funkce

Příklad 8. Z předpisu funkce $f : y = \dfrac{2x-5}{3}$ vyjádřete proměnnou x v závislosti na y.

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-5}{3} \\ 3y &= 2x-5 \\ 3y+5 &= 2x \\ \frac{3y+5}{2} &= x \end{aligned}$$

Hledané vyjádření je $x = \dfrac{3y+5}{2}$.

V předchozím příkladu jsme vlastně našli předpis inverzní funkce k zadané funkci. Následující obrázek znázorňuje grafy obou funkcí, $f(x) = \dfrac{2x-5}{3}$ i inverzní funkce $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+5}{2}$. Vidíme, že grafy inverzních funkcí jsou osově souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu.



Úlohy k procvičení

Příklad 9. Z předpisu zadané funkce vyjádřete proměnnou x v závislosti na y:

a) $y = 3 - 4x$ b) $y = \dfrac{1}{3}x + 2$ c) $y = \dfrac{7-x}{2}$

Kvadratická funkce

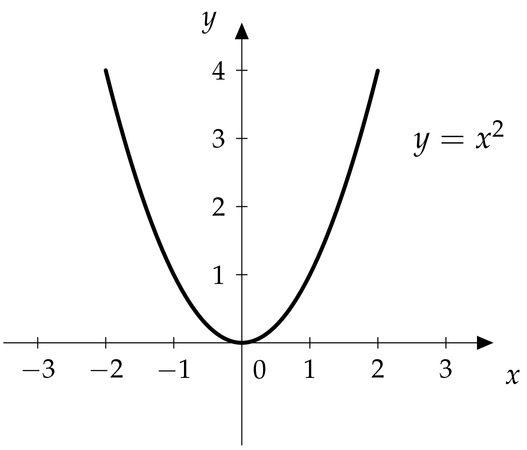
$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$D_f = \mathbb{R}$, H_f závisí na funkčním předpisu, funkce není prostá.

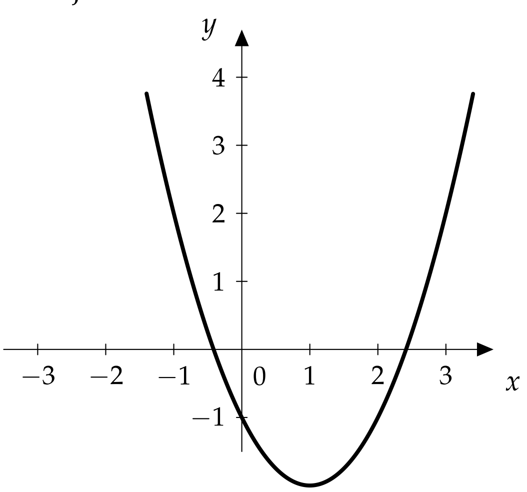
Grafem je parabola, která má vrchol v bodě $\left[-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right]$ a v bodě $[0, c]$ protíná osu y, kde D značí diskriminant $D = b^2 - 4ac$.

Průsečíky s osou x jsou řešením kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$:

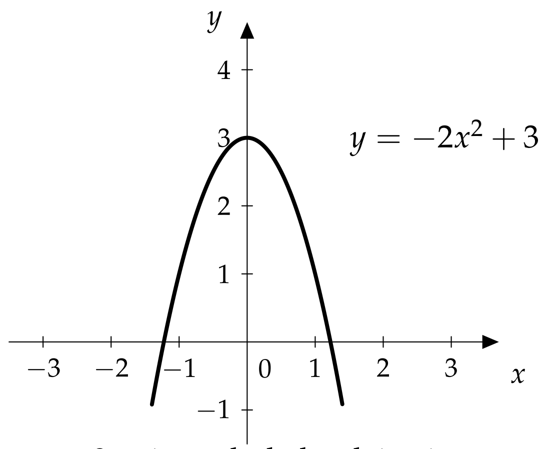
- je-li $D > 0$, pak má funkce s osou x dva průsečíky $\left[\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, 0\right]$, $\left[\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, 0\right]$,
- je-li $D = 0$, pak má funkce s osou x jeden průsečík $\left[\frac{-b}{2a}, 0\right]$,
- je-li $D < 0$, pak nemá funkce s osou x žádný průsečík.



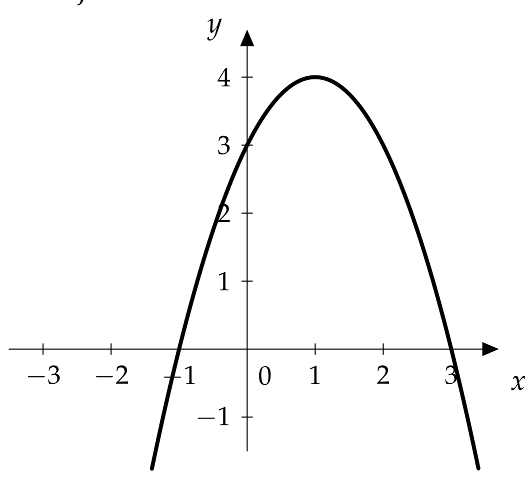
Pro $a > 0$ má parabola konvexní tvar, funkce je ohraničená zdola.



Pro $b = 0$ je funkce $y = ax^2 + c$ sudá.



Pro $a < 0$ má parabola konkávní tvar, funkce je ohraničená shora.



Vrchol paraboly
Předpis kvadratické funkce můžeme zapsat v různých tvarech.
Například $y = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. A vidíme, že výraz $(x-3)^2$ bude vždy nezáporný. Takže nejmenší hodnoty, které může nabývat výraz $(x-3)^2$ je nula a to pro hodnotu $x = 3$. Vrchol paraboly $y = (x-3)^2$ tedy bude v bodě $[3, 0]$.

Dále se podíváme například na funkci $y = (x-4)^2 - 1$. A vidíme, že výraz $(x-4)^2$ bude vždy nezáporný. Takže nejmenší hodnoty, které může nabývat výraz $(x-4)^2$ je nula a to pro hodnotu $x = 4$. Tuto hodnotu dosadíme do předpisu funkce a dopočítáme souřadnici y hledaného vrcholu, tedy hodnotu $y = (4-4)^2 - 1 = -1$. Vrchol paraboly $y = (x-4)^2 - 1$ tedy bude v bodě $[4, -1]$.

Stejně snadné je určit vrchol paraboly například pro $y = 2(x+5)^2 + 2$. Opět vidíme, že výraz $2(x+5)^2$ bude vždy nezáporný. Takže nejmenší hodnoty, které může nabývat je nula a to pro hodnotu $x = -5$. Dopočítáme $y = 2(5-5)^2 + 2 = 2$ a vrchol paraboly bude v bodě $[5, 2]$.

To znamená, že předpis $ax^2 + bx + c$ převedeme do tvaru $a(x-m)^2 + n$, vrchol paraboly pak má souřadnice $[m, n]$. Otázkou zůstává, jak napsat předpis kvadratické funkce v tomto vhodném tvaru. Této úpravě se říká doplnění na čtverec a ukážeme ho v následujích příkladech.

Příklad 10. Najděte vrchol paraboly, která je grafem kvadratické funkce zadané předpisem $f : y = x^2 - 4x + 3$.

Nejprve z prvních dvou členů vytkneme koeficient, který stojí před x. Pokud je to jednička, jako v tomto případě, není to samozřejmě potřeba. Potom k prvním dvěma členům doplníme číslo tak, aby vznikl vzorec $(x-m)^2 = x^2 - 2mx + m^2$. Číslo, které jsme přidali navíc, musíme odečíst, aby byla zachována rovnost. Poté už jen upravíme.

$$x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

Parabola, která je grafem funkce $x^2 - 4x + 3$, má vrchol v bodě $[2, -1]$.

Příklad 11. Najděte vrchol paraboly, která je grafem kvadratické funkce zadané předpisem $f : y = -2x^2 - 3x + 1$.

Postup řešení je stejný jako u minulého příkladu, jen tentokrát musíme začít vytknutím čísla -2 z prvních dvou členů:

$$\begin{aligned} -2x^2 - 3x + 1 &= -2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) + 1 = -2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) + 2 \cdot \frac{9}{16} + 1 = \\ &= -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{9}{16} + 1 = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8} \end{aligned}$$

Parabola, která je grafem funkce $-2x^2 + 3x + 1$, má vrchol v bodě $\left[-\frac{3}{4}, \frac{17}{8}\right]$.

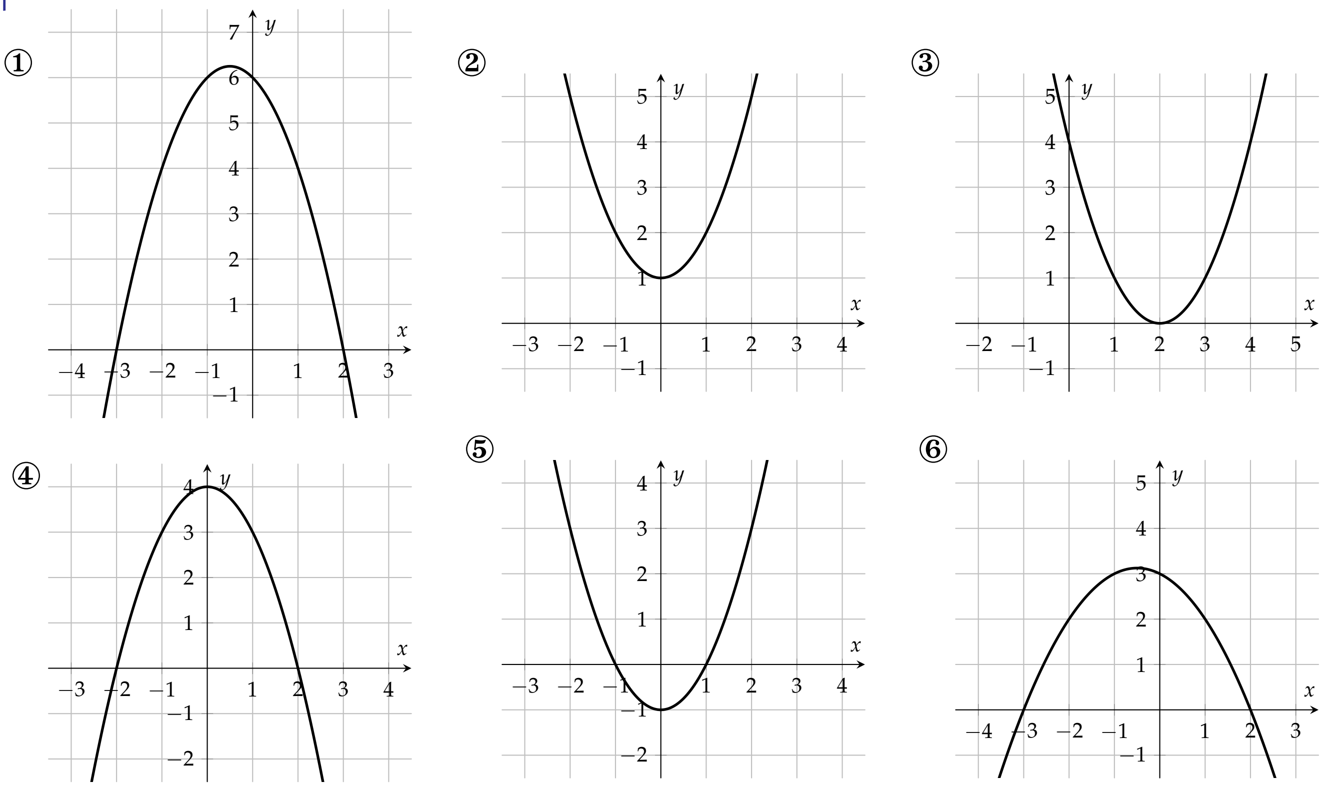
Úlohy k procvičení

Příklad 12. Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = x^2 + 1$ c) $y = 4 - x^2$ e) $y = \frac{1}{2}\left(6 - x - x^2\right)$

b) $y = x^2 - 1$ d) $y = (x-2)^2$ f) $y = 6 - x - x^2$

Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená? Určete souřadnice vrcholu paraboly.



Úlohy k procvičení

Příklad 13. Nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = x^2 + 2x$ c) $y = x^2 + 2x + 1$ e) $y = 3 - 3x^2$

b) $y = 2x - x^2$ d) $y = x^2 - 2x + 2$ f) $y = x^2 - 4x + 3$

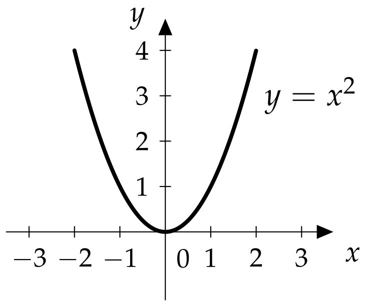
Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená? Určete souřadnice vrcholu paraboly.

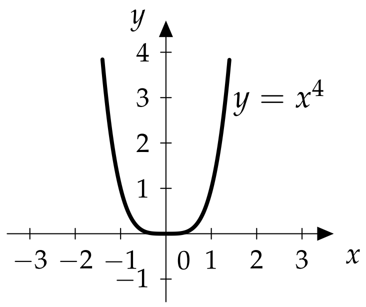
Interaktivní pomůcka pro grafy kvadratické funkce

Mocninné funkce (s přirozeným exponentem)

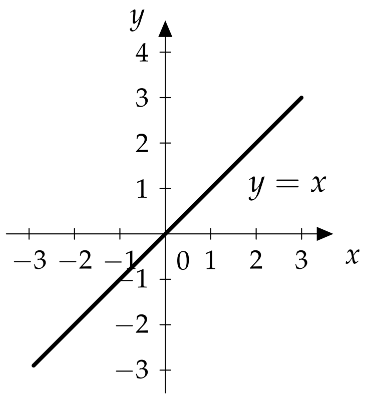
$$y = x^n \quad n \in \mathbb{N}$$

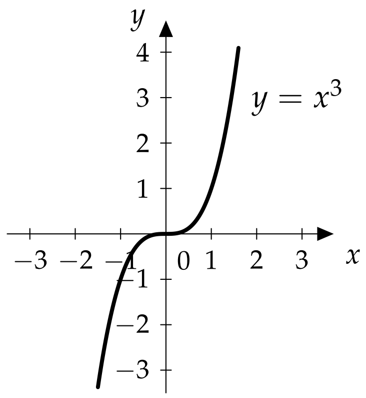
$D_f = \mathbb{R}$
Pro n **sudé**: $H_f = \langle 0, \infty)$, není prostá, funkce je sudá, ohraničená zdola:





Pro n **liché**: $H_f = \mathbb{R}$, funkce je prostá, lichá, neohraničená:





Užitečné vzorce

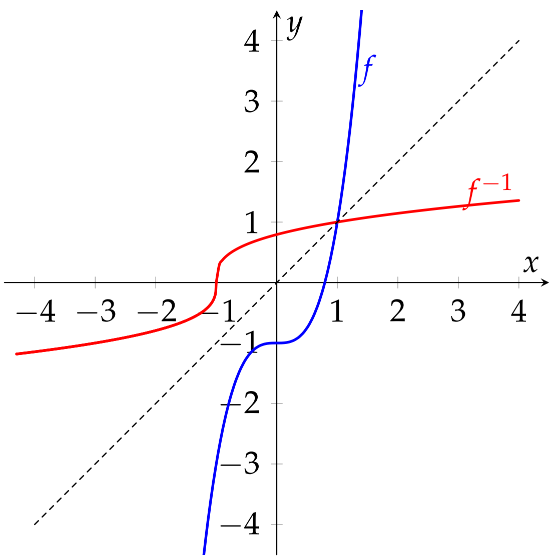
$$\begin{aligned}
(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \\
(a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \\
(a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3 \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\
&= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \\
(a-b)^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
\end{aligned}$$

Příklad 14. Z předpisu funkce $f: y = 2x^3 - 1$ vyjádřete proměnnou x v závislosti na y.

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^3 - 1 \\
y + 1 &= 2x^3 \\
\frac{y+1}{2} &= x^3 \\
\sqrt[3]{\frac{y+1}{2}} &= x
\end{aligned}
$$

Hledané vyjádření je $x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}$.

V předchozím příkladu jsme vlastně dokázali, že inverzní funkcí k funkci $f(x) = 2x^3 - 1$ je funkce $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$. Na obrázku jsou znázorněny grafy obou funkcí a opět můžeme vidět, že jsou osově souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu.



Úlohy k procvičení

Příklad 15. Z předpisu zadané funkce vyjádřete proměnnou x v závislosti na y:

a) $y = 2 - 7x^3$

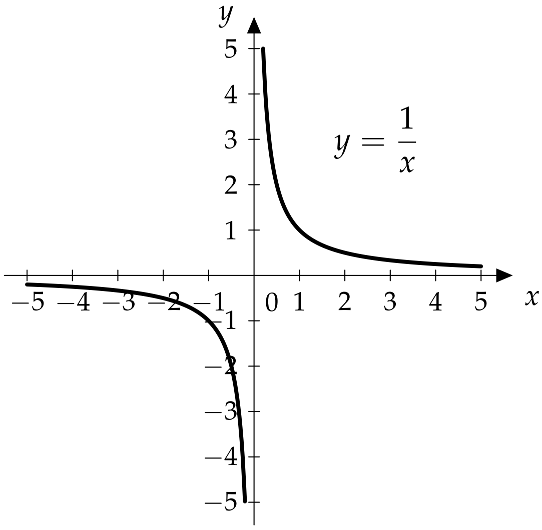
b) $y = \frac{1}{4}x^5 - 3$

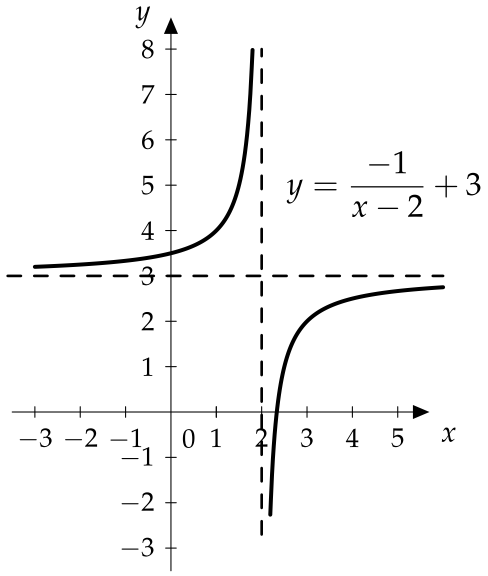
c) $y = \frac{4 - 3x^5}{2}$

2.2 Lineární lomená funkce

$$y = \frac{a}{x+b} + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-b\}$, $H_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$, grafem je hyperbola, funkce má dvě asymptoty $y = c$, $x = -b$, je neohraničená a prostá.





Příklad 16. Určete asymptoty grafu funkce $f : y = \dfrac{2x+5}{x+1}$.

Asymptoty lze určit tak, že předpis lomené funkce převedeme do tvaru

$$y = \frac{a}{x+b} + c,$$

z něhož pak již snadno vyčteme rovnice asymptot. Toho snadno dosáhneme tak, že proměnnou x v čitateli nahradíme závorkou, ve které bude celý jmenovatel. Poté to, co jsme přičetli navíc, odečteme, aby byla zachována rovnost. Pak už jen upravíme. Konkrétně,

$$\frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1) - 2 \cdot 1 + 5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$$

Graf funkce $y = \dfrac{2x+6}{x+1}$ má asymptoty $x = -1, y = 2$.

Příklad 17. Určete asymptoty grafu funkce $f : y = \dfrac{x-4}{2x-6}$.

Tentokrát máme ve jmenovateli zadané funkce $2x - 6$ a je tedy obtížnější převést tento předpis na tvar

$$y = \frac{a}{x+b} + c.$$

Začneme vytknutím čísla před proměnnou x ve jmenovateli, což je v tomto případě číslo 2, poté pokračujeme stejně jako v předchozím příkladu:

$$\begin{aligned}\frac{x-4}{2x-6} &= \frac{x-4}{2(x-3)} = \frac{\frac{1}{2}(x-4)}{x-3} = \frac{\frac{1}{2}x-2}{x-3} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x-3)+\frac{3}{2}-2}{x-3} = \frac{\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}}{x-3} = \frac{-\frac{1}{2}}{x-3}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Graf funkce $y = \dfrac{x-4}{2x-6}$ má asymptoty $x = 3, y = \dfrac{1}{2}$.

Příklad 18. Určete asymptoty grafu funkce $f : y = \dfrac{2x+3}{3x+1}$.

Začneme převedením předpisu zadané funkce do tvaru

$$y = \frac{a}{x+b} + c.$$

Vytkneme proto nejprve ze jmenovatele číslo 3. Poté opět nahradíme proměnnou x v čitateli celým upraveným výrazem ve jmenovateli a pokračujeme obdobně jako v předchozích dvou příkladech:

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{3x+1} &= \frac{2x+3}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \frac{2\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}+3}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \\ &= \frac{2\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{3}}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \frac{2\left(x+\frac{1}{3}\right)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)} + \frac{\frac{7}{3}}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}\end{aligned}$$

Nakonec už jen zkrátíme závorku v prvním zlomku, ve druhém zlomku převedeme číslo 3 ze jmenovatele do čitatele a poté zapíšeme do výsledného tvaru, ze kterého už vidíme rovnice asymptot:

$$\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{\frac{7}{9}}{x+\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}$$

Graf funkce $y = \dfrac{2x+3}{3x+1}$ má asymptoty $x = -\dfrac{1}{3}, y = \dfrac{2}{3}$.

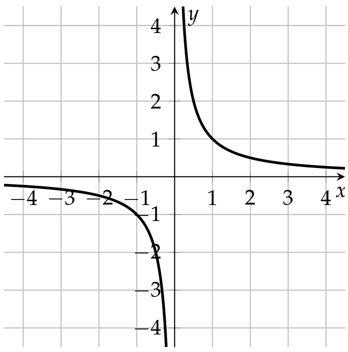
Úlohy k procvičení

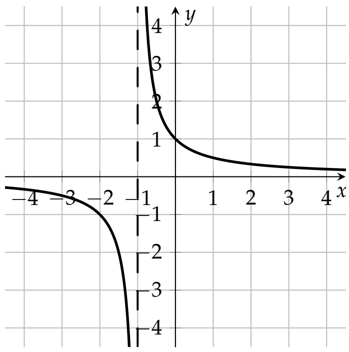
Příklad 19. Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

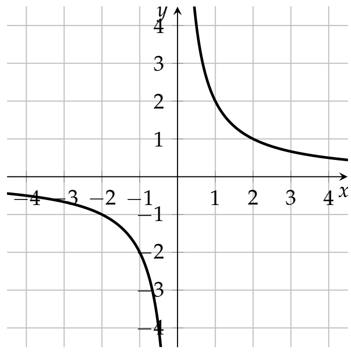
a) $y = \dfrac{1}{x}$ c) $y = \dfrac{2}{x}$ e) $y = \dfrac{2x+1}{x}$

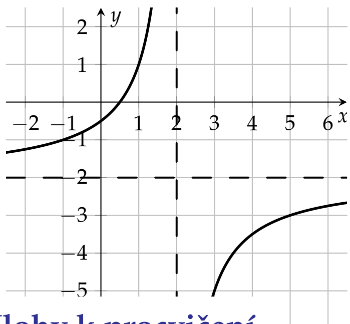
b) $y = \dfrac{1}{x+1}$ d) $y = -\dfrac{3}{x-1}$ f) $y = \dfrac{1-2x}{x-2}$

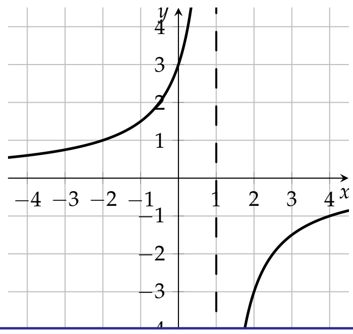
Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená? Určete asymptoty funkce.

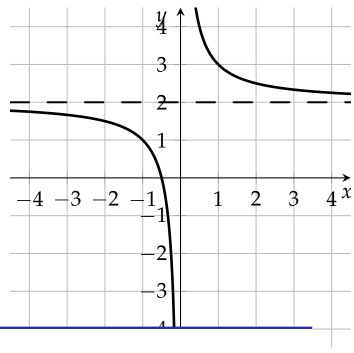
①


②


③


④


⑤


⑥


Úlohy k procvičení

Příklad 20. Nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = -\dfrac{1}{x}$ c) $y = \dfrac{x}{x-1}$ e) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$

b) $y = \dfrac{2}{x-1}$ d) $y = \dfrac{2x-1}{x}$ f) $y = \dfrac{1-x}{2-x}$

Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená? Určete asymptoty funkce.

Interaktivní pomůcka pro grafy lineární lomená funkce

Příklad 21. Určete definiční obor funkce $f : y = \dfrac{2x+5}{x-3}$.

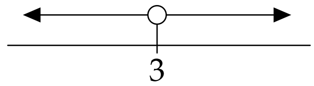
Zamysleme se nad tím, která reálná čísla můžeme dosadit do předpisu zadané funkce. Téměř všechna s jedinou výjimkou, zní správná odpověď. Neumíme dělit nulou, proto musí nutně platit, že jmenovatel zadaného zlomku musí být nenulový. Tedy

$$x - 3 \neq 0,$$

neboli

$$x \neq 3.$$

Definičním oborem zadané funkce jsou tedy všechna reálná čísla krom čísla 3.



Definičním oborem funkce $f : y = \dfrac{2x+5}{x-3}$ je sjednocení intervalů $D_f = (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$.

Úlohy k procvičení

Příklad 22. Z předpisu zadané funkce určete její definiční obor:

a) $y = \dfrac{4}{x+1}$

b) $y = \dfrac{2x+1}{5-x}$

c) $y = \dfrac{1-2x}{3x+4}$

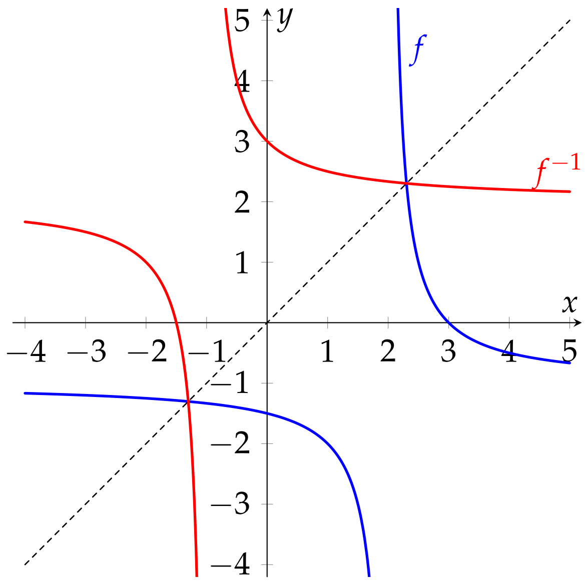
d) $y = \dfrac{3x-7}{2x-3} + \dfrac{3x}{4-2x}$

Příklad 23. Z předpisu funkce $f : y = \dfrac{3-x}{x-2}$ vyjádřete proměnnou x v závislosti na y.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{3-x}{x-2} \\
y(x-2) &= 3-x \\
xy - 2y &= 3-x \\
xy + x &= 2y+3 \\
x(y+1) &= 2y+3 \\
x &= \frac{2y+3}{y+1}
\end{aligned}$$

Hledané vyjádření je $x = \dfrac{2y+3}{y+1}$.

V předchozím příkladu jsme dokázali, že inverzní funkcí k funkci $f(x) = \frac{3-x}{x-2}$ je funkce $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x+1}$. Níže vidíme osově souměrné grafy obou funkcí.



Úlohy k procvičení

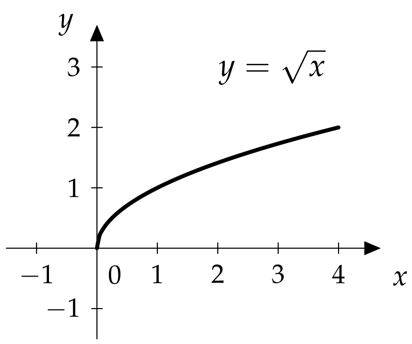
Příklad 24. Z předpisu zadané funkce vyjádřete proměnnou x v závislosti na y:

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$ b) $y = \dfrac{2x}{5-x}$ c) $y = \dfrac{x+3}{2x-1}$

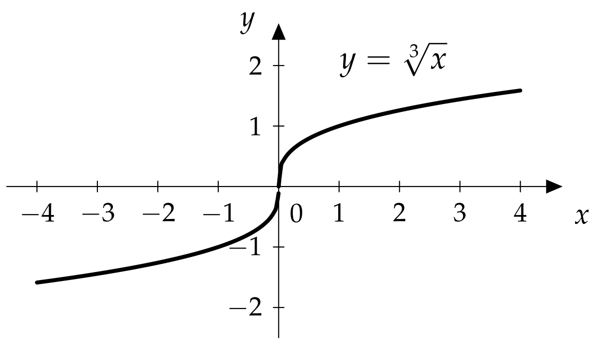
2.3 Funkce odmocnina

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Pro n **sudé**: $D_f = \langle 0, \infty)$, $H_f = \langle 0, \infty)$, funkce je prostá, ohraničená zdola, rostoucí:



Pro n **liché**: $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \mathbb{R}$, funkce je prostá, lichá, neohraničená:



Užitečné vzorce

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$
$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

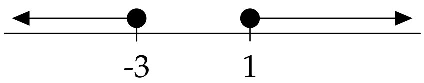
Příklad 25. Určete definiční obor funkce $f : y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

Definičním oborem zadané funkce budou všechna reálná čísla, která můžeme dosadit do daného předpisu. Víme, že druhá odmocnina je definována jen pro nezáporná čísla. Tedy musí platit
$$x^2 + 2x - 3 \geq 0.$$
Výraz vlevo rozložíme na součin lineárních členů. K tomu potřebujeme spočítat jeho kořeny:
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$
Naši podmínku tedy můžeme přepsat
$$(x-1)(x+3) \geq 0.$$

Tuto nerovnici vyřešíme následujícím způsobem. Nulové body 1 a -3 rozdělí reálnou osu na tři intervaly. Do tabulky zaznamenáme, jaké znaménko mají výrazy v závorkách a také jejich součin na těchto konkrétních intervalech (zjistíme dosazením, např. z intervalu $(-\infty; -3)$ můžeme vybrat číslo -5, když ho dosadíme do výrazu $x - 1$ dostaneme číslo -6, na tomto intervalu je tedy výraz záporný):

	$(-\infty; -3)$	$(-3; 1)$	$(1; \infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)(x+3)$	$+$	$-$	$+$

Z tabulky vidíme, že je výraz $(x-1)(x+3)$ kladný na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(1, \infty)$. Do výsledného definičního oboru budou patřit také oba nulové body, protože naše podmínka povolovala i rovnost nule.



Definičním oborem zadané funkce je sjednocení intervalů $D_f = (-\infty; -3\rangle \cup \langle 1; \infty)$.

Úlohy k procvičení

Příklad 26. Z předpisu zadané funkce určete její definiční obor:

a) $y = \sqrt{x+2}$

b) $y = \sqrt{9-x^2}$

c) $y = \sqrt{-2x} + \sqrt{3+x}$

d) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}$

e) $y = \dfrac{7x}{\sqrt[3]{x-5}}$

f) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x+3}}$

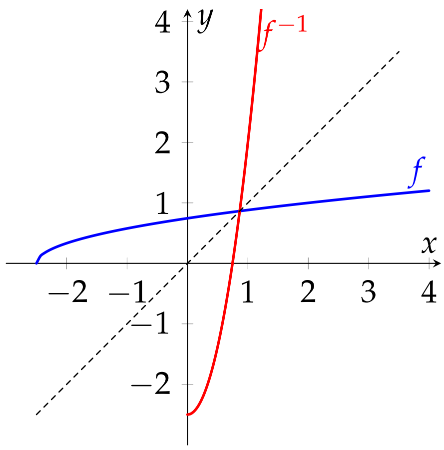
g) $y = \left(x^2-4\right)^{\frac{1}{4}}$

Příklad 27. Z předpisu funkce $y = \dfrac{\sqrt{2x+5}}{3}$ vyjádřete proměnnou x v závislosti na y.

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{2x+5}}{3} \\ 3y &= \sqrt{2x+5} \\ 9y^2 &= 2x+5 \\ 9y^2-5 &= 2x \\ \frac{9y^2-5}{2} &= x \end{aligned}$$

Hledané vyjádření je $x = \dfrac{9y^2-5}{2}$.

V předchozím příkladu jsme našli k funkci $f(x) = \frac{\sqrt{2x+5}}{3}$ inverzní funkci $f^{-1}(x) = \frac{9x^2-5}{2}$. Níže vidíme grafy obou funkcí a opět si můžeme všimnout, že jsou osově souměrné.



Úlohy k procvičení

Příklad 28. Z předpisu zadané funkce vyjádřete proměnnou x v závislosti na y:

a) $y = 3 - \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{4x+1}$

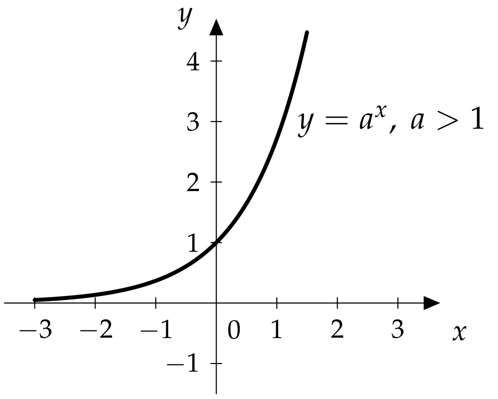
c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2} - 1$

2.4 Exponenciální funkce

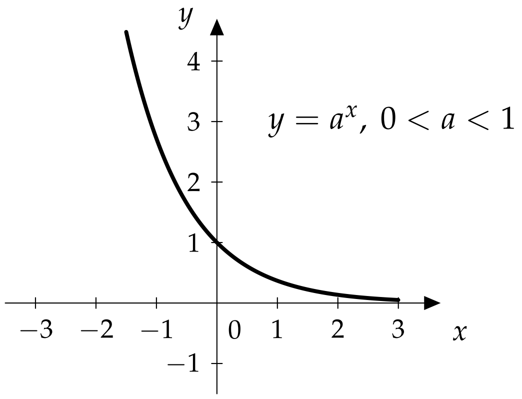
$$y = a^x, \quad a > 0\,, a \neq 1$$

$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (0, \infty)$, číslo a se nazývá základ exponenciální funkce, graf protíná osu y v bodě $[0, 1]$, funkce je ohraničená zdola, prostá (inverzní funkce je funkce logaritmická)

Je-li $a > 1$, je funkce rostoucí:



Je-li $0 < a < 1$, je funkce klesající:



Poznámka

Je-li základem Eulerovo číslo $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$, pak se funkce $y = \mathrm{e}^x$ nazývá **přirozená exponenciální funkce**.

Užitečné vzorce

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$
$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$
$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

Úlohy k procvičení

Příklad 29. Spočítejte:

a) $8^{-\frac{1}{3}}$

b) $2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{2}}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

d) 5^{-3}

e) $5 \cdot 16^{\frac{1}{4}}$

f) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

g) $64^{-\frac{2}{3}}$

h) $25^{-\frac{3}{2}}$

i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}$

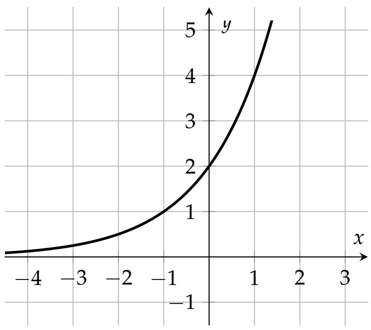
Úlohy k procvičení

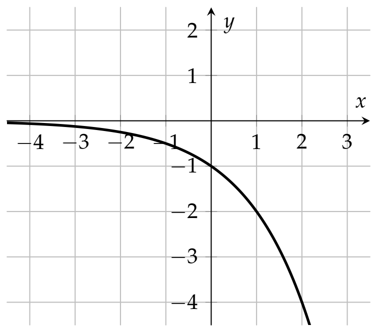
Příklad 30. Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

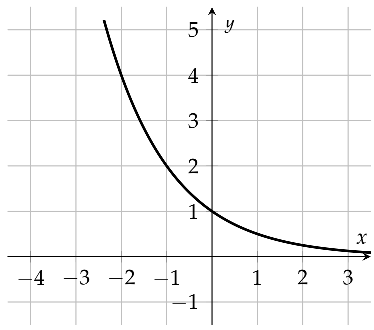
a) $y = 2^x$ c) $y = 2^x + 1$ e) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

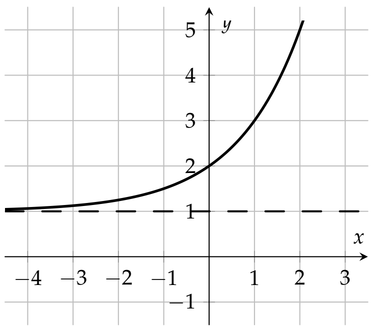
b) $y = -2^x$ d) $y = 2^{(x+1)}$ f) $y = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

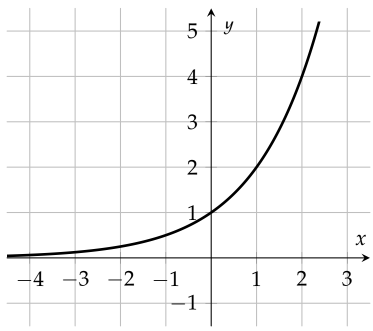
Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?

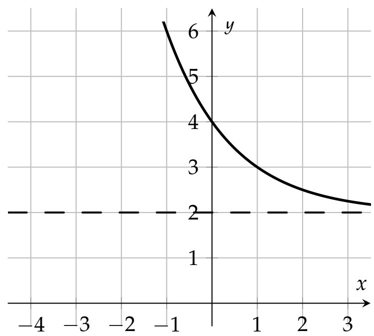
①


②


③


④


⑤


⑥


Úlohy k procvičení

Příklad 31. Nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = 3^x$ c) $y = 3^{x+1}$ e) $y = 3^{-x}$

b) $y = 1 + 3^x$ d) $y = 1 - 3^x$ f) $y = 3 - 3^{-x}$

Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?

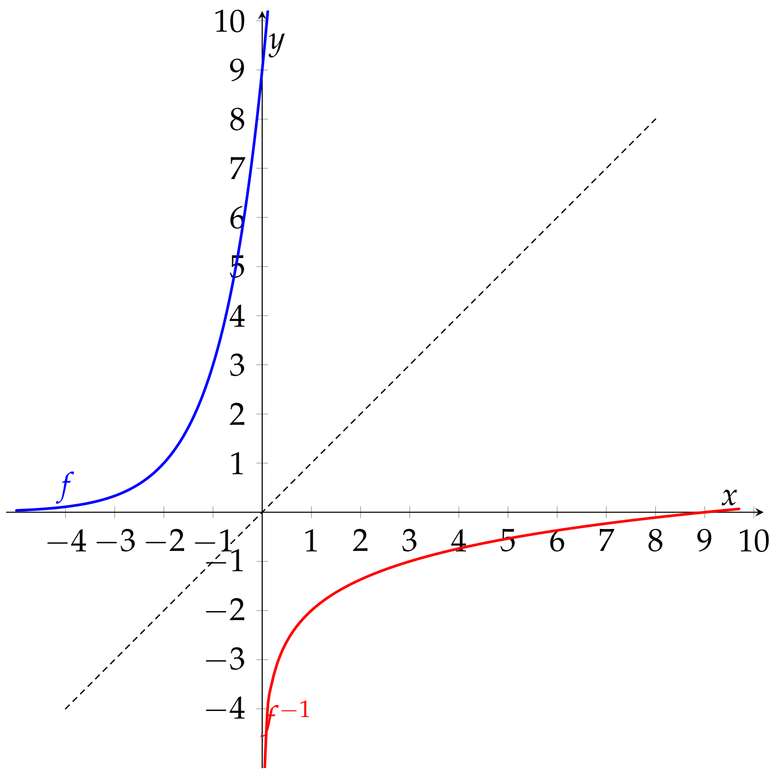
Interaktivní pomůcka pro grafy exponenciální funkce

Příklad 32. Z předpisu funkce $f: y = 3^{x+2}$ vyjádřete proměnnou x v závislosti na y.

$$\begin{aligned} y &= 3^{x+2} \\ \log_3 y &= \log_3 3^{x+2} \\ \log_3 y &= x+2 \\ \log_3 y - 2 &= x \end{aligned}$$

Hledané vyjádření je $x = \log_3 y - 2$.

V předchozím příkladu jsme ve skutečnosti našli předpis inverzní funkce $f^{-1}(x) = \log_3 x - 2$ k zadané funkci $f(x) = 3^{x+2}$. Na obrázku níže jsou znázorněny osově souměrné grafy obou funkcí.



Úlohy k procvičení

Příklad 33. Z předpisu zadané funkce vyjádřete proměnnou x v závislosti na y:

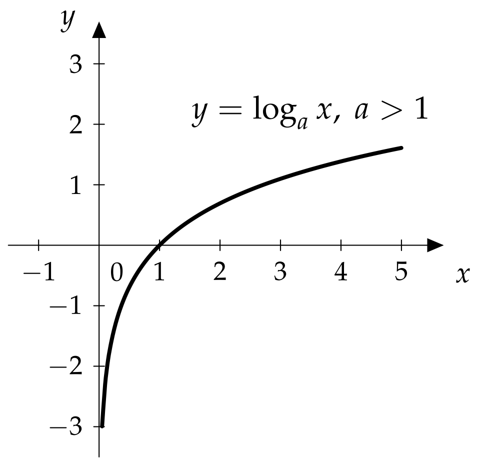
a) $y = 5^x + 1$ b) $y = 2^{4x} + 5$ c) $y = 3^{2x-1}$

2.5 Logaritmická funkce

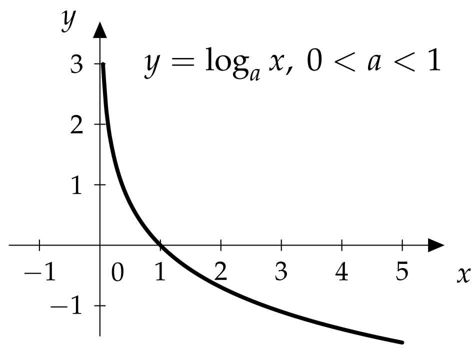
$$y = \log_a(x) \quad a > 0, a \neq 1$$

$D_f = (0, \infty)$, $H_f = \mathbb{R}$, číslo a se nazývá základ logaritmické funkce, graf protíná osu x v bodě $[1, 0]$, funkce je neohraničená, prostá (logaritmická funkce je inverzní k exponenciální).

Je-li $a > 1$, je funkce rostoucí:



Je-li $0 < a < 1$, je funkce klesající:



Poznámka

Je-li základem Eulerovo číslo e, pak se funkce značí $y = \ln(x)$ a nazývá **přirozený logaritmus**.

Poznámka

Je-li základem číslo 10, pak se funkce značí $y = \log(x)$ a nazývá **dekadický logaritmus**.

Užitečné vzorce

$$\log_a a^x = x$$
$$\log_a(rs) = \log_a r + \log_a s$$
$$\log_a \left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$$
$$\log_a r^n = n \log_a r$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

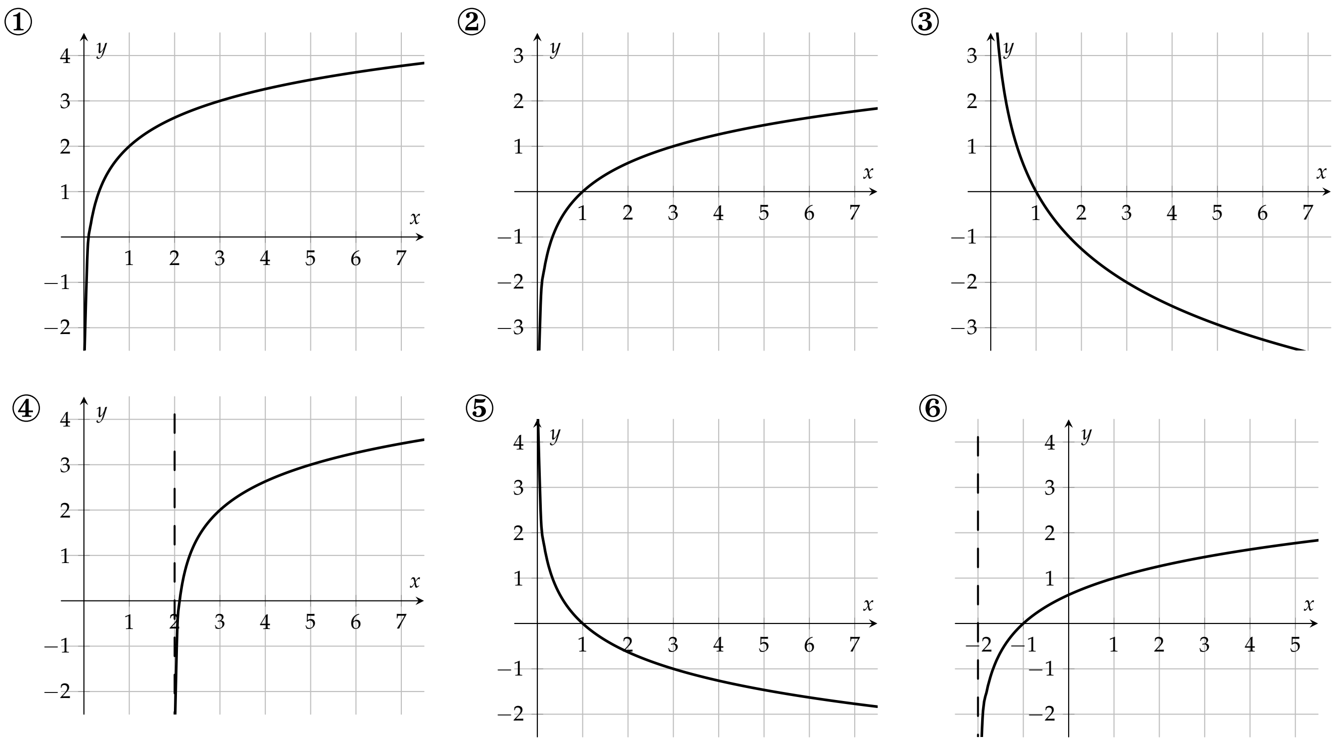
Úlohy k procvičení

Příklad 34. Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = \log_3 x$ c) $y = \log_3 (x-2)$ e) $y = 2 + \log_3 x$

b) $y = \log_{1/3} x$ d) $y = 2 \cdot \log_{1/3} x$ f) $y = \log_3 (x+2)$

Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?



Úlohy k procvičení

Příklad 35. Nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = \ln x$ c) $y = \ln (2+x)$ e) $y = 2 \cdot \ln x$

b) $y = \ln (2x)$ d) $y = 2 + \ln x$ f) $y = 2 - \ln x$

Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?

Interaktivní pomůcka pro grafy logaritmické funkce

Úlohy k procvičení

Příklad 36. Spočítejte:

a) $\log_7 49$

b) $\log_2 \dfrac{1}{4}$

c) $\log_{\frac{1}{3}} 27$

d) $\log \dfrac{1}{1000}$

e) $\log \sqrt[3]{100}$

f) $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{32}}$

g) $\ln \sqrt[4]{e}$

h) $\log_3 \dfrac{1}{27}$

Příklad 37. Určete definiční obor funkce $f : y = \log\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)$.

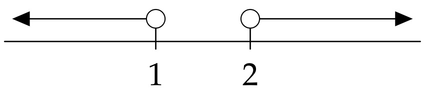
Logaritmus je definovaný pouze pro kladná čísla, proto do definičního oboru zadané funkce budou patřit pouze čísla, která splňují podmínku

$$\frac{x-2}{x-1} > 0.$$

K vyřešení této nerovnice opět použijeme metodu nulových bodů. V našem případě jsou nulovými body čísla 1 a 2, reálnou osu rozdělí na tři intervaly. Musíme určit znaménko zlomku na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty;1)$	$(1;2)$	$(2;\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{x-2}{x-1}$	$+$	$-$	$+$

Vidíme, že zlomek $\frac{x-2}{x-1}$ je kladný na prvním a třetím intervalu. Koncové body do definičního oboru patřit nebudou, protože požadovaná nerovnost byla ostrá (>).



Definičním oborem zadané funkce je sjednocení intervalů $D_f = (-\infty;1) \cup (2;\infty)$.

Úlohy k procvičení

Příklad 38. Z předpisu zadané funkce určete její definiční obor:

a) $y = \log(8-2x)$

b) $y = \ln(4-x^2)$

c) $y = \log\left(\dfrac{1}{3x+1}\right)$

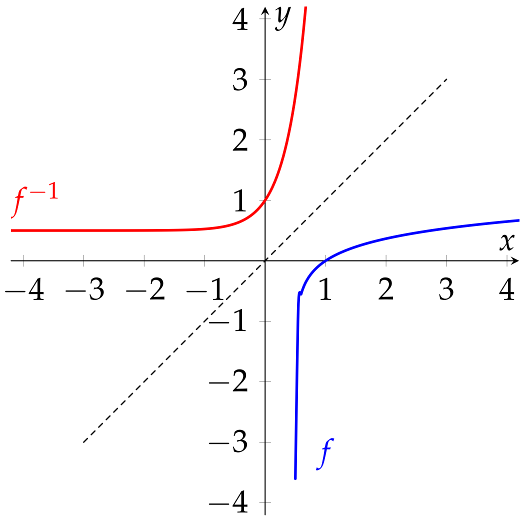
d) $y = \ln(x^3 - x)$

Příklad 39. Z předpisu funkce $f : y = \dfrac{1}{3}\ln(2x-1)$ vyjádřete proměnnou x v závislosti na y.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}\ln(2x-1) \\ 3y &= \ln(2x-1) \\ e^{3y} &= e^{\ln(2x-1)} \\ e^{3y} &= 2x-1 \\ e^{3y}+1 &= 2x \\ \frac{e^{3y}+1}{2} &= x \end{aligned}$$

Hledané vyjádření je $x = \dfrac{e^{3y}+1}{2}$.

V předchozím příkladu jsme dokázali, že inverzní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{3}\ln(2x-1)$ má předpis $f^{-1}(x) = \frac{e^{3x}+1}{2}$. Níže vidíme že grafy obou funkcí jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu.



Úlohy k procvičení

Příklad 40. Z předpisu zadané funkce vyjádřete proměnnou x v závislosti na y:

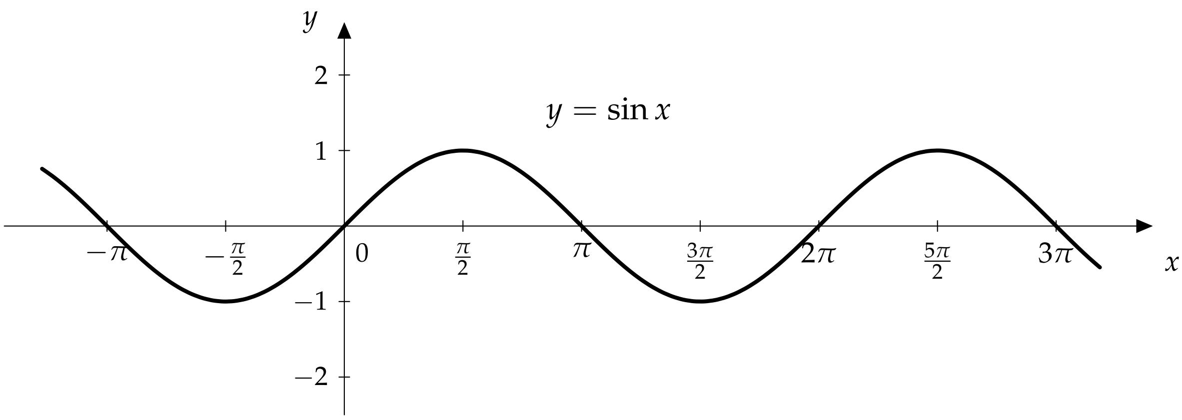
a) $y = 2\log_3(x) - 5$ b) $y = \log_2(3x+4)$ c) $y = \dfrac{1}{3}\ln(x+1)$

2.6 Goniometrické funkce

Funkce sinus

$$y = \sin x$$

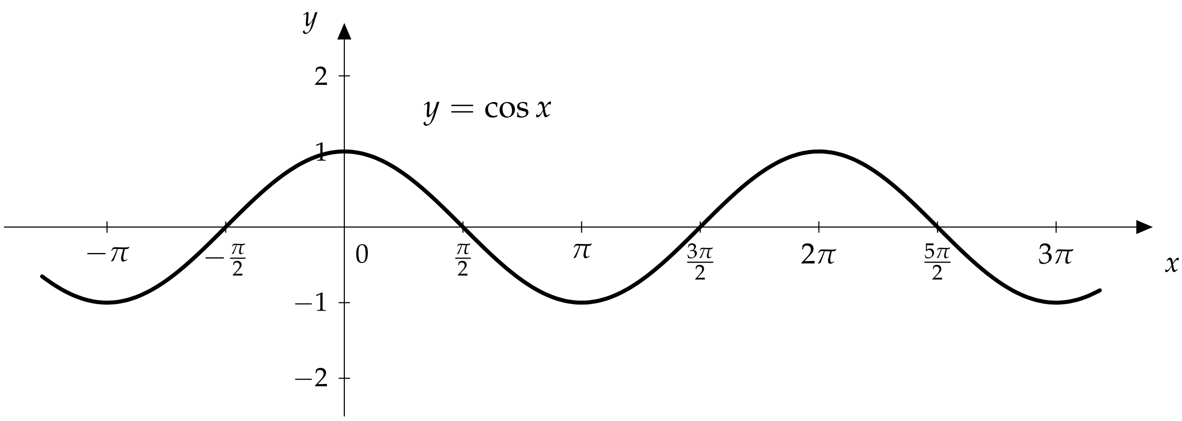
$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -1, 1 \rangle$, funkce je periodická s periodou 2π, je lichá, je ohraničená, funkce není prostá.



Funkce kosinus

$$y = \cos x$$

$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -1, 1 \rangle$, funkce je periodická s periodou 2π, je sudá, je ohraničená, funkce není prostá.



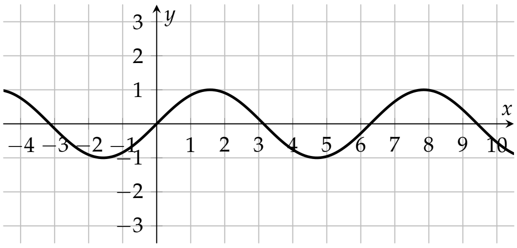
Úlohy k procvičení

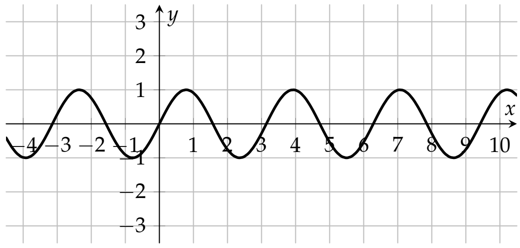
Příklad 41. Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

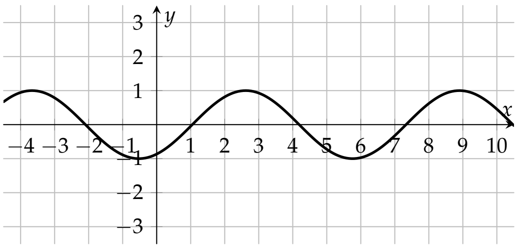
a) $y = \sin x$ c) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ e) $y = 2 + \sin x$

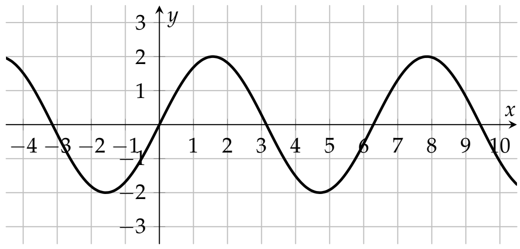
b) $y = \sin 2x$ d) $y = 2 \cdot \sin x$ f) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

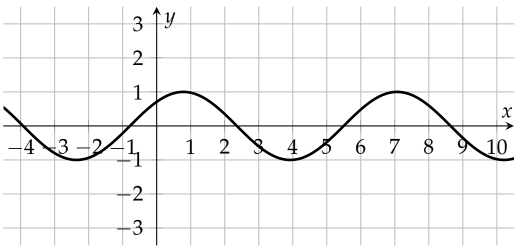
Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?

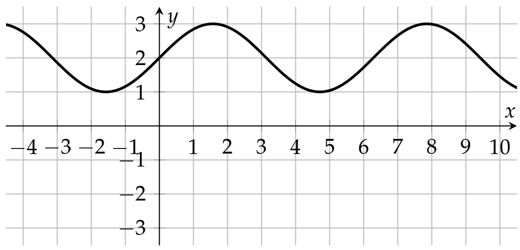
①


②


③


④


⑤


⑥


Úlohy k procvičení

Příklad 42. Nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = \sin x$ c) $y = \sin(4x)$ e) $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

b) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ d) $y = \sin x + 4$ f) $y = 4 \cdot \sin x$

Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?

Interaktivní pomůcka pro grafy funkce sinus

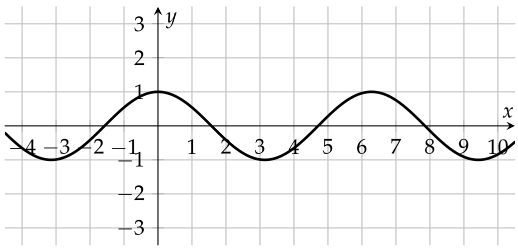
Úlohy k procvičení

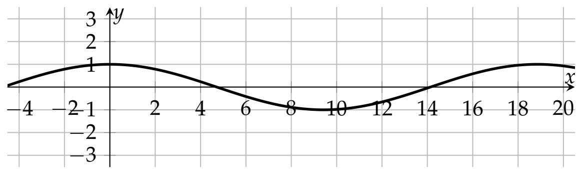
Příklad 43. Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

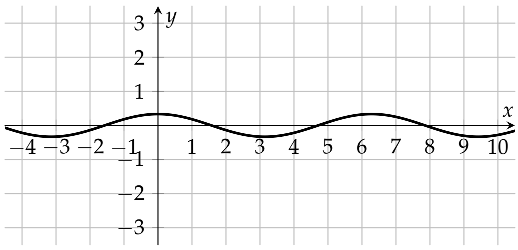
a) $y = \cos x$ c) $y = \frac{1}{3}\cos x$ e) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

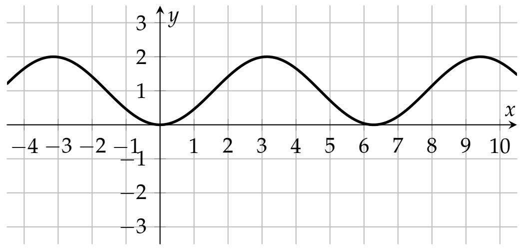
b) $y = \cos\frac{x}{3}$ d) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ f) $y = 1 - \cos x$

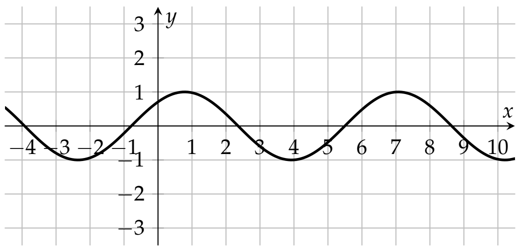
Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?

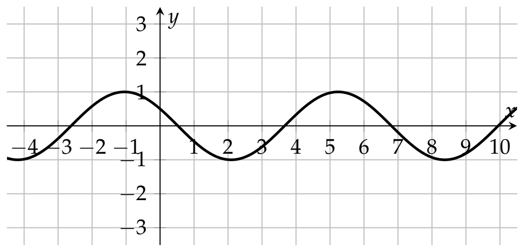
①


②


③


④


⑤


⑥


Úlohy k procvičení

Příklad 44. Nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = \cos x$ c) $y = \frac{1}{2}\cos x$ e) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ d) $y = 2 - \cos x$ f) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

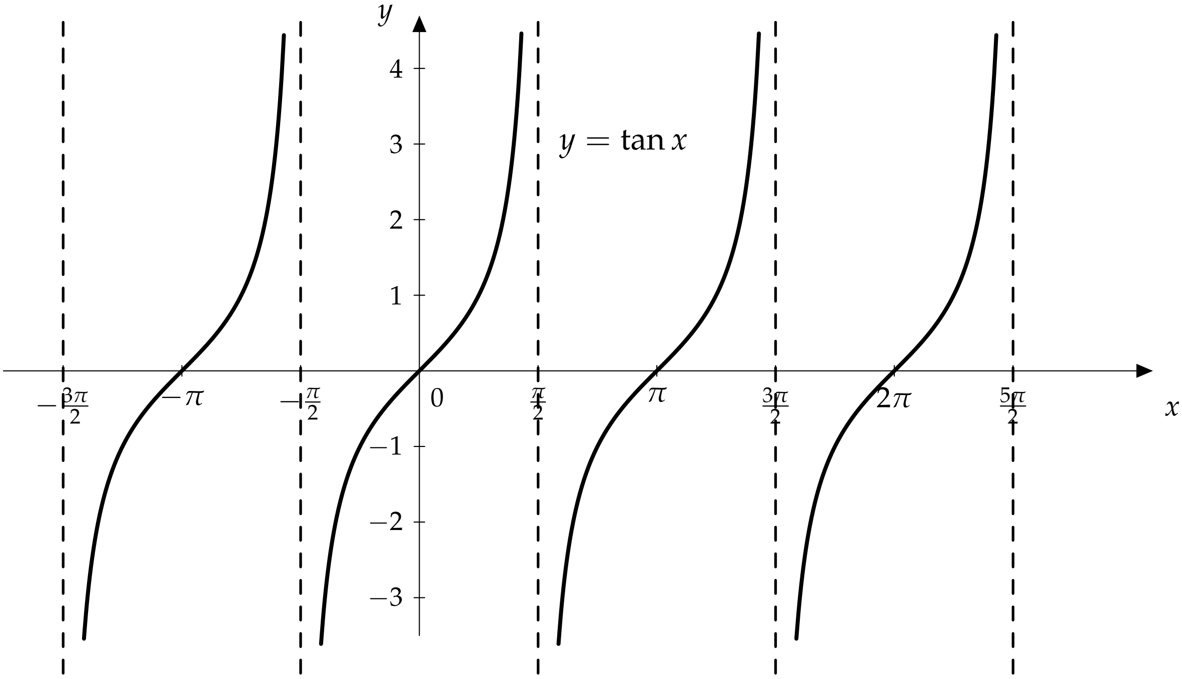
Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?

Interaktivní pomůcka pro grafy funkce kosinus

Funkce tangens

$$y = \tan x$$

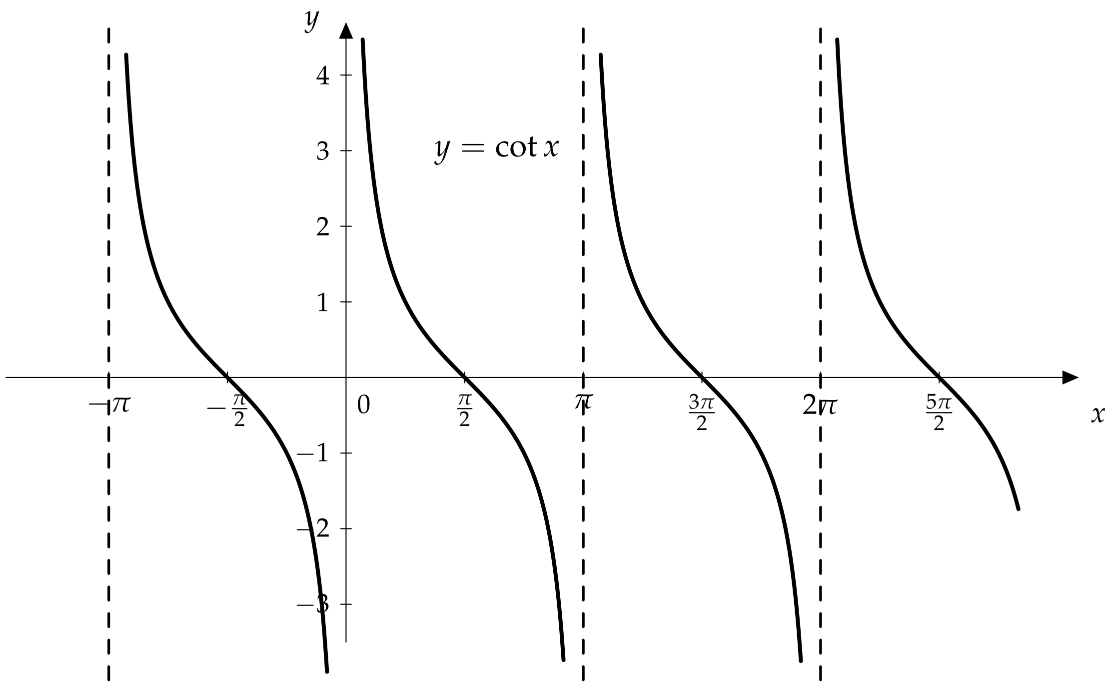
$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, $H_f = \mathbb{R}$, funkce je periodická s periodou π, je lichá, je neohraničená, funkce není prostá.



Funkce kotangens

$$y = \cot x$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $H_f = \mathbb{R}$, funkce je periodická s periodou π, lichá, neohraničená, funkce není prostá.



Hodnoty goniometrických funkcí pro vybrané hodnoty

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$
$\cot x$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Užitečné vzorce

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\tan x \cdot \cot x = 1$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$
$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$
$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$
$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$
$$\cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$

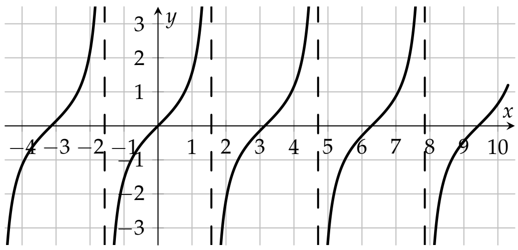
Úlohy k procvičení

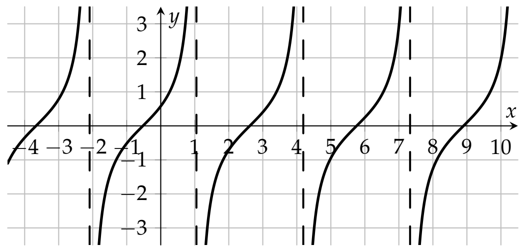
Příklad 45. Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

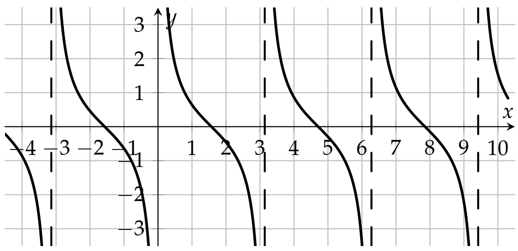
a) $y = \tan x$ c) $y = -\tan x$ e) $y = \cot 2x$

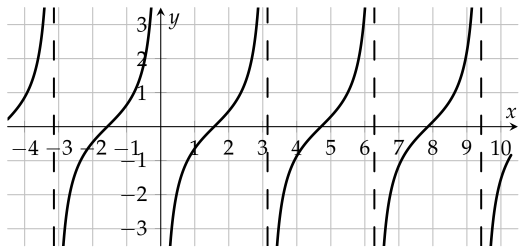
b) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ d) $y = \cot x$ f) $y = -\cot x$

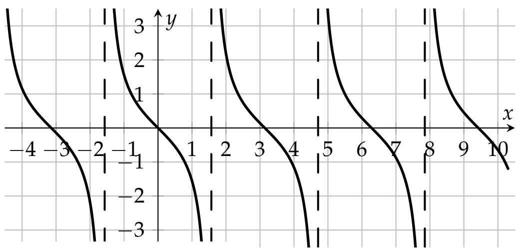
Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?

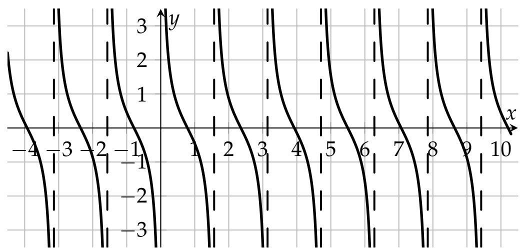
①


②


③


④


⑤


⑥


Úlohy k procvičení

Příklad 46. Nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = \tan x$ c) $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ e) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $y = \cot x$ d) $y = \cot\left(\frac{x}{2}\right)$ f) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Z grafu funkce určete definiční obor a obor hodnot. Určete průsečíky grafu funkce s osami x, y. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená?

Interaktivní pomůcka pro grafy funkcí tangens a kotangens

Příklad 47. Určete definiční obor funkce $f : y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

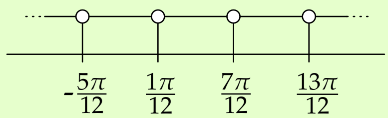
Argument funkce *kotangens* musí být různý od $k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Musí být tedy splněna podmínka

$$2x - \frac{\pi}{6} \neq k \cdot \pi, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}$$

Budeme řešit jednoduchou nerovnost, ze které vyjádříme x:

$$\begin{aligned} 2x - \tfrac{\pi}{6} &\neq k \cdot \pi \\ 2x &\neq \tfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi \\ x &\neq \tfrac{\pi}{12} + k \cdot \tfrac{\pi}{2} \quad \text{kde} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Hledaný definiční obor funkce můžeme znázornit graficky



nebo zapsat následovně $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Úlohy k procvičení

Příklad 48. Z předpisu zadané funkce určete její definiční obor:

a) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = \cot\left(\frac{2x + \pi}{5}\right)$

d) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

2.7 Cyklometrické funkce

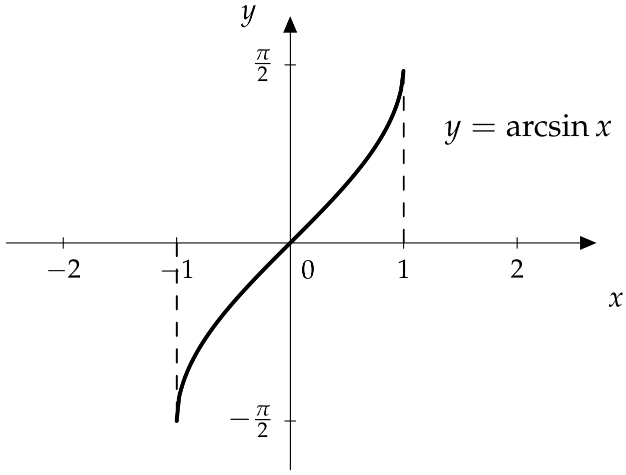
Funkce arkussinus

$$y = \arcsin x$$

$D_f = \langle -1, 1\rangle$, $H_f = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, funkce je prostá, lichá, ohraničená, rostoucí.

Poznámka

Funkce $y = \arcsin x$ je inverzní k funkci $y = \sin(x)$ na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.



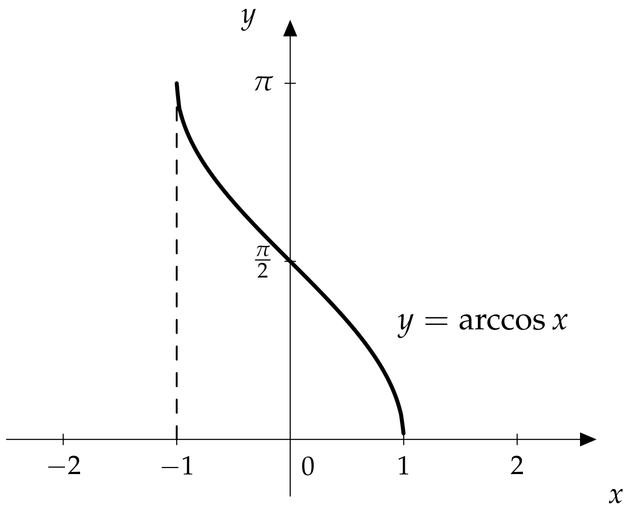
Funkce arkuskosinus

$$y = \arccos x$$

$D_f = \langle -1, 1\rangle$, $H_f = \langle 0, \pi\rangle$, funkce je prostá, ohraničená, klesající.

Poznámka

Funkce $y = \arccos x$ je inverzní k funkci $y = \cos(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.



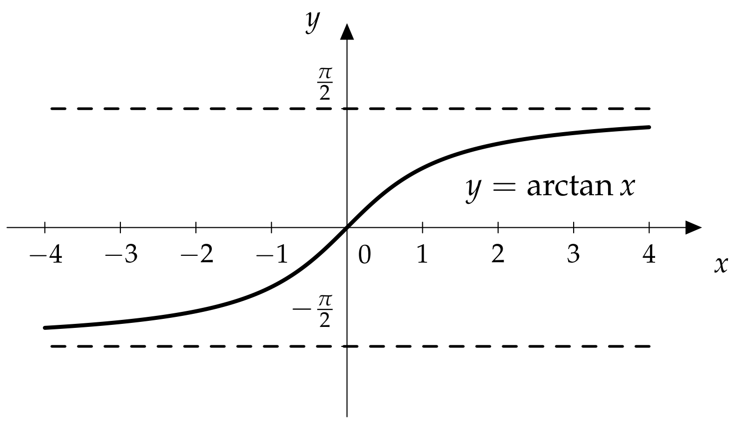
Funkce arkustangens

$$y = \arctan x$$

$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, funkce je lichá, ohraničená, rostoucí, prostá.

Poznámka

Funkce $y = \arctan x$ je inverzní k funkci $y = \tan(x)$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



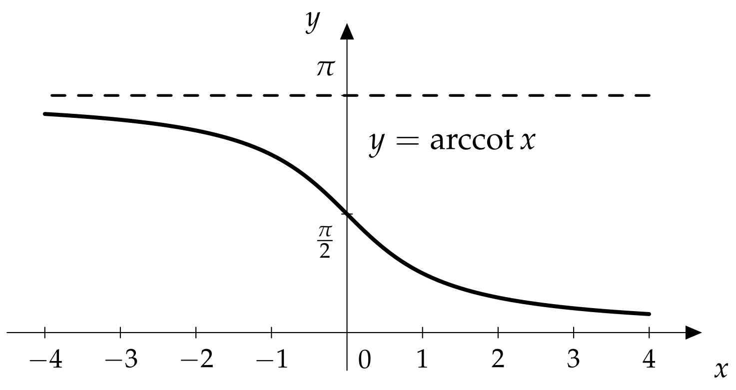
Funkce arkuskotangens

$$y = \operatorname{arccot} x$$

$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (0, \pi)$, funkce je ohraničená, klesající, prostá.

Poznámka

Funkce $y = \operatorname{arccot} x$ je inverzní k funkci $y = \cot(x)$ na intervalu $(0, \pi)$.



Příklad 49. Určete definiční obor funkce $f : y = \arcsin\left(\frac{2x-7}{3}\right)$.

Funkce $\arcsin(x)$ je definovaná na intervalu $\langle -1; 1\rangle$. To v našem případě znamená, že celý argument zadané funkce musí také ležet v tomto intervalu, tedy

$$-1 \leq \frac{2x-7}{3} \leq 1.$$

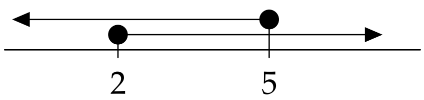
To jsou ve skutečnosti dvě nerovnice, každou budeme řešit zvlášť. Začněme levou nerovnicí:

$$\begin{array}{rcl} -1 & \leq & \frac{2x-7}{3} \\ -3 & \leq & 2x-7 \\ 4 & \leq & 2x \\ 2 & \leq & x \end{array}$$

Výsledkem první nerovnice je interval $\langle 2; \infty)$.
Nyní vyřešíme pravou nerovnici:

$$\begin{array}{rcl} \frac{2x-7}{3} & \leq & 1 \\ 2x-7 & \leq & 3 \\ 2x & \leq & 10 \\ x & \leq & 5 \end{array}$$

Výsledkem druhé nerovnice je interval $(-\infty; 5\rangle$.
Do definičního oboru budou patřit ta čísla, která vyhovují oběma nerovnicím, jinými slovy, výsledný definiční obor získáme jako průnik předchozích dvou výsledných intervalů.



Definičním oborem zadané funkce je interval $D_f = \langle 2; 5\rangle$.

Úlohy k procvičení

Příklad 50. Z předpisu zadané funkce určete její definiční obor:

a) $y = \arcsin(7-2x)$

b) $y = \arcsin\left(\frac{2x+6}{3}\right)$

c) $y = \arccos\left(x^2\right)$

d) $y = \arccos\left(\frac{1-2x}{5}\right)$

Příklad 51. Z předpisu funkce $f : y = \sin(x+\pi) - 1$ pro $x \in \left\langle -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\rangle$ vyjádřete proměnnou x v závislosti na y.

K řešení tohoto příkladu je třeba použít informaci uvedenou výše, že funkce $\arcsin(x)$ je inverzní k funkci $\sin(x)$ na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. To znamená, že pro každé x z tohoto intervalu platí

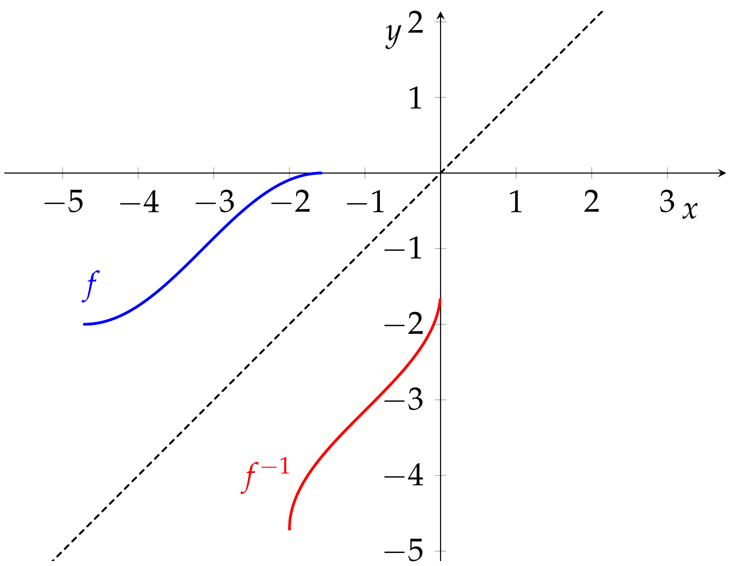
$$\arcsin(\sin(x)) = \sin(\arcsin(x)) = x.$$

Tedy

$$\begin{aligned} y &= \sin(x+\pi) - 1 \\ y+1 &= \sin(x+\pi) \\ \arcsin(y+1) &= \arcsin(\sin(x+\pi)) \\ \arcsin(y+1) &= x+\pi \\ \arcsin(y+1) - \pi &= x \end{aligned}$$

Hledané vyjádření je $x = \arcsin(y+1) - \pi$.

V předchozím příkladu jsme dokázali, že inverzní funkce k funkci $f(x) = \sin(x+\pi) - 1$ má předpis $f^{-1}(x) = \arcsin(x+1) - \pi$. Na obrázku níže můžeme vidět osově souměrné grafy obou funkcí.



Úlohy k procvičení

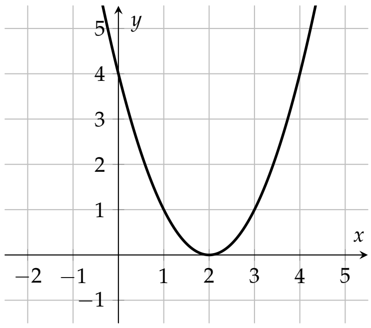
Příklad 52. Z předpisu zadané funkce vyjádřete proměnnou x v závislosti na y:

a) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $y = \sin\left(\frac{x+\pi}{2}\right)$ c) $y = \frac{\arccos(1-x)}{3}$

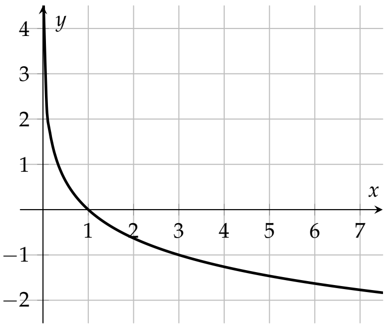
Úlohy k procvičení

Příklad 53. Určete předpis funkce.

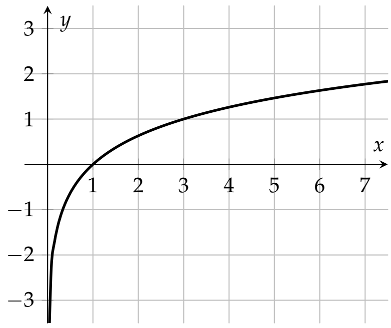
①



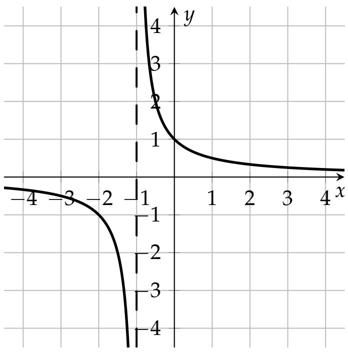
②



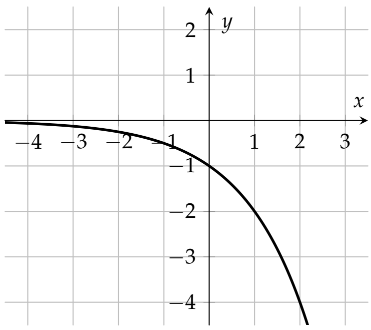
③



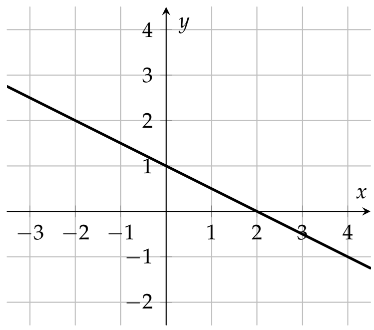
④



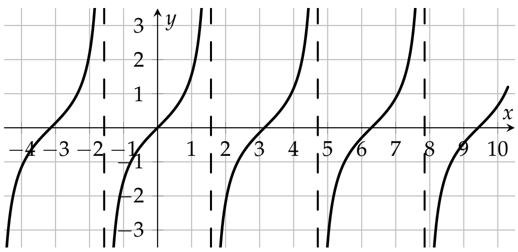
⑤



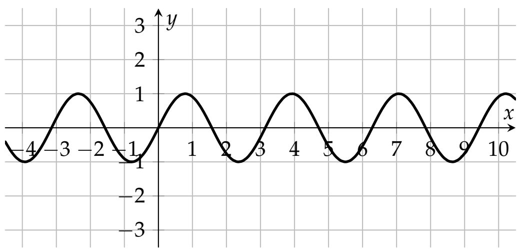
⑥



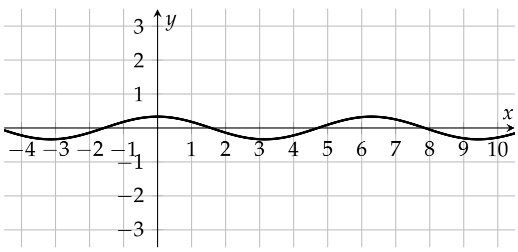
⑦



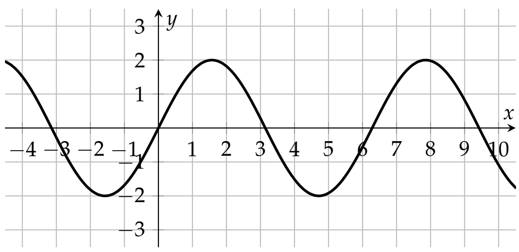
⑧



⑨



⑩



3 Řešené příklady

3.1 Definiční obor (řešené příklady)

Nejprve si shrneme všechna pravidla pro určování definičního oboru:

- *zlomek* - jmenovatel je různý od nuly
- *sudá odmocnina* - výraz pod odmocninou je nezáporný
- *logaritmus* - argument je kladný
- *tangens* - argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$
- *kotangens* - argument je různý od $k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$
- *arkussinus, arkuskosinus* - argument je z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

Příklad 54. Určete definiční obor funkce $f : y = \sqrt{4 - x^2} + \dfrac{1}{x-1}$.

V předpisu funkce se objevuje odmocnina a zlomek. Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tzn. $4 - x^2 \geq 0$ a výraz ve jmenovateli musí být různý od nuly, tzn. $x - 1 \neq 0$. Definiční obor musí splňovat tyto dvě podmínky:

$$4 - x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad x - 1 \neq 0$$

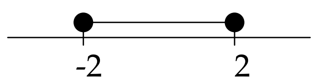
První podmínka je kvadratická nerovnice. Kvadratickou nerovnici budeme řešit metodou nulových bodů. Nejdřív určíme kořeny kvadratické rovnice (nulové body) pomocí rozkladu na součin nebo pomocí diskriminantu.

$$\begin{aligned} 4 - x^2 &= 0 \\ (2 - x) \cdot (2 + x) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2,\ x_2 = -2 \end{aligned}$$

Nulové body rozdělí reálnou osu na několik intervalů, zjistíme znaménko výrazu $(2 - x) \cdot (2 + x)$ v každém z nich pomocí tabulky.

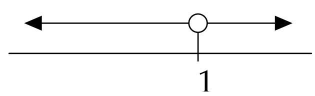
	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; \infty)$
$(2 - x) \cdot (2 + x)$	$-$	0	$\oplus$	0	$-$

Výraz nabývá nezáporné hodnoty na intervalu $\langle -2; 2 \rangle$. Vyznačíme tento interval na číselné ose.

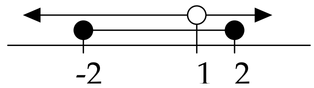


Řešení druhé podmínky je jednoduché:

$$\begin{aligned} x - 1 &\neq 0 \\ x &\neq 1 \end{aligned}$$



Z číselné osy můžeme vyčíst hledaný definiční obor jako průnik řešení dvou předchozích podmínek, které vyznačíme na společnou číselnou osu.



Definičním oborem zadané funkce je sjednocení intervalů $D_f = \langle -2; 1) \cup (1; 2\rangle$.

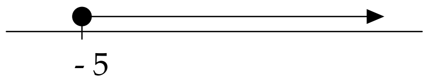
Příklad 55. Určete definiční obor funkce $f : y = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\ln(9-x)}$.

Všimněme si, že v předpisu funkce se objevuje sudá odmocnina, logaritmus a zlomek. Funkce má smysl pouze, pokud je pod sudou odmocninou nezáporné číslo, tzn. $x+5 \geq 0$, argument logaritmu kladné číslo, tzn. $9 - x > 0$ a zároveň musíme z definičního oboru vyloučit všechna čísla, která by po dosazení do zadání dala nulu ve jmenovateli, tzn. $\ln(9-x) \neq 0$. Do definičního oboru této funkce budou tedy patřit čísla, která po dosazení za x splňují následující tři podmínky:

$$x+5 \geq 0 \quad \wedge \quad 9-x > 0 \quad \wedge \quad \ln(9-x) \neq 0$$

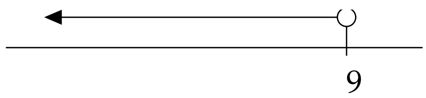
První podmínka je jednoduchá lineární nerovnice, kterou vyřešíme a její řešení znázorníme na číselné ose:

$$\begin{aligned} x+5 &\geq 0 \\ x &\geq -5 \end{aligned}$$



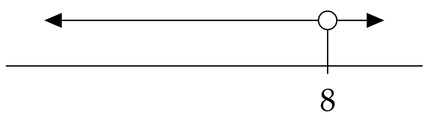
Druhá podmínka je jednoduchá lineární nerovnice, její řešení znázorníme na číselné ose:

$$\begin{aligned} 9-x &> 0 \\ -x &> -9 \\ x &< 9 \end{aligned}$$

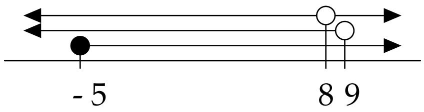


Třetí podmínka je složitější, potřebujeme vyřešit logaritmickou nerovnost. V prvním kroku nahradíme 0 na pravé straně nerovnosti příslušným logaritmem, v dalším kroku pak stačí položit do nerovnosti argumenty logaritmů. I toto řešení vyznačíme na číselnou osu.

$$\begin{aligned} \ln(9-x) &\neq 0 \\ \ln(9-x) &\neq \ln 1 \\ 9-x &\neq 1 \\ -x &\neq 1-9 \\ x &\neq 8 \end{aligned}$$



Řešení všech tří podmínek zakreslíme na jednu číselnou osu a definiční obor funkce najdeme jako průnik řešení všech podmínek (tzn. hledáme takovou část číselné osy, nad kterou jsou všechny tři čáry nebo jejich krajní body).



Definičním oborem dané funkce je sjednocení intervalů $D_f = \langle -5; 8) \cup (8; 9)$.

Příklad 56. Určete definiční obor funkce $f : y = \arcsin\left(\dfrac{x+3}{4-2x} + 2\right)$.

V předpisu funkce se objevuje funkce *arkussinus*, která má definiční obor omezen pouze na interval $\langle -1; 1\rangle$. V našem případě musí v tomto intervalu ležet celý argument funkce *arkussinus*, tzn. $-1 \leq \dfrac{x+3}{4-2x} + 2 \leq 1$. Dále se v předpisu funkce objevuje zlomek, z definičního oboru vyloučíme čísla, která by po dosazení do zadání dala nulu ve jmenovateli, tzn. $4 - 2x \neq 0$. Definiční obor funkce tedy omezují tyto dvě podmínky:

$$-1 \leq \frac{x+3}{4-2x} + 2 \leq 1 \qquad \wedge \qquad 4 - 2x \neq 0$$

První podmínka je soustava dvou nerovnic, kterou si nejdříve rozdělíme na dvě jednoduché nerovnice, které musí být splněny současně:

$$-1 \leq \frac{x+3}{4-2x} + 2 \qquad \wedge \qquad \frac{x+3}{4-2x} + 2 \leq 1$$

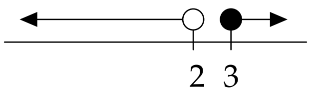
Protože obě tyto nerovnice obsahují zlomek s neznámou ve jmenovateli, upravíme je na nerovnice v podílovém tvaru a budeme řešit pomocí metody nulových bodů. Nejdříve na levé straně nerovnice vytvoříme nulu tím, že číslo převedeme na pravou stranu, pak výraz na pravé straně upravíme má tvar zlomku:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{x+3}{4-2x} + 2 \\ 0 &\leq \frac{x+3}{4-2x} + 3 \\ 0 &\leq \frac{x+3+3\cdot(4-2x)}{4-2x} \\ 0 &\leq \frac{-5x+15}{4-2x} \end{aligned}$$

Z čitatele zlomku určíme první nulový bod $x = 3$, ze jmenovatele dostaneme druhý nulový bod $x = 2$. Tyto body nám reálnou osu rozdělí na tři intervaly. Jedná se o neostrou nerovnici se znaménkem $\leq$, proto nulový bod z čitatele zahrneme do intervalů, nulový bod ze jmenovatele do intervalů nebude patřit, protože by po jeho dosazení vznikla nula ve jmenovateli. Znaménko výrazu $\dfrac{-5x+15}{4-2x}$ v každém z těchto intervalů zjistíme pomocí tabulky.

	$(-\infty;2)$	$(2;3\rangle$	$\langle 3;\infty)$
$-5x+15$	$+$	$+$	$-$
$4-2x$	$+$	$-$	$-$
$\dfrac{-5x+15}{4-2x}$	$\oplus$	$-$	$\oplus$

Výraz nabývá nezáporné hodnoty na dvou intervalech, které vyznačíme na číselné ose.



Podobně vyřešíme i druhou nerovnici.

$$\frac{x+3}{4-2x}+2\leq 1$$

$$\frac{x+3}{4-2x}+1\leq 0$$

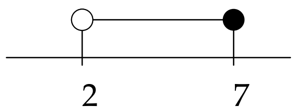
$$\frac{x+3+(4-2x)}{4-2x}\leq 0$$

$$\frac{-x+7}{4-2x}\leq 0$$

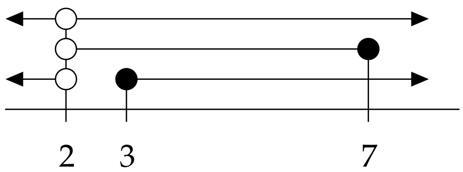
Nulové body jsou $x=7$ a $x=2$. Vytvoříme tabulku znamének na jednotlivých intervalech, nezapomeneme ke krajním bodům intervalů určit správný typ závorek.

	$(-\infty;2)$	$(2;7\rangle$	$\langle 7;\infty)$
$-5x+15$	$+$	$-$	$-$
$4-2x$	$+$	$+$	$-$
$\dfrac{-5x+15}{4-2x}$	$+$	$\ominus$	$+$

Vyhovující interval vyznačíme na číselné ose.



Třetí podmínka $4-2x\neq 0$ z definičního oboru vylučuje číslo $x=2$, všechna ostatní čísla podmínku splňují. Řešení všech tří podmínek vyznačíme na jednu číselnou osu a hledaný definiční obor určíme jako průnik jednotlivých řešení (tzn. hledáme takovou část číselné osy, nad kterou jsou všechny tři čáry nebo jejich krajní body).



Definičním oborem dané funkce je interval $D_f=\langle 3;7\rangle$.

Příklad 57. Určete definiční obor funkce $f: y=\dfrac{1}{1-\sin 3x}$.

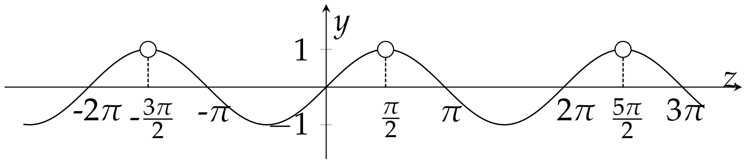
Tato funkce obsahuje zlomek, jeho jmenovatel musí být nenulový. Toto je jediná podmínka, která musí být splněna. Budeme tedy řešit goniometrickou nerovnost

$$1-\sin 3x\neq 0$$

V prvním kroku zavedeme substituci $z = 3x$ a vyřešíme nerovnost $1 - \sin z \neq 0$.

$$\begin{aligned} 1 - \sin z &\neq 0 \\ -\sin z &\neq -1 \\ \sin z &\neq 1 \end{aligned}$$

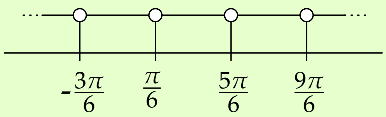
Připomeneme graf funkce $y = \sin x$, ve kterém vyznačíme body, v nichž funkce nabývá hodnoty 1:



Z grafu funkce je zřejmé, že funkce $\sin z$ nabývá funkční hodnotu 1 v bodech $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Místo z vrátíme do řešení původní argument $3x$ a nerovnost vyřešíme pro x:

$$\begin{aligned} z &\neq \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ 3x &\neq \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ x &\neq \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad \text{kde} k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Definiční obor funkce obsahuje všechna reálná čísla kromě $\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Můžeme ho vyznačit na číselné ose



nebo ho můžeme několika způsoby zapsat, například $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$
nebo
$D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{6} + (k+1) \cdot \frac{2\pi}{3} \right)$.

Úlohy k procvičení

Příklad 58. Určete podmínky a najděte definiční obor funkce.

a) $y = \ln \dfrac{2+x}{x} + \sqrt{4-3x-x^2}$

b) $y = \sqrt{(1-2x)\ln x}$

c) $y = \ln\left(2 + \dfrac{2x+6}{3-x}\right)$

d) $y = \dfrac{1}{(4-x)\ln(x-2)}$

e) $y = \dfrac{x}{\sin 2x}$

f) $y = \dfrac{1}{1-\cos 2x}$

g) $y = \arcsin\left(2 - \dfrac{x}{2x+3}\right)$

h) $y = \arccos\left(\dfrac{2x-1}{3x}\right)$

i) $y = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

Příklad 59. Řešené videopříklady

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x+3}}$

b) $f(x) = \arcsin \dfrac{x-1}{x}$

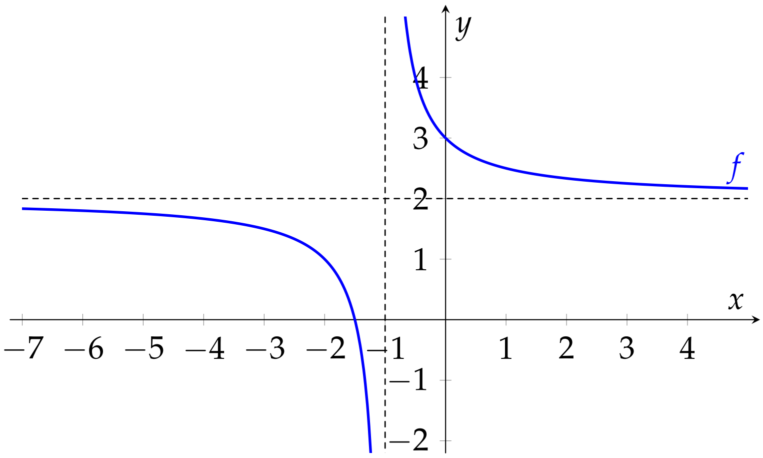
c) $f(x) = \log_3 \dfrac{x-6}{x} + \arcsin \dfrac{x+1}{6}$

3.2 Inverzní funkce (řešené příklady)

Inverzní funkci jsme definovali v kapitole 1.5.

Příklad 60. Nalezněte inverzní funkci f^{-1} k funkci $f : y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ a určete obory D_f a H_f a obory $D_{f^{-1}}$ a $H_{f^{-1}}$.

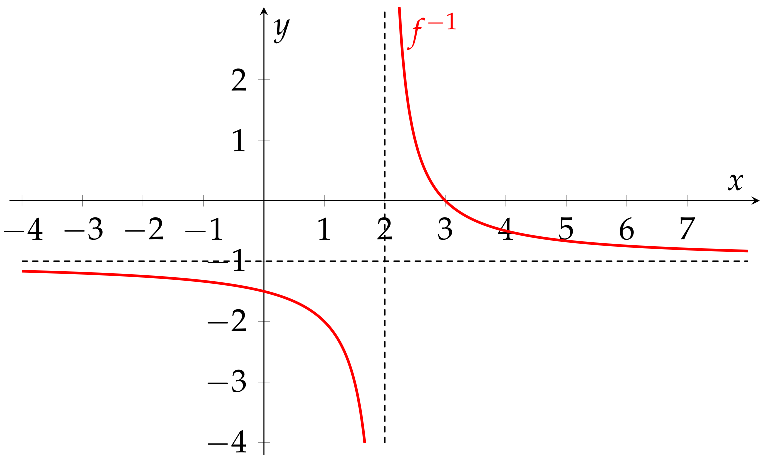
Načrtneme graf funkce f:



Z grafu funkce je zřejmé, že definiční obor funkce je $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$ a obor hodnot $H_f = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$. Z obrázku taky vidíme, že se jedná o funkci prostou, proto inverzní funkci k ní můžeme hledat na celém jejím definičním oboru.
Při hledání předpisu inverzní funkce vyměníme v původním předpisu x a y. Z rovnosti vyjádříme y. (Podobně, jako když hledáme řešení rovnice s neznámou y.)

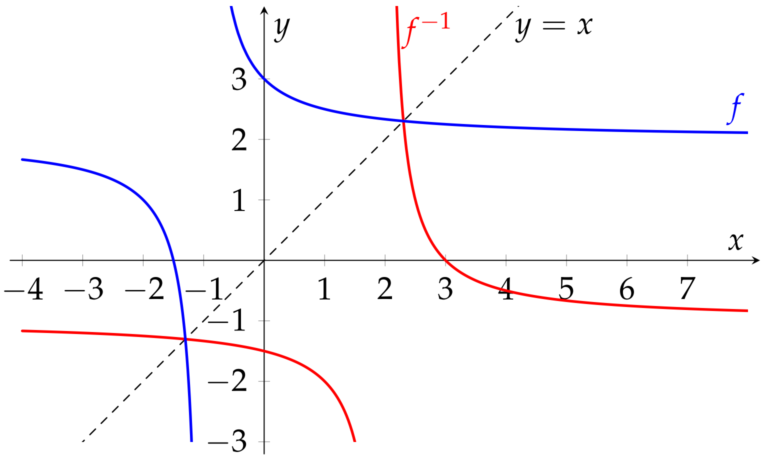
$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2x+3}{x+1} \\
x &= \frac{2y+3}{y+1} && | \cdot (y+1) \\
x \cdot (y+1) &= 2y+3 \\
xy + x &= 2y+3 && | -x-2y \\
xy - 2y &= 3-x \\
y \cdot (x-2) &= 3-x && | : (x-2) \\
y &= \frac{3-x}{x-2}
\end{aligned}
$$

Hledaná inverzní funkce má předpis $f^{-1} : y = \dfrac{3-x}{x-2}$.



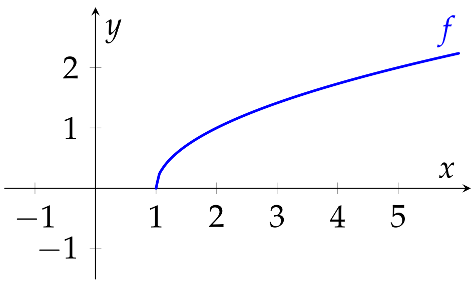
Hledaná inverzní funkce má předpis $f^{-1}: y = \frac{3-x}{x-2}$. Definiční obor inverzní funkce $D_{f^{-1}}$ je stejný jako obor hodnot funkce původní, tzn. $D_{f^{-1}} = (-\infty; 2) \cup (2; \infty) = H_f$, a naopak, obor hodnot inverzní funkce je roven definičnímu oboru funkce původní $H_{f^{-1}} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty) = D_f$.

Grafy funkce f a f^{-1} jsou osově souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu $y = x$.



Příklad 61. Nalezněte inverzní funkci f^{-1} k funkci $f: y = \sqrt{x-1}$ a určete obory D_f a H_f a obory $D_{f^{-1}}$ a $H_{f^{-1}}$.

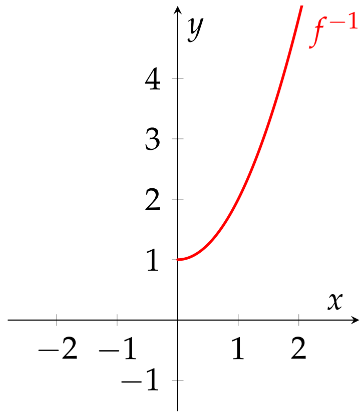
V předpisu funkce se objevuje sudá odmocnina, proto bude definiční obor funkce f omezen na interval $D_f = \langle 1; \infty)$. Graf funkce najdeme pomocí posunutí grafu elementární funkce $y = \sqrt{x}$ ve směru osy x.



Obor hodnot $H_f = \langle 0; \infty)$ a funkce je prostá, inverzní funkci můžeme hledat nad celým D_f. Vyměníme v původním předpisu x a y. Z rovnosti vyjádříme y:

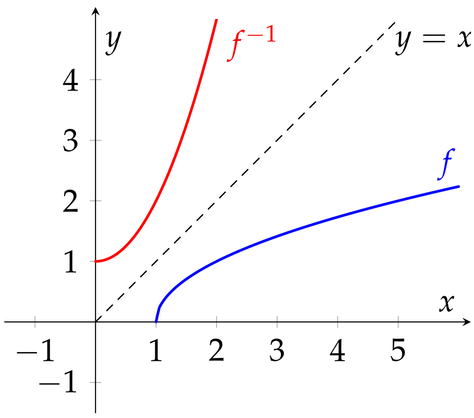
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x-1} \\ x &= \sqrt{y-1} && \Big|^{2} \\ x^2 &= y-1 && |+1 \\ x^2+1 &= y \\ y &= x^2+1 \end{aligned}$$

Hledaná inverzní funkce má předpis $f^{-1}: y = x^2 + 1$. Pro dvě navzájem inverzní funkce platí, že $D_{f^{-1}} = H_f$. Hledanou inverzní funkcí je v tomto případě část paraboly $y = x^2 + 1$ nad definičním oborem $D_{f^{-1}} = \langle 0; \infty)$.



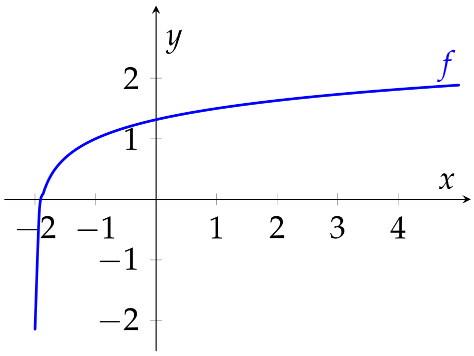
Hledaná inverzní funkce má předpis $f^{-1}: y = x^2 + 1$ s definičním oborem $D_{f^{-1}} = \langle 0; \infty)$. Obor hodnot funkce inverzní je stejný jako definiční obor funkce původní, tzn. $H_{f^{-1}} = D_f = \langle 1; \infty)$.

Po zakreslení obou grafů do stejné soustavy vidíme, že grafy jsou osově souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu.



Příklad 62. Nalezněte inverzní funkci f^{-1} k funkci $f: y = \frac{1}{2} \cdot \log_3 (x + 2) + 1$ a určete obory D_f a H_f a obory $D_{f^{-1}}$ a $H_{f^{-1}}$.

Definiční obor funkce je omezen podmínkou $x + 2 > 0$, kterou musí splňovat argument funkce *logaritmus*, tedy $D_f = (-2; \infty)$. Graf funkce je znázorněn na obrázku.

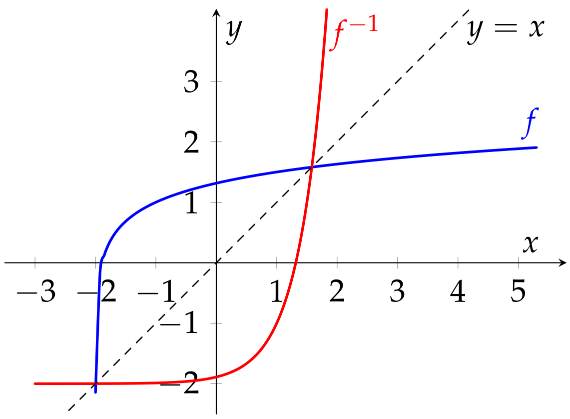


V tomto případě není obor hodnot funkce f z obrázku hned zřejmý. Je nutné si uvědomit, že oborem hodnot elementární funkce $y = \log_a x$ jsou všechna reálná čísla a transformace, kterými vznikla funkce f, nemají na obor hodnot vliv, proto $H_f = \mathbb{R}$. Vyměníme v původním předpisu x a y. Ze vztahu vyjádříme y:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2} \cdot \log_3 (x+2) + 1 \\
x &= \frac{1}{2} \cdot \log_3 (y+2) + 1 && | -1 \\
x - 1 &= \frac{1}{2} \cdot \log_3 (y+2) && | \cdot 2 \\
2x - 2 &= \log_3 (y+2) \\
\log_3 3^{(2x-2)} &= \log_3 (y+2) \\
3^{(2x-2)} &= y + 2 && | -2 \\
3^{(2x-2)} - 2 &= y \\
y &= 3^{(2x-2)} - 2
\end{aligned}$$

Hledaná inverzní funkce má předpis $f^{-1} : y = 3^{(2x-2)} - 2$, jejím definičním oborem je $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ a oborem hodnot $H_{f^{-1}} = (-2, \infty)$.

Grafy jsou opět osově souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu.



Úlohy k procvičení

Příklad 63. Určete inverzní funkci, její definiční obor a obor hodnot. Zakreslete graf funkce a funkce inverzní.

a) $f: \ y = 2\sqrt{x} + 1$

b) $f: \ y = \frac{3}{4}x - 2$

c) $f: \ y = 4 + \ln \dfrac{x}{2}$

d) $f: \ y = 2^{3x+1}$

e) $f: \ y = \arctan(x - 2)$

f) $f: \ y = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \ x \in \left\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

4 Limita a spojitost

4.1 Rozšíření množiny reálných čísel

Definice 4.12 Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšíříme o prvky $\infty, -\infty$ a nazveme **rozšířená množina reálných čísel** $\mathbb{R}^\star$:

$$\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}\,.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme **nevlastní body**, body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **vlastní body**.

Vlastnosti množiny $\mathbb{R}^\star$

Pro $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$-\infty < c < \infty$$

Součet a rozdíl

$$c + \infty = \infty, \quad c - \infty = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$$

Podíl

$$\frac{c}{\infty} = 0, \qquad \frac{c}{-\infty} = 0$$

Součin

$$\begin{aligned} &\infty \cdot \infty = \infty, \qquad \infty \cdot (-\infty) = -\infty, \qquad -\infty \cdot (-\infty) = \infty \\ &\text{pro } c > 0: \ c \cdot \infty = \infty, \qquad c \cdot (-\infty) = -\infty \\ &\text{pro } c < 0: \ c \cdot \infty = -\infty, \qquad c \cdot (-\infty) = \infty \end{aligned}$$

Další operace definujeme pomocí komutativnosti sčítání a násobení.

Poznámka

Výrazy

$$\infty - \infty, \ \infty \cdot 0, \ \frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ 0^0, \ \infty^0, \ 1^\infty$$

nejsou definovány a nazveme je **neurčité výrazy**.

4.2 Limita funkce

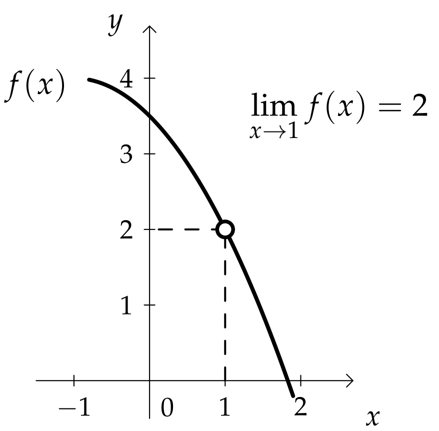
Limita funkce nám pomůže prozkoumat chování funkce v bodech, kde není tato funkce definována. Výsledek výpočtu limity je buď její hodnota z $\mathbb{R}^\star$ nebo zjištění, že limita neexistuje.
Při výpočtu často narazíme na neurčitý výraz, což znamená, že výraz v limitě musíme upravit tak, aby již nebyl neurčitý a tedy jsme ho uměli spočítat.
Nejprve si popíšeme smysl symbolu $\rightarrow$, který budeme potřebovat v definici limity. Máme číselnou posloupnost a_n pro $n = 1, \ldots, \infty$ a tato čísla se mohou přibližovat k určité hodnotě a, což označíme $a_n \rightarrow a$.
Například posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$ je tvořena čísly $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ A vidíme, že hodnoty se blíží k nule.
Jiným příkladem je posloupnost $(-1)^n$, kterou tvoří čísla $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ a tato se zjevně k žádné hodnotě neblíží.

Definice 4.13 Je dána funkce f a body $x_0 \in \mathbb{R}^\star$, $a \in \mathbb{R}^\star$. Řekneme, že **funkce f má v bodě x_0 limitu rovnu a**, pokud platí $x_n \to x_0$, pak $f(x_n) \to a$. Značíme:

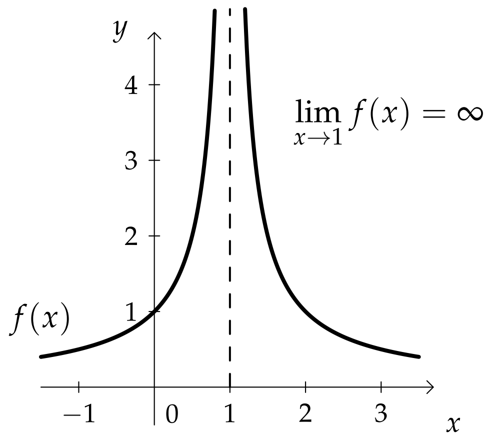
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Poznámka

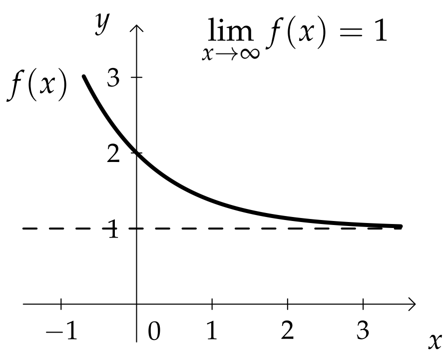
Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ řekneme že má funkce **vlastní (konečnou) limitu**.
Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$ řekneme že má funkce **nevlastní (nekonečnou) limitu**.
Pokud $x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$ řekneme že má funkce **vlastní (konečnou) limitu v nevlastním bodě**.
Pokud $x_0 \pm \infty$, $a = \pm\infty$ řekneme že má funkce **nevlastní (nekonečnou) limitu v nevlastním bodě**.



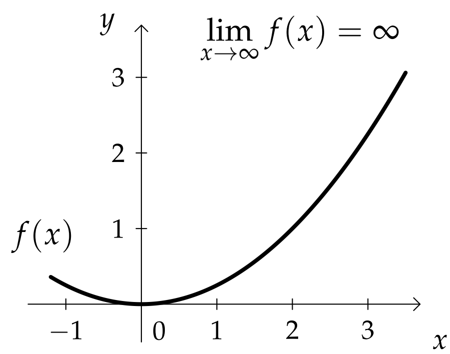
obr. 1: Vlastní limita



obr. 2: Nevlastní limita



obr. 3: Vlastní limita v nevlastním bodě



obr. 4: Nevlastní limita v nevlastním bodě

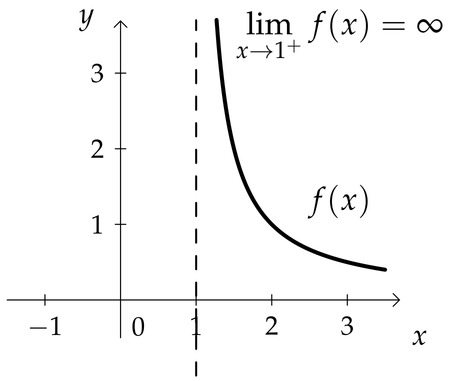
Jednostranné limity funkce

Definice 4.14 Je dána funkce f a body $x_0 \in \mathbb{R}^\star$, $a \in \mathbb{R}^\star$. Řekneme, že **funkce f má v bodě x_0 limitu zprava rovnu a**, pokud platí $x_0 < x_n \to x_0$, pak $f(x_n) \to a$. Značíme:

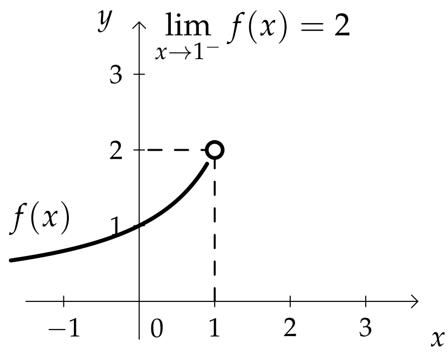
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$$

Definice 4.15 Je dána funkce f a body $x_0 \in \mathbb{R}^\star$, $a \in \mathbb{R}^\star$. Řekneme, že **funkce f má v bodě x_0 limitu zleva rovnu a**, pokud platí $x_0 > x_n \to x_0$, pak $f(x_n) \to a$. Značíme:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$$



obr. 5: Limita zprava



obr. 6: Limita zleva

Věta 4.2 Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu limitu.

Funkce má i nejvýše jednu limitu zleva a nejvýše jednu limitu zprava.

Věta 4.3 Funkce f má v bodě x_0 limitu právě tehdy, má-li v tomto bodě limitu zprava i zleva a tyto limity se rovnají.

Operace s limitami

Nechť mají funkce $f(x)$ a $g(x)$ limitu v bodě x_0 pak platí:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\text{pokud platí } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0, \text{ pak } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

Příklad 64. Vyřešte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$

a) Elementární funkce jsou spojité na svém definičním oboru. Jestliže bod x_0 patří do definičního oboru funkce, bude limita v tomto bodě x_0 rovna funkční hodnotě $f(x_0)$. Každou limitu se vždy pokusíme nejdřív vyřešit dosazením x_0 do předpisu funkce:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{2^2-9}{2^2+2-12} = \frac{4-9}{4+2-12} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$$

b) Podobně vyřešíme i druhou limitu

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{(-3)^2-9}{(-3)^2+(-3)-12} = \frac{9-9}{9-3-12} = \frac{0}{-6} = 0$$

c) Stejným způsobem začneme řešit i třetí limitu, po dosazení $x_0 = 3$ do předpisu funkce

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{3^2-9}{3^2+3-12} = \frac{9-9}{9+3-12} = \text{„}\frac{0}{0}\text{“}$$

dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, který zatím o hodnotě limity nic nevypovídá.

Jestliže předpis funkce vhodně upravíme pomoci ekvivalentních úprav, funkční hodnoty v bodech v okolí bodu x_0 se nezmění a tím ani hodnota hledané limity. Pokud bude nově upravená funkce navíc definovaná i v bodě x_0, budeme pak moct pro výpočet hledané limity opět využít funkční hodnotu v tomto bodě.

Takovou funkci vytvoříme krácením „problematické“ závorky $(x-3)$. Ve jmenovateli tuto závorku získáme rozkladem kvadratického trojčlenu na dvě závorky využitím Vietových vzorců, v čitateli pak pomocí rozkladu na součin závorek podle vzorce $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+4}{x+3} = \frac{3+3}{3+4} = \frac{6}{7}$$

Po zkrácení výrazu a dosazení bylo už snadné určit hledanou limitu.

d) I po dosazení do čtvrté limity

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} = \frac{3^2-9}{\sqrt{3+1}-2} = \frac{9-9}{\sqrt{4}-2} = \text{„}\frac{0}{0}\text{“}$$

dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Problém můžeme odstranit podobně jako u předchozí limity krácením závorky $(x-3)$. V čitateli tuto závorku opět získáme rozkladem výrazu podle vzorce $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x+1}-2}$$

Stejný vztah využijeme i ve jmenovateli, tentokrát ale pro usměrnění zlomku a odstranění odmocniny. Pokud výraz $\sqrt{x+1}-2$ vynásobíme výrazem $\sqrt{x+1}+2$, pak podle předchozího vzorce platí $(\sqrt{x+1}-2)\cdot(\sqrt{x+1}+2)=(\sqrt{x+1})^2-2^2$. Abychom nezměnili hodnotu výrazu, je potřeba stejnou závorku přidat i do čitatele zlomku. Tento postup nazýváme rozšířením zlomku. Po dalších úpravách a dosazení pak najdeme hodnotu limity:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(\sqrt{x+1}-2)}\cdot\frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-2^2}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{1}=24.$$

Úlohy k procvičení

Příklad 65. Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

c) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-3x-10}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{2x^2-8x+6}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$

Poznámka

Typ limity „$\frac{k}{0}$"

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k,\ k>0\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0, g(x)>0 \text{ na okolí bodu } x_0\end{array}\right\}\text{pak }\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

symbolicky značíme $\frac{k^+}{0^+}=\infty$

Obdobně počítáme limity $\frac{k^-}{0^+}=-\infty$, $\frac{k^+}{0^-}=-\infty$, $\frac{k^-}{0^-}=\infty$.

Příklad 66. Určete limitu funkce:

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2-9}{x^2+x-12}$$

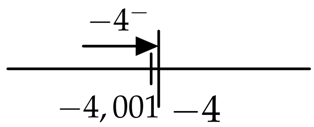
Tato limita nám po dosazení dá výraz:

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{(-4)^2-9}{(-4)^2+(-3)-12} = \frac{16-9}{16-4-12} = „\frac{k}{0}“$$

Neurčitý výraz typu „$\frac{k}{0}$“ může nabývat pouze dvě hodnoty a to $+\infty$ anebo $-\infty$. Je třeba pouze vyhodnotit kombinaci znamének v čitateli a ve jmenovateli. Tato znaménka se můžou lišit na levém a pravém okolí bodu. Proto budeme hned od začátku uvažovat dvě jednostranné limity, tedy limitu zleva, kde $x \to -4^-$ a limitu zprava, kde $x \to -4^+$:

$$\lim_{x\to -4^-} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} \qquad\qquad \lim_{x\to -4^+} \frac{x^2-9}{x^2+x-12}.$$

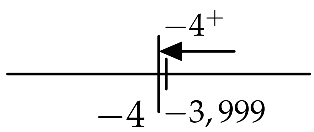
Vyřešíme nejdříve limitu zleva $\lim\limits_{x\to -4^-} \frac{x^2-9}{x^2+x-12}$. Dosaďme do výrazu nějaké číslo z levého okolí bodu -4,



označme ho -4^-, pro lepší představu to může být například číslo -4.001. Využijeme také možnost krácení výrazu v limitě. Pak dostaneme

$$\lim_{x\to -4^-} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \lim_{x\to -4^-} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to -4^-} \frac{x+3}{x+4} =$$
$$= \frac{-4^-+3}{-4^-+4} = \frac{-1^-}{0^-} = \frac{-1}{-0} = \infty.$$

Pro limitu zprava je postup podobný, do limity dosadíme bod -4^+ z pravého okolí čísla -4.



Dostaneme

$$\lim_{x\to -4^+} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \lim_{x\to -4^+} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to -4^+} \frac{x+3}{x+4} =$$
$$= \frac{-4^++3}{-4^++4} = \frac{-1^+}{0^+} = \frac{-1}{+0} = -\infty.$$

Protože se limita zleva a limita zprava nerovnají, pak limita $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2-9}{x^2+x-12}$ neexistuje.

Úlohy k procvičení

Příklad 67. Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-9}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to \pm 5} \dfrac{x+1}{x^2-25}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

Poznámka

Limita v nevlastním bodě typu „polynom/polynom“ je rovna $k \in \mathbb{R}^\star$ jestliže polynomy v čitateli i ve jmenovateli jsou stejného stupně. Pokud je stupeň polynomu v čitateli větší než ve jmenovateli, bude limita rovná $\pm\infty$. Jestliže je naopak polynom většího stupně ve jmenovateli, je limita rovná 0.

Příklad 68. Určete limitu funkce v nevlastním bodě ∞:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-9}{2x^2+x-12}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-9}{2x^2+x-12}$

a) Po „dosazení“ nekonečna do výrazu dostaneme neurčitý výraz „$\frac{\infty}{\infty}$“. Opět se pokusíme pomoci elementárních úprav převést výraz na určitý tvar. Pomůžeme si vytýkáním před závorku a faktem, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$. Vytýkat budeme v čitateli i ve jmenovateli nejvyšší mocninu x, kterou pak krátíme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-9}{2x^2+x-12} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3-\frac{9}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{9}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}} = \frac{3-0}{2+0-0} = \frac{3}{2}$$

b) Podobně i druhá limita:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-9}{2x^2+x-12} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1-\frac{9}{x^3})}{x^2(2+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\frac{9}{x^3})}{(2+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2})} =$$

$$= \frac{\infty\cdot(1-0)}{(2+0-0)} = \frac{\infty\cdot 1}{2} = \infty$$

Úlohy k procvičení

Příklad 69. Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-x+1}{5x^3-6x^2+3x+8}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4-10x^2+7}{3x^3-2x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-x+1}{5x^4-6x^3+2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4-10x^2+7}{3x^4-2x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-5}{2-7x}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5}{2x^3+3x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^6+3x+5}{-2x^4-4x}$

Poznámka

Další vzorce pro výpočet limity:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Příklad 70. Určete limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+2x}{2+2x}\right)^{x+5}$$

Jedná se o limitu typu „1^∞“. Pro řešení tohoto typu limity používáme vzorec $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$. Nejdřív výraz uvnitř závorky upravíme na tvar $\left(1+\frac{a}{bx+c}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2+1}{2x+2}\right)^{x+5} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+2}+\frac{1}{2x+2}\right)^{x+5} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+2}\right)^{x+5}$$

Zlomek, který po této úpravě vznikl uvnitř závorky, se liší od zlomku ve výše uvedeném vzorci a proto vzorec zatím využít nelze. Zavedeme pro tento zlomek substituci $\frac{1}{2x+2} = \frac{1}{z}$. Samozřejmě zavedeme substituce i ve výraz v exponentu, tedy exponent bude místo neznámé x obsahovat novou neznámou z. Ze substituce si neznámou x vyjádříme:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x+2} &= \frac{1}{z} && \mid z\cdot(2x+2)\\
z &= 2x+2 && \mid -2\\
z-2 &= 2x && \mid :2\\
\frac{z}{2}-1 &= x
\end{aligned}$$

Uvědomme si, že když $x\to\infty$, pak i $(2x+2)\to\infty$ a tedy také $z\to\infty$.

Po nahrazení zlomku a neznámé x v exponentu dostaneme novou limitu:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+2}\right)^{x+5}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{(\frac{z}{2}-1)+5}$$

Pomocí známých vztahů výraz v limitě upravíme:

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{(\frac{z}{2}-1)+5}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{z}{2}+4}=\lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4}$$

Nyní pro výraz uvnitř hranaté závorky využijeme vzorec $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$, pak je hodnota hledané limity

$$\lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4}=[\mathrm{e}]^{\frac{1}{2}}\cdot(1+0)^{4}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

Úlohy k procvičení

Příklad 71. Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{4+x}\right)^{2x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+2}$

Příklad 72. Řešené videopříklady

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-x^2}{x^3-x}$

b) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x-9}{x^3-9x^2+x-9}$

c) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-3}{x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+4x-3}{7x^3+9x^2+5x-4}$

4.3 Spojitost

Definice 4.16 Nechť funkce $f(x)$ je definována na nějakém okolí bodu x_0 a platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

pak řekneme, že **funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0**.

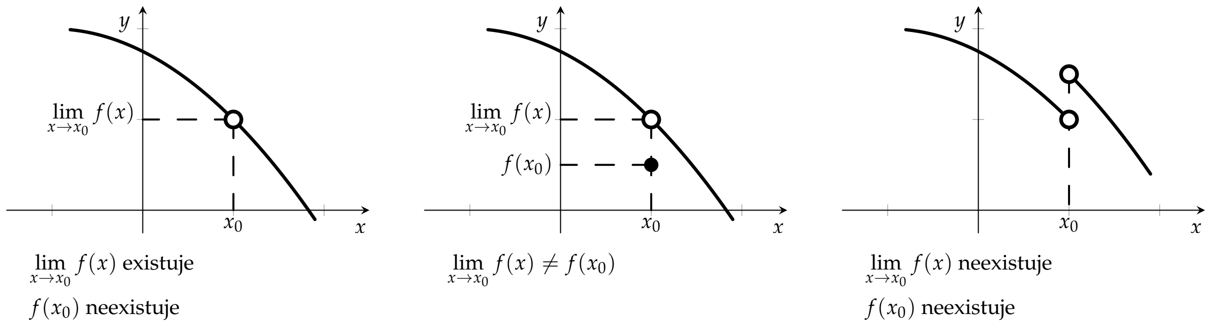
Poznámka

Obdobně definujme spojitost zprava nebo zleva.

Definice 4.17 Nechť $I \subseteq D_f$, řekneme, že **funkce je spojitá na intervalu** I, je-li spojitá v každém bodě intervalu I. Patří-li do intervalu dolní mez intervalu, je v něm spojitá zprava, a patří-li do něj horní mez intervalu, je v něm spojitá zleva.

Věta 4.4 Všechny elementární funkce jsou spojité na svých definičních oborech.

Bod, ve kterém funkce není spojitá, nazýváme **bod nespojitosti**.



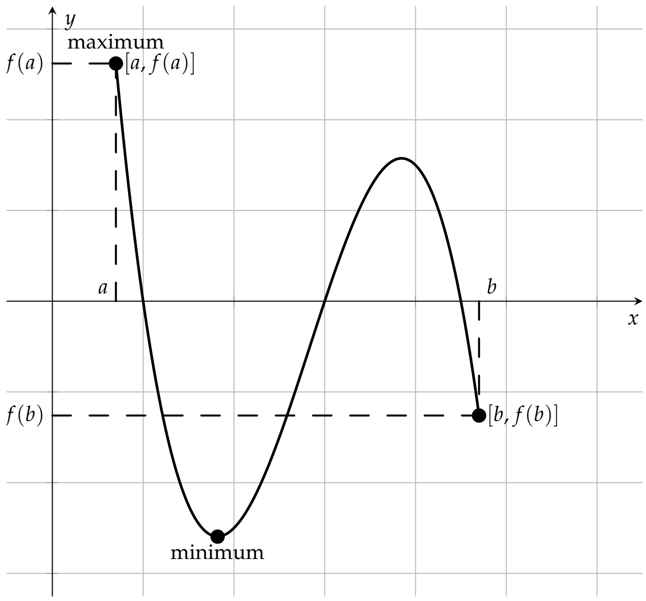
Body nespojitosti

Věty o spojitých funkcích

Věta 4.5 Weistrassova
Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak f je na tomto intervalu ohraničená.

Poznámka

Je-li funkce spojitá na uzavřeném intervalu, pak na tomto intervalu nabývá svého minima a maxima.

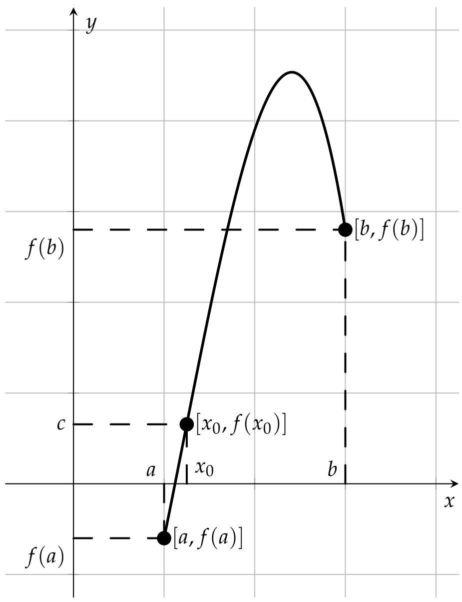


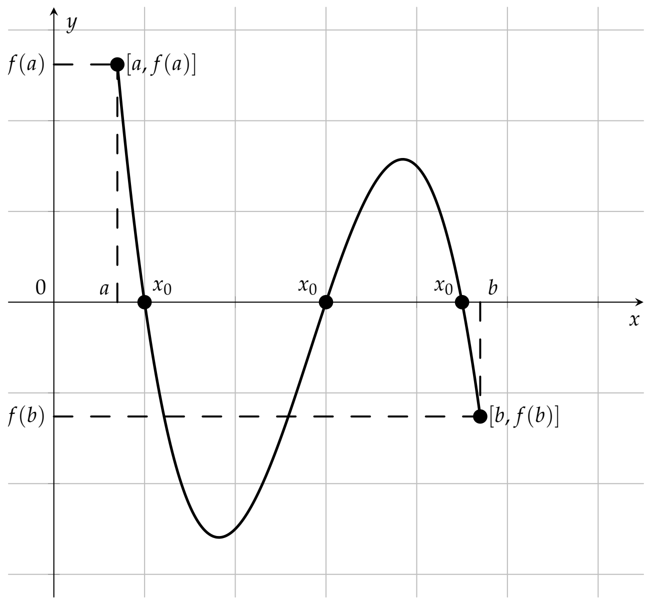
Weistrassova věta a její důsledky

Věta 4.6 Bolzano-Cauchyho
Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a) \neq f(b)$. Číslo c leží mezi hodnotami $f(a)$ a $f(b)$. Pak existuje aspoň jedno $x_0 \in (a, b)$, pro které platí $f(x_0) = c$.

Poznámka

Zvolme $c = 0$.
Je-li funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ opačná znaménka. Pak existuje aspoň jedno $x_0 \in (a, b)$, pro které platí $f(x_0) = 0$.





Název: Pracovní sešit do matematiky: Funkce jedné proměnné

Katedra: Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

Autoři: Zuzana Morávková, Alžběta Lampartová, Monika Jahodová

Místo, rok, vydání: Ostrava, 2024, 1. vydání

Počet stran: 65

Vydala: Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava

Neprodejné

ISBN 978-80-248-4777-1 (on-line)