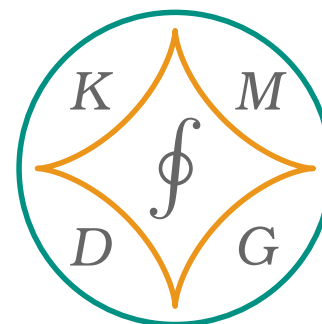


Matematika II: Pracovní listy

Zuzana Morávková, Radomír Paláček, Petra Schreiberová, Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava



Předmluva

Studijní materiály jsou určeny pro studenty kombinované i prezenční formy vybraných fakult Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava, a to pro předmět Matematika II.

Pracovní listy jsou rozděleny do několika bloků.

Teoretická část (**Listy k přednáškám**) je určena pro přímou výuku v rámci jednotlivých přednášek. Nejedná se o náhradu skript. Proto nedoporučujeme pročítat tento text bez ilustrací, bez vysvětlení významu vět a bez podpůrných příkladů. A také nedoporučujeme považovat tyto materiály za náhradu účasti na výuce.

Blok obsahující řešené příklady (**Řešené příklady**) je zaměřen především na samostudium.

Listy s neřešenými příklady (**Pracovní listy do cvičení**) lze využít v rámci cvičení pro studenty prezenčního studia a pro domácí práci studentů kombinované formy.

Blok řešených slovních úloh (**Aplikované úlohy**) slouží k demonstraci vybraného matematického aparátu.

Závěrečný blok (**Testy**) slouží k ověření stupně zvládnutí látky na cvičeních.

Poděkování

Pracovní listy vznikly za finanční podpory projektu FRVŠ 1103/2013 „Vytvoření e-learningových kurzů s multimediálními studijními materiály pro matematické předměty na vybraných fakultách Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava“ a Katedry matematiky a deskriptivní geometrie VŠB-TUO.

Jak pracovat s pracovními listy

Pokud si vytisknete tyto listy, pak si můžete do svého výtisku vpisovat vysvětlující komentáře a příklady, které uslyšíte na přednášce. Nemusíte se tak zdržovat přepisováním definic a vět, ale můžete se lépe soustředit na jejich pochopení.

Orientaci v textu usnadňuje interaktivní obsah (**Obsah**). Jednotlivé bloky jsou vzájemně propojeny pomocí interaktivních odkazů (**zelená čísla listů**). Dále jsou pracovní listy doplněny o komentovaná videa (**Video**) a interaktivní pomůcky v programu GeoGebra, .

Na webové stránce <http://mdg.vsb.cz/portal> jsou umístěny tyto pracovní listy včetně verze pro tisk a veškerých doplňujících materiálů.

Příjemně strávený čas s matematikou přeje kolektiv autorů.

Obsah

Listy k přednáškám

1	Integrální počet funkcí jedné proměnné	10
1.1	Neurčitý integrál	11
1.1.1	Primitivní funkce	11
1.1.2	Definice a vlastnosti	12
1.1.3	Tabulkové integrály	13
1.1.4	Metoda per partes	14
1.1.5	Integrace substitucí	16
1.1.6	Integrace racionální lomené funkce	19
1.1.7	Integrace goniometrických funkcí	21
1.2	Určitý integrál	23
1.2.1	Geometrický význam určitého integrálu	23
1.2.2	Definice	24
1.2.3	Vlastnosti určitého integrálu	25
1.2.4	Substituce v určitém integrálu	26
1.2.5	Metoda per partes v určitém integrálu	26
1.3	Geometrické aplikace určitého integrálu	27
1.3.1	Obsah rovinného útvaru	27
1.3.2	Délka rovinné křivky	29
1.3.3	Objem rotačního tělesa	30
1.3.4	Obsah rotační plochy	31
2	Funkce dvou proměnných	32
2.1	Funkce dvou proměnných, vlastnosti	33
2.1.1	Definice funkce dvou proměnných	33
2.1.2	Graf funkce dvou proměnných	34
2.1.3	Limita a spojitost	36

2.2	Diferenciální počet funkcí dvou proměnných	37
2.2.1	Parciální derivace	37
2.2.2	Diferenciál	39
2.2.3	Implicitní funkce	42
2.3	Extrémy funkcí dvou proměnných	44
2.3.1	Lokální extrémy	44
2.3.2	Vázané extrémy	46
2.3.3	Globální extrémy	47

3	Obyčejné diferenciální rovnice	48
3.1	Diferenciální rovnice n -tého řádu	49
3.2	Některé metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu	50
3.2.1	Separovatelné diferenciální rovnice	50
3.2.2	Exaktní diferenciální rovnice	53
3.2.3	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	55
3.3	Vlastnosti lineárních diferenciálních rovnic	58
3.4	Struktura řešení zkrácené LDR n -tého řádu	59
3.5	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	60
3.5.1	Charakteristická rovnice	61
3.5.2	Metoda variace konstant	62
3.5.3	Metoda neurčitých koeficientů	63

Řešené příklady

Řešené příklady – Integrální počet funkcí jedné proměnné	65
Přímá metoda	66
Přímá metoda	67
Přímá metoda	68
Lineární substituce, obecné vzorce	69
Metoda per partes	70
Metoda per partes	71
Substituční metoda	72
Substituční metoda	73
Substituční metoda	74
Integrace racionální lomené funkce	75
Integrace racionální lomené funkce	76

Integrace racionální lomené funkce	77	Parciální derivace	113
Integrace racionální lomené funkce	78	Diferenciál funkce	114
Integrace goniometrických funkcí	79	Diferenciál funkce	115
Integrace goniometrických funkcí	80	Tečná rovina, normála	116
Integrace goniometrických funkcí	81	Taylorův polynom	117
Integrace goniometrických funkcí	82	Derivace implicitní funkce	118
Integrace goniometrických funkcí	83	Tečna a normála k implicitní funkci	119
Integrace goniometrických funkcí	84	Lokální extrémy - první část	120
Integrace iracionálních funkcí	85	Lokální extrémy - druhá část	121
Integrace iracionálních funkcí	86	Lokální extrémy - první část	122
Integrace iracionálních funkcí	87	Lokální extrémy - druhá část	123
Určitý integrál, výpočet a vlastnosti	88	Vázané extrémy	124
Určitý integrál sudé a liché funkce	89	Vázané extrémy	125
Metoda per partes pro určité integrály	90	Globální extrémy	126
Substituční metoda pro určité integrály	91		
Substituční metoda pro určité integrály	92	Řešené příklady – Obyčejné diferenciální rovnice	127
Určitý integrál, racionální lomená funkce	93	Diferenciální rovnice - přímá integrace	128
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	94	Separovatelné diferenciální rovnice	129
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	95	Separovatelné diferenciální rovnice	130
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	96	Separovatelné diferenciální rovnice	131
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	97	Separovatelné diferenciální rovnice	132
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	98	Separovatelné diferenciální rovnice	133
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	99	Separovatelné diferenciální rovnice	134
Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky	100	Separovatelné diferenciální rovnice	135
Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky	101	Separovatelné diferenciální rovnice	136
Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa	102	Separovatelné diferenciální rovnice	137
Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa	103	Separovatelné diferenciální rovnice	138
Užití určitého integrálu, obsah rotační plochy	104	Separovatelné diferenciální rovnice	139
Užití určitého integrálu, obsah rotační plochy	105	Exaktní diferenciální rovnice	140
		Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	141
Řešené příklady – Funkce dvou proměnných	106	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	142
Definiční obor	107	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	143
Definiční obor	108	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	144
Vrstevnicový graf	109	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	145
Limita funkce	110	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	146
Parciální derivace	111	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	147
Parciální derivace	112	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	148

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	149
Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	150

Pracovní listy do cvičení 151

Příklady – Integrální počet funkcí jedné proměnné 152

Přímá metoda	153
Přímá metoda	154
Přímá metoda	155
Přímá metoda	156
Lineární substituce, obecné vzorce	157
Lineární substituce, obecné vzorce	158
Metoda per partes	159
Metoda per partes	160
Metoda per partes	161
Substituční metoda	162
Substituční metoda	163
Substituční metoda	164
Substituční metoda	165
Substituční metoda + metoda per partes	166
Racionální lomená funkce	167
Rozklad na parciální zlomky	168
Rozklad na parciální zlomky	169
Integrace racionální lomené funkce	170
Integrace racionální lomené funkce	171
Integrace racionální lomené funkce	172
Integrace goniometrických funkcí	173
Integrace goniometrických funkcí	174
Integrace goniometrických funkcí	175
Integrace iracionálních funkcí	176
Integrace iracionálních funkcí	177
Neurčitý integrál	178
Neurčitý integrál	179
Neurčitý integrál	180
Neurčitý integrál	181
Určitý integrál, výpočet a vlastnosti	182

Určitý integrál sudé a liché funkce	183
Metoda per partes pro určité integrály	184
Substituční metoda pro určité integrály	185
Substituční metoda + metoda per partes	186
Určitý integrál racionální lomené funkce	187
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	188
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	189
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	190
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	191
Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce	192
Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky	193
Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky	194
Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky	195
Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa	196
Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa	197
Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa	198
Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa	199
Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa	200
Užití určitého integrálu, obsah rotační plochy	201
Užití určitého integrálu, obsah rotační plochy	202

Příklady – Funkce dvou proměnných 203

Definiční obor	204
Definiční obor	205
Definiční obor	206
Definiční obor	207
Definiční obor	208
Definiční obor	209
Definiční obor	210
Definiční obor	211
Definiční obor	212
Definiční obor	213
Vrstevnicový graf	214
Vrstevnicový graf	215
Limita funkce	216
Parciální derivace	217
Parciální derivace	218

Parciální derivace	219	Separovatelné diferenciální rovnice	255
Parciální derivace	220	Separovatelné diferenciální rovnice	256
Parciální derivace	221	Separovatelné diferenciální rovnice	257
Diferenciál funkce	222	Separovatelné diferenciální rovnice	258
Diferenciál funkce	223	Separovatelné diferenciální rovnice	259
Diferenciál funkce	224	Separovatelné diferenciální rovnice	260
Diferenciál funkce	225	Separovatelné diferenciální rovnice	261
Tečná rovina, normála	226	Separovatelné diferenciální rovnice	262
Tečná rovina, normála	227	Separovatelné diferenciální rovnice	263
Taylorův polynom	228	Exaktní diferenciální rovnice	264
Taylorův polynom	229	Exaktní diferenciální rovnice	265
Derivace implicitní funkce	230	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	266
Derivace implicitní funkce	231	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	267
Derivace implicitní funkce	232	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	268
Tečna a normála k implicitní funkci	233	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	269
Tečna a normála k implicitní funkci	234	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	270
Lokální extrémy	235	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	271
Lokální extrémy	236	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	272
Lokální extrémy	237	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	273
Lokální extrémy	238	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	274
Vázané extrémy	239	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	275
Vázané extrémy	240	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	276
Globální extrémy	241	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	277
Globální extrémy	242	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	278
Globální extrémy	243		
Příklady – Obyčejné diferenciální rovnice	244	Aplikované úlohy	279
Separovatelné diferenciální rovnice	245	Rosettská deska I	280
Separovatelné diferenciální rovnice	246	Rosettská deska II	281
Separovatelné diferenciální rovnice	247	Gateway Arch I	282
Separovatelné diferenciální rovnice	248	Gateway Arch II	283
Separovatelné diferenciální rovnice	249	Chladicí věž Ledvice I	284
Separovatelné diferenciální rovnice	250	Chladicí věž Ledvice II	285
Separovatelné diferenciální rovnice	251	Teplota v pokoji I	286
Separovatelné diferenciální rovnice	252	Teplota v pokoji II	287
Separovatelné diferenciální rovnice	253	Teplota v pokoji III	288
Separovatelné diferenciální rovnice	254	Teplota v pokoji IV	289

Testy

Test 1

Test 2

Test 3

Test 4

Test 5

Test 6

290

Test 7

Test 8

Test 9

Test 10

297

298

299

300

Literatura

301

Matematika II: Listy k přednáškám

Radomír Paláček, Petra Schreiberová, Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Kapitola 1

Integrální počet funkcí jedné proměnné

11 - Neurčitý integrál, primitivní funkce



1.1 Neurčitý integrál

V předcházejícím studiu jste se seznámili s důležitým pojmem, a to *derivate funkce*. Funkci $f(x)$ jsme přiřadili novou funkci $f'(x)$. Úloha, které se budeme věnovat nyní, je v podstatě opačná. K funkci $f(x)$ budeme hledat funkci $F(x)$ tak, aby platilo $F'(x) = f(x)$. Tzn. položíme si otázku, jakou funkci je nutné derivovat, abychom dostali zadanou funkci $f(x)$.

1.1.1 Primitivní funkce

Definice 1.1.1: Necht' funkce $f(x)$ je definovaná na otevřeném intervalu I . Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní** k funkci $f(x)$ na I , jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$.

Věta 1.1.2: Necht' funkce $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na I , pak každá jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I má tvar $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Pokud k dané funkci existuje primitivní funkce, je jich nekonečně mnoho a liší se pouze konstantou c . Víme, že pokud sestrojíme v bodě x tečnu k dané funkci, je derivace funkce v daném bodě x směrnici této tečny. Grafy primitivních funkcí jsou posunuty rovnoběžně ve směru osy y . Tečny ke grafům v daných bodech x jsou rovnoběžné (mají stejnou směrnici) a z toho plyne, že mají stejnou derivaci.

12 - Neurčitý integrál, definice



1.1.2 Definice a vlastnosti

Definice 1.1.3: Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na I se nazývá **neurčitý integrál** funkce $f(x)$ a značí se symbolem $\int f(x)dx$. Tedy

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad x \in I.$$

Poznámka:

1. Funkci $f(x)$ nazýváme **integrandem**.
2. Výraz dx je diferenciál proměnné x a v tuto chvíli je jeho význam v tom, že nám říká, jak je označená proměnná.
3. Číslo c nazýváme **integrační konstanta**.

Vlastnosti neurčitého integrálu:

Věta 1.1.4: Každá funkce $y = f(x)$ spojitá na intervalu I , má na tomto intervalu neurčitý integrál $\int f(x)dx$, který je opět spojitou funkcí na I .

Uvedeme jednoduchou (ale důležitou) větu, kterou budeme při výpočtu neurčitých integrálů neustále používat.

Věta 1.1.5: Existují-li na I integrály $\int f(x)dx$ a $\int g(x)dx$, pak na I existuje rovněž integrál jejich součtu, rozdílu a násobku konstantou:

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \\ \int k \cdot f(x)dx &= k \int f(x)dx, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

13 - Tabulkové integrály

Video **Řešené příklady: 66, 67, 68**
Příklady: 153, 154, 155



1.1.3 Tabulkové integrály

Podobně jako pro derivování, i pro integrování existuje celá řada pravidel, kterými se při výpočtu budeme řídit.

První skupinu vzorců (1-11) dostaneme, obrátíme-li základní vzorce pro derivování. Doplníme ji o dva užitečné vzorce 12 a 13.

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1, x > 0$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c, x \neq k\pi$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, |x| < 1$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$
13. $\int f'(x)f(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} + c$

Obecné vzorce

1. $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln |x+a| + c$
2. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$
3. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$
4. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$
5. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 ax} dx = -\frac{1}{a} \cot ax + c$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

14 - Metoda per partes

Video

Řešené příklady: 70, 71
Příklady: 159, 160, 161

1.1.4 Metoda per partes

Víme, že integrál ze součtu (rozdílu) je součtem (rozdílem) integrálů. Pro součin (podíl) nic takového obecně neplatí.

$$\int f(x) \cdot g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

Z pravidla pro derivaci součinu dostaneme velmi užitečný vztah pro integraci součinu:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v$$

Po integraci dostáváme:

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

Věta 1.1.6: Necht' funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I , pak platí

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Tato metoda se nazývá **metoda per partes** (po částech).

Hodí se na integrály, jejichž integrand má tvar součinu dvou odlišných funkcí. Abychom dokázali napsat pravou stranu vztahu, musíme jeden činitel na levé straně umět derivovat, což není problém, a druhý činitel musíme umět integrovat, což už může být problém. Metoda per partes integrál vypočítá jen zčásti. Zbývá vypočítat nový integrál, který by měl být jednodušší.

15 - Metoda per partes

Video

Řešené příklady: 70, 71
Příklady: 159, 160, 161

Integrály typické pro výpočet metodou per partes

Buď $P(x)$ polynom. Metodou per partes integrujeme např. integrály následujících typů:

$$\int P(x)e^{\alpha x}dx, \int P(x)\sin(\alpha x)dx, \int P(x)\cos(\alpha x)dx$$

a

$$\int P(x)\arctan x dx, \int P(x)\ln^m x dx.$$

U první skupiny postupujeme tak, že polynom derivujeme (snížíme jeho stupeň), v případě potřeby postup opakujeme. U druhé skupiny naopak polynom integrujeme a derivujeme druhý činitel.

Poznámka:

V souvislosti s metodou per partes se používá obrat, který spočívá v tom, že po integraci per partes a úpravách se nám znovu objeví výchozí integrál. Tzn. dostáváme rovnici:

$$\int f(x)dx = h(x) + \alpha \int f(x)dx,$$

kde $\alpha \neq 1$. Převedením integrálů na jednu stranu dostaneme hledaný výsledek:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{1-\alpha}h(x) + c.$$

16 - Integrace substitucí

Video

Řešené příklady: 72, 73
Příklady: 162, 163, 164

1.1.5 Integrace substitucí

Seznámíme se s významnou metodou, která je jednou z nejdůležitějších a nejpoužívanějších při řešení integrálů. Bohužel neexistuje univerzální návod, kdy a jak substituci použít, proto je důležité pochopit princip substitučních metod a umět vzorce pro derivování.

Substituce typu $\varphi(x) = t$

Věta 1.1.7: Necht' funkce $f(t)$ má na otevřeném intervalu J primitivní funkci $F(t)$, funkce $\varphi(x)$ má derivaci na otevřeném intervalu I a pro libovolné $x \in I$ platí $\varphi(x) \in J$. Potom je funkce $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na I a platí:

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + c = F[\varphi(x)] + c.$$

Z předcházející věty vidíme, jak musí vypadat integrand, aby bylo možno substituční metodu použít. Musí jít o výraz, který je složen ze součinu složené funkce a derivace vnitřní funkce. Problémem je, že potřebný součin není vždy na první pohled viditelný a je potřeba integrand vhodně upravit.

17 - Integrace substitucí

Video

Řešené příklady: 72, 73
Příklady: 162, 163, 164**Shrnutí a praktické použití:**

1. označíme substituci $\varphi(x) = t$
2. rovnost diferencujeme: $\varphi'(x)dx = dt$
3. v integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ nahradíme za $\varphi(x)$ proměnnou t a za výraz $\varphi'(x)dx$ diferenciál dt
4. řešíme integrál $\int f(t)dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci

Lineární substituce: $ax + b = t$

Jestliže má funkce $f(t)$ primitivní funkci $F(t)$, tj. $\int f(t)dt = F(t) + c$, platí, že:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

18 - Integrace substitucí

Video **Řešené příklady: 74**
Příklady: 165 

Substituce typu $x = \varphi(t)$

Podle věty o 1. substituční metodě jsme převedli integrál $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$ pomocí substituce $\varphi(x) = t$ na integrál s novou proměnnou $\int f(t) dt$. Někdy je potřeba zvolit postup opačný a proměnnou nahradit vhodnou funkcí. Tzn. máme vypočítat integrál $\int f(x) dx$. S využitím substituce $x = \varphi(t)$ a $dx = \varphi'(t) dt$ se snažíme převést integrál na tvar integrálu $\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$. Abychom byli schopni nalézt primitivní funkci, musí platit, že:

1. $f(x)$ je spojitá na (a, b)
2. $x = \varphi(t)$ je na (α, β) ryze monotónní a $\varphi'(t) \neq 0$ je spojitá na (α, β) .

Pokud jsou tyto předpoklady splněny, existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}(x) \neq 0$ a tedy $t = \varphi^{-1}(x)$.

Věta 1.1.8: Necht' funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu J , necht' monotónní funkce $\varphi(t)$ má derivaci na otevřeném intervalu I různou od nuly pro každé $t \in I$ a platí $\varphi(I) = J$. Pak má $f(x)$ na intervalu J primitivní funkci $F[\varphi^{-1}(x)]$ a platí:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F[\varphi^{-1}(x)] + c.$$

Substituční metodou integrujeme většinou iracionální funkce.

- a) Integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax+b}$. U těchto integrálů používáme substituci $ax+b = t^n$, $adx = nt^{n-1}dt$.
- b) Obsahuje-li integrovaná funkce více odmocnin s různými odmocniteli $\sqrt[n_1]{ax+b}$, $\sqrt[n_2]{ax+b}$, ... zavádíme substituci $ax+b = t^n$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, \dots$
- c) Integrand obsahuje výraz $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$. Substituce se označuje jako goniometrická, protože klademe $bx = a \sin t$ nebo $bx = a \cos t$, tzn. $dx = \frac{a}{b} \cos t dt$ případně $dx = -\frac{a}{b} \sin t dt$.

19 - Integrace racionální lomené funkce

Video

 Řešené příklady: 75
 Příklady: 167, 168, 169


1.1.6 Integrace racionální lomené funkce

Každou racionální lomenou funkci tvaru $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy libovolných stupňů, lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + R_1(x) + \dots + R_s(x),$$

kde $S(x)$ je mnohočlen a $R_1(x), \dots, R_s(x)$ jsou parciální zlomky.

Parciální zlomky jsou speciální racionální lomené funkce. Rozlišujeme 2 typy:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k}, \quad k \in \mathbb{N}; \alpha, A \in \mathbb{R}$$

a

$$\frac{B(2x + p) + C}{(x^2 + px + q)^k}, \quad k \in \mathbb{N}; B, C, p, q \in \mathbb{R}; p^2 - 4q < 0.$$

Definice 1.1.9: Racionální funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se nazývá **ryzí**, jestliže $\deg P(x) < \deg Q(x)$, $\deg P(x)$ je stupeň polynomu $P(x)$.

Postup rozkladu ryze lomené funkce na parciální zlomky

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli
2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu
3. celou rovnici rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli
4. nalezneme koeficienty rozkladu:
srovnávací metodou, dosazovací metodou nebo kombinací těchto metod.

20 - Integrace racionální lomené funkce

Video

Řešené příklady: 76, 77, 78
Příklady: 170, 171, 172

Integrace parciálních zlomků s reálnými kořeny ve jmenovateli

Pro $k = 1$:

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + c.$$

Pro $k \geq 2$:

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx = \frac{A}{(1 - k)(x - \alpha)^{k-1}} + c.$$

Integrace parciálních zlomků s komplexními kořeny ve jmenovateli

Při integrování zlomku $\frac{B(2x + p)}{x^2 + px + q}$ dostáváme:

$$\int \frac{B(2x + p)}{x^2 + px + q} dx = B \ln |x^2 + px + q| + c.$$

Při integrování zlomku $\frac{C}{x^2 + px + q}$ doplníme trojčlen $x^2 + px + q$ na čtverec:

$$\int \frac{C}{x^2 + px + q} dx = C \int \frac{dx}{(x + p/2)^2 + a^2} = \frac{C}{a} \arctan \frac{x + p/2}{a} + c,$$

kde

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

21 - Integrace goniometrických funkcí

Video

Řešené příklady: 79, 80, 81, 82
Příklady: 173, 174

1.1.7 Integrace goniometrických funkcí

Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. Pokud je aspoň jedno z čísel m, n liché použijeme k řešení substituci:

$$\sin x = t, \text{ je-li } n \text{ liché,}$$

$$\cos x = t, \text{ je-li } m \text{ liché.}$$

Pokud jsou obě liché, můžeme si vybrat.

2. Pokud jsou obě čísla m, n sudá a nezáporná, je nejvýhodnější použití vzorců pro dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

3. Pokud jsou obě čísla m, n sudá a je-li alespoň jedno z čísel záporné, použijeme substituci $\tan x = t$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = \arctan t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

22 - Integrace goniometrických funkcí

Video

Řešené příklady: 83, 84
Příklady: 175

Univerzální substituce

$$\tan \frac{x}{2} = t, x \in (-\pi, \pi)$$

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Univerzální substituce se používá při řešení integrálů typu

$$\int f(\sin x, \cos x) dx,$$

kde $f(u, v)$ je racionální funkce proměnných $u = \sin x$, $v = \cos x$. Jedná se o obecný postup (substituci) při řešení integrálů funkcí složených z goniometrických funkcí.

23 - Určitý integrál, geometrický význam



1.2 Určitý integrál

1.2.1 Geometrický význam určitého integrálu

Mějme nezápornou ohraničenou funkci $f(x)$, spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Dá se dokázat, že určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$ udává obsah rovinného obrazce P ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.

Pro obecnou funkci $f(x)$ zatím obsah obrazce P vypočítat nedovedeme. Navrhňeme, jak vypočítat obsah tohoto útvaru alespoň přibližně:

1. Rozdělíme obrazec rovnoběžkami s osou y na n částí. Je zřejmé, že obsah obrazce P dostaneme jako součet obsahů jednotlivých částí. Pak platí: $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$.

2. Potřebujeme tedy určit obsah jednotlivých částí. Jelikož jsou opět ohraničeny shora funkcí $f(x)$, provedeme výpočet přibližně. A to tak, že aproximujeme plochy obdélníky. Zvolíme v jednotlivých částech body ξ_i (v mezích dané části) a v těchto bodech určíme funkční hodnoty $f(\xi_i)$. V těchto hodnotách zarovnáme odpovídající části obrazce na obdélníky (funkci jsme nahradili funkční hodnotou).

Ze znalosti vzorce pro výpočet obsahu obdélníku dostáváme (přibližný) obsah původního obrazce:

$$P \doteq (x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \dots + (b - x_{n-1})f(\xi_n).$$

3. Je zřejmé, že se dopouštíme chyby, a pokud zvolíme více dělících bodů (více částí), bude chyba menší. Obsah P tedy dostaneme jako limitu pro nekonečný počet částí.

24 - Určitý integrál, definice a výpočet

Video

Řešené příklady: 88, 89
Příklady: 182, 183

1.2.2 Definice

Definice 1.2.10: Pokud existuje limita $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P_i = I \right)$, pak je tato limita označována jako **Riemannův integrál** funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$ a píšeme

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

kde číslo a se nazývá **dolní mez**, číslo b **horní mez** a funkce $f(x)$ **integrand**.

Poznámka: Pokud je funkce $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$, pak má Riemannův integrál. Po zobecnění dostáváme následující definici.

Definice 1.2.11: Necht' je $f(x)$ omezená a po částech spojitá v $\langle a, b \rangle$, pak má $f(x)$ v $\langle a, b \rangle$ Riemannův integrál.

Výpočet určitého integrálu

Pro výpočet určitého integrálu využijeme **Newtonovu-Leibnizovu formuli**, která vyjadřuje vztah mezi primitivní funkcí a Riemannovým integrálem.

Definice 1.2.12: Necht' $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I . Pak pro čísla a, b z tohoto intervalu definujeme **Newtonův určitý integrál** funkce $f(x)$ v mezích od a do b vzorcem:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

25 - Určitý integrál, vlastnosti

Video **Řešené příklady: 88, 89**
Příklady: 182, 183



1.2.3 Vlastnosti určitého integrálu

Věta 1.2.13: Necht' $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na $\langle a, b \rangle$, pak také součet (rozdíl) těchto funkcí a násobek funkce konstantou je integrovatelný na tomto intervalu a platí:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Další vlastnosti:

Věta 1.2.14: Necht' $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

je-li $f(x) \leq g(x)$, pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$, pak také $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Následující vlastnost je užitečná zejména v případech, kdy integrand nebude mít na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ jednotný analytický předpis.

Věta 1.2.15: Necht' $f(x)$ je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a c je libovolné reálné číslo $a < c < b$. Pak je $f(x)$ integrovatelná na intervalech $\langle a, c \rangle$ a $\langle c, b \rangle$ a platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Výpočet integrálu sudé a liché funkce

Pokud je na intervalu $\langle -a, a \rangle$ funkce $f(x)$ sudá, pak

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Pokud je na intervalu $\langle -a, a \rangle$ funkce $f(x)$ lichá, pak

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

26 - Určitý integrál, integrace substitucí a metodou per partes

Video

Řešené příklady: 90, 91, 92
Příklady: 184, 185, 186

1.2.4 Substituce v určitém integrálu

Věta 1.2.16: Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná v $\langle a, b \rangle$ a ryze monotónní funkce $x = \varphi(t)$ má v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$, přičemž $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$, pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Poznámka: Postup výpočtu a zápis je obdobný jako u neurčitého integrálu, jen přibude určení nových mezí. Výhodou je, že se nemusíme po substituci vracet k původní proměnné.

1.2.5 Metoda per partes v určitém integrálu

Věta 1.2.17: Necht' funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na $\langle a, b \rangle$, $a < b$, derivace, které jsou na daném intervalu integrovatelné, pak platí

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx.$$

Poznámka: Použití je analogické jako v případě neurčitého integrálu. Výhoda oproti postupu u neurčitého integrálu spočívá v průběžném dosazování mezí do částečně určené primitivní funkce. Výpočet se zkrátí a zpřehlední.

27 - Určitý integrál, obsah rovinného útvaru

Video

Řešené příklady: 94, 95, 96
Příklady: 188, 189

1.3 Geometrické aplikace určitého integrálu

1.3.1 Obsah rovinného útvaru

1. Pokud se jedná o rovinný útvar omezený osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem spojitě, nezáporné funkce $y = f(x)$, pak je jeho obsah dán určitým integrálem, jak bylo uvedeno u geometrické interpretace určitého integrálu:

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

V případě, že funkce $y = f(x)$ je v intervalu $\langle a, b \rangle$ záporná, je integrál rovněž záporný. Vzhledem k tomu, že obsah každého obrazce je vždy nezáporné číslo, použijeme pro libovolnou funkci ve výpočtu obsahu její absolutní hodnotu:

$$P = \int_a^b |f(x)| dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Jestliže funkce $y = f(x)$ nabývá v intervalu $\langle a, b \rangle$ jak kladných, tak i záporných hodnot, potom tento interval rozdělíme na dílčí intervaly, ve kterých funkce nabývá pouze nekladných hodnot resp. nezáporných hodnot, a vypočteme obsahy podle předcházejícího. Tzn. pokud bychom počítali integrál

$\int_a^b f(x) dx$ na celém $\langle a, b \rangle$, kladné a záporné části by se odečítaly.

28 - Určitý integrál, obsah rovinného útvaru

Video

Řešené příklady: 97, 98
Příklady: 190, 191, 192

2. Pokud je rovinný útvar ohraničený dvěma funkcemi (křivkami) $y = f(x)$ a $y = g(x)$, přičemž platí $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, a přímkami $x = a$, $x = b$, je jeho obsah určen:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

V případě, že je rovinný útvar ohraničený pouze dvěma funkcemi, musíme nejdříve určit x -ové souřadnice průsečíků křivek (tzn. řešíme rovnici $f(x) = g(x)$).

3. Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde funkce $\psi(t)$ je spojitá a nezáporná na $\langle \alpha, \beta \rangle$ a funkce $\varphi(t)$ má na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ derivaci $\dot{\varphi}(t)$ různou od nuly a $\dot{\varphi}(t)$ je integrovatelná na $\langle \alpha, \beta \rangle$, platí pro obsah útvaru ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$:

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \dot{\varphi}(t) dt \right|.$$

29 - Určitý integrál, délka rovinné křivky

Video

Řešené příklady: 99, 100
Příklady: 194, 195

1.3.2 Délka rovinné křivky

Věta 1.3.18: Je-li funkce $y = f(x)$ definovaná na $\langle a, b \rangle$ a má zde spojitou derivaci, pak pro délku jejího grafu platí:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Nyní se podíváme na obecnější případ, kdy křivka nemusí být grafem funkce (může se jednat o trajektorii nakreslenou bodem spojitě se pohybujícím v rovině). Tzn. zadáme křivku pomocí parametrických rovnic $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Z fyzikálního pohledu je délka křivky vlastně dráhou, kterou bod urazí od okamžiku α do okamžiku β . Pro délku křivky dané parametrickými rovnicemi lze dokázat následující tvrzení:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2} dt.$$

30 - Určitý integrál, objem rotačního tělesa

Video

Řešené příklady: 101, 102, 103
Příklady: 196-200

1.3.3 Objem rotačního tělesa

Necháme-li rovinný útvar rotovat kolem osy x , vznikne rotační těleso, jehož objem můžeme vypočítat pomocí určitého integrálu.

Věta 1.3.19: Nechť je funkce $y = f(x)$ spojitá a nezáporná na $\langle a, b \rangle$. Pak rotační těleso vzniklé rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x v intervalu $\langle a, b \rangle$ má objem:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Poznámka:

1. Obdobný vzorec platí, je-li osou rotace osa y . Objem tělesa, které vznikne rotací spojitě křivky $x = h(y)$ pro $y \in \langle c, d \rangle$ kolem osy y , vypočteme pomocí vztahu:

$$V = \pi \int_c^d h^2(y) dy.$$

2. Pokud získáme těleso rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$, přičemž platí $f(x) \geq g(x)$, kolem osy x na $\langle a, b \rangle$, pak objem takového tělesa určíme jako

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

Věta 1.3.20: Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, platí pro objem tělesa, které vznikne rotací útvaru kolem osy x :

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) |\dot{\varphi}(t)| dt.$$

31 - Určitý integrál, obsah rotační plochy

Video

Řešené příklady: 104, 105
Příklady: 201, 202

1.3.4 Obsah rotační plochy

Pomocí určitého integrálu vypočítáme i obsah pláště rotačního tělesa.

Věta 1.3.21: Necht' je funkce $y = f(x)$ spojitá a nezáporná na $\langle a, b \rangle$ a má zde spojitou derivaci. Pak pro obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x v intervalu $\langle a, b \rangle$, platí:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Poznámka: Rotace kolem osy y : $S = 2\pi \int_c^d h(y) \sqrt{1 + (h'(y))^2} dy$.

Věta 1.3.22: Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, platí pro obsah rotační plochy, které vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x :

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2} dt, \quad \psi(t) \geq 0.$$

Kapitola 2

Funkce dvou proměnných

33 - Funkce dvou proměnných, definiční obor

Video

Řešené příklady: 107, 108
Příklady: 204-213

2.1 Funkce dvou proměnných, vlastnosti

2.1.1 Definice funkce dvou proměnných

Definice 2.1.23: Bud' $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $M \neq \emptyset$ množina. **Funkcí dvou proměnných** na M rozumíme každé zobrazení

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad M \ni [x, y] \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a značíme ji D_f .

Množina $\mathbb{R}^2$ je kartézským součinem množiny $\mathbb{R}$ se sebou, tedy $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, jejími prvky a také prvky její podmnožiny M jsou tzv. uspořádané dvojice.

Poznámka:

- V analogii s označením používaným pro funkci jedné proměnné, $y = f(x)$, budeme pro označení funkce dvou proměnných používat $z = f(x, y)$.
- Proměnné x a y budeme nazývat **nezávislé proměnné**. Proměnnou z budeme nazývat **závislou proměnnou**.
- Není-li specifikován definiční obor, automaticky uvažujeme maximální přípustnou podmnožinu v $\mathbb{R}^2$.
- Pro funkci tří a případně více proměnných máme zcela analogickou definici, přidáváme v podstatě pouze nezávislé proměnné.
- Prvek množiny M nazýváme bod z definičního oboru, obvykle se pro jeho označení používají velká písmena, tj. např. $A \in M$. Bod A je určen dvěma složkami, $A = [x_0, y_0]$.
- Hodnota $z = f(A) = f(x_0, y_0)$ se nazývá **funkční hodnota**.

Princip hledání definičního oboru pro funkci dvou proměnných je zcela analogický jako pro funkci jedné proměnné. Sestavíme a vyhodnotíme jednotlivé omezující podmínky.

34 - Funkce dvou proměnných, graf

Video

Řešené příklady: 109
Příklady: 214, 215

2.1.2 Graf funkce dvou proměnných

Definice 2.1.24: **Grafem** funkce dvou proměnných rozumíme množinu $G_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid [x, y] \in D_f, z = f(x, y)\}$.

Poznámka:

- Množina G_f je podmnožinou v $\mathbb{R}^3$, $G_f \subset \mathbb{R}^3$. Nejčastěji budeme pracovat s funkcemi, jejichž grafy jsou nějaké dvojrozměrné plochy v trojrozměrném prostoru.
- Nakreslit graf funkce dvou proměnných tzv. „v ruce“ je poměrně obtížné, a často to vůbec není možné. Jednou z možností, kterou máme k dispozici, je využít průsečnice grafu zadané funkce s rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami, především s půdorysnou rovinou.
- K vizualizaci grafů se používá výpočetní technika, existuje řada komerčních i volně šiřitelných programů (Gnuplot, Maple, Matematika, Matlab, Wolfram atd.).
- Grafem funkce tří proměnných je plocha v $\mathbb{R}^4$, tzv. nadplocha. Nelze ji ovšem graficky znázornit.

35 - Funkce dvou proměnných, vrstevnice

Video **Řešené příklady: 109**
Příklady: **214, 215**

Definice 2.1.25: Řezy grafu funkce $z = f(x, y)$ rovinami rovnoběžnými s půdorysnou rovinou se nazývají **vrstevnice**. **Vrstevnicovým grafem** rozumíme průměty vrstevnic do půdorysné roviny $z = 0$.

Vrstevnice je množina bodů se stejnou funkční hodnotou. S vrstevnicemi se můžeme setkat především na turistických mapách, kde vrstevnice (obvykle šedé křivky) reprezentují množiny bodů se stejnou nadmořskou výškou.

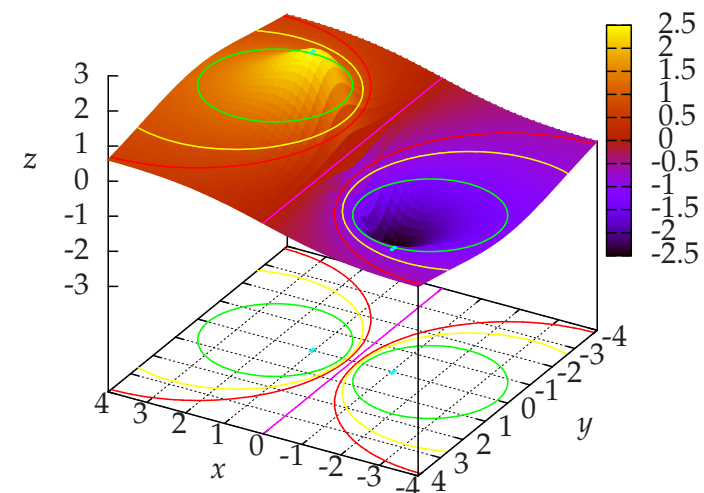
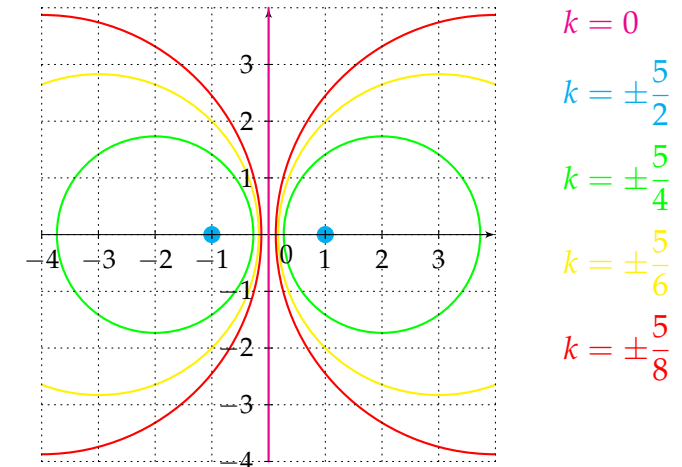


Na obrázku se nachází turistická mapa okolí Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava.

Zdroj:

<http://mapy.cz/#!x=18.151648&y=49.832078&z=14&l=16>.

Vrstevnicový graf a graf funkce $z = \frac{5x}{x^2 + y^2 + 1}$.



36 - Limita a spojitost funkce dvou proměnných

Video **Řešené příklady: 110**
Příklady: 216

2.1.3 Limita a spojitost

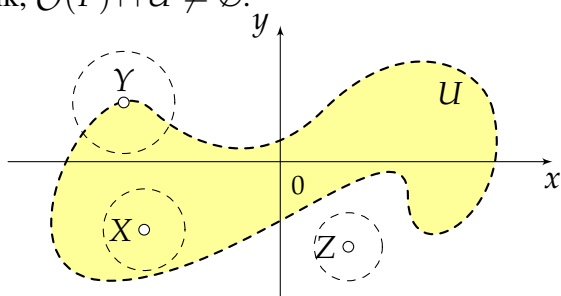
Limita a spojitost funkce dvou proměnných je definována úplně stejně, jako v případě funkcí jedné proměnné.

Definice 2.1.26: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v hromadném bodě $P = [x_0, y_0]$ **limitu** $a \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $X \in \mathring{O}_\delta(P)$ platí $|f(X) - a| < \epsilon$.

Pojem okolí bodu je zobecněn, v případě funkcí jedné proměnné se jedná o otevřený interval, pro funkce dvou proměnných se jedná o otevřený kruh (kruh bez hraniční kružnice).

Okolí $\mathring{O}_\delta(P)$ je tzv. **deltové prstencové okolí** v bodě P , jedná se o otevřený kruh se středem v bodě P bez bodu P o poloměru δ .

Definice 2.1.27: Bud' $U \subset \mathbb{R}^2$, bod $P \in \mathbb{R}^2$ se nazývá **hromadný bod** množiny U , jestliže každé jeho prstencové okolí $\mathring{O}(P)$ má s množinou U neprázdný průnik, $\mathring{O}(P) \cap U \neq \emptyset$.



Body X a Y jsou hromadné body množiny U . Bod Z není hromadným bodem množiny U .

V případě funkcí jedné proměnné vyšetřujeme chování funkce (počítáme limitu) na levé resp. pravé části okolí (otevřeného intervalu). Zkoumáme pouze dva případy. Problém u funkcí dvou proměnných je ten, že se k limitnímu bodu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby.

Limity funkcí dvou proměnných řešíme většinou přímým dosazením limitního bodu. Řeší se spíše jiný typ úlohy, dokazuje se, že limita v daném bodě neexistuje.

Používaná notace:

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = a, \quad \lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} f(x,y) = a.$$

Definice 2.1.28: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je **spojitá** v bodě $P = [x_0, y_0] \in D_f$, jestliže platí

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Funkce je spojitá v bodě, jestliže existuje limita v tomto bodě, kterou určíme přímým dosazením limitního bodu, tj. jako funkční hodnotu v tomto bodě.

37 - Parciální derivace

Video

Řešené příklady: 111, 112, 113
Příklady: 217-221

2.2 Diferenciální počet funkcí dvou proměnných

2.2.1 Parciální derivace

Definice 2.2.29: Řekneme, že má funkce $z = f(x, y)$ **parciální derivaci podle x** (prvního řádu) v bodě $A = [x_0, y_0]$, jestliže existuje vlastní limita

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Analogicky definujeme **parciální derivaci podle y** ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Poznámka:

- Označení parciálních derivací: $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(A)$, $f_x(A)$, $f'_x(A)$, atd.
- Parciální derivace v obecném bodě, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}$ resp. $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou opět funkce dvou proměnných.
- Zcela analogicky se definují parciální derivace funkce tří a více proměnných.
- Když určíme parciální derivaci podle x , pak vše co není x ve funkci $z = f(x, y)$ chápeme jako konstantu. Tzn. takovou funkci derivujeme jako funkci jedné proměnné, proměnné x . U parciálních derivací podle y postupujeme stejně, co není y chápeme jako konstantu.

Výpočet parciálních derivací funkcí dvou proměnných se ve skutečnosti redukuje na výpočet derivací funkcí jedné proměnné, přičemž pro derivování používáme stejné formule a pravidla jako v případě funkcí jedné proměnné.

Věta 2.2.30: Necht' existují parciální derivace funkcí $f(x, y)$ a $g(x, y)$ podle $x = x_1$ a $y = x_2$ na $Q \subseteq D_f \cap D_g$ v bodě X . Pak platí pro každé $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f \pm g)(X) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(X), \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g)(X) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot g(X) + f(X) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X), \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f}{g} \right)(X) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot g(X) - f(X) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X)}{g^2(X)}. \end{aligned}$$

38 - Parciální derivace

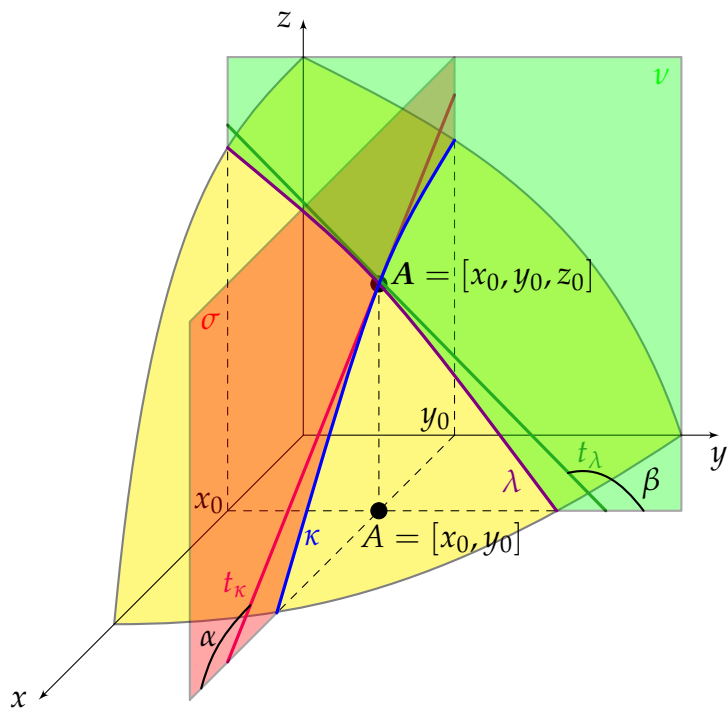
Video **Řešené příklady: 111, 112, 113**
Příklady: 217-221

Geometrický význam parciálních derivací

Geometrický význam parciálních derivací je stejný, jako v případě derivace funkce jedné proměnné. Jedná se o směrnici tečny sestrojené v daném bodě.

Rovina σ určená rovnicí $y = y_0$ je rovnoběžná s rovinou xz (rovinu xz je určena rovnicí $y = 0$). Průnikem roviny σ s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka κ . Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $A = [x_0, y_0]$, je směrnice tečny ($\tan \alpha$) t_κ ke křivce κ v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$.

Rovina ν určená rovnicí $x = x_0$ je rovnoběžná s rovinou yz (rovinu yz je určena rovnicí $x = 0$). Průnikem roviny ν s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka λ . Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$, $A = [x_0, y_0]$, je směrnice tečny ($\tan \beta$) t_λ ke křivce λ v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$.



Definice 2.2.31: Parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ jsou definovány:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Schwarzova věta

Věta 2.2.32: Jsou-li smíšené parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak jsou si v tomto bodě rovny, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A)$.

39 - Diferenciál

Video **Řešené příklady: 114, 115**
Příklady: 222, 223, 224, 225

2.2.2 Diferenciál

Definice 2.2.33: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je v bodě $A = [x_0, y_0]$ **diferencovatelná**, nebo má v tomto bodě **diferenciál**, jestliže je možné její přírůstek Δz na okolí bodu A vyjádřit jako

$$\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \mathcal{A}h + \mathcal{B}k + \rho\tau(h, k),$$

kde $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou konstanty, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ a $\lim_{[h,k] \rightarrow [0,0]} \tau(h, k) = 0$. Funkce $z = f(x, y)$ se nazývá **diferencovatelná**, je-li diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru.

Věta 2.2.34: Je-li funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná v bodě A , pak v bodě A existují parciální derivace prvního řádu a platí

$$\mathcal{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(A), \quad \mathcal{B} = \frac{\partial f}{\partial y}(A).$$

Poznámka: Číslo h představuje přírůstek na ose x , k je přírůstek na ose y a bývá zvykem tyto přírůstky značit $h = dx$ resp. $k = dy$. Pro přírůstek na ose z v bodě A při známé hodnotě dx a dy pak dostáváme

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(A)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A)dy + \rho\tau(dx, dy).$$

Definice 2.2.35: Je-li funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná, nazývá se výraz

$$dz = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

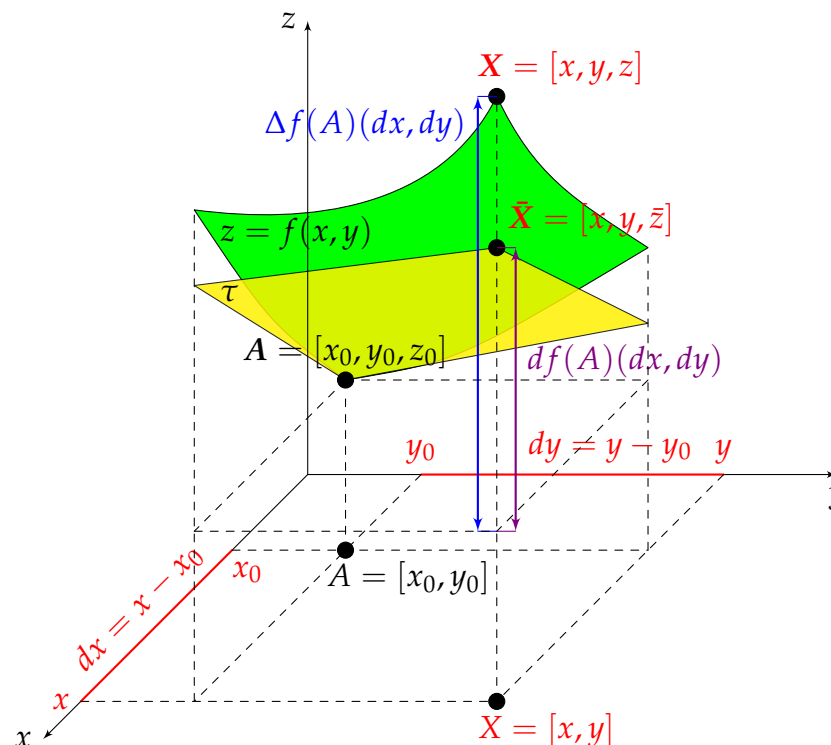
diferenciál funkce $z = f(x, y)$.

Věta 2.2.36: Je-li funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná v bodě A , pak je v tomto bodě spojitá.

Věta 2.2.37: Jsou-li parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ spojité v A , pak je funkce $z = f(x, y)$ v bodě A diferencovatelná (a tedy i spojitá).

Geometrický význam diferenciálu

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$ v bodě A při známých přírůstcích dx a dy je přírůstek na tečné rovině ke grafu funkce f v bodě A .



40 - Diferenciál

Video

Řešené příklady: 114, 115
Příklady: 222, 223, 224, 225**Poznámka:**

- Diferenciál funkce $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

- Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0).$$

- Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$ při známých přírůstcích dx , dy ,

$$dz(A)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}.$$

- Diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

- Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy).$$

41 - Tečná rovina, normála, Taylorův polynom

Video

Řešené příklady: 116, 117
Příklady: 226, 227, 228, 229

Věta 2.2.38: Necht' je funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$. Pak v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ existuje **tečná rovina** ke grafu funkce $z = f(x, y)$ určená rovnicí

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0).$$

Přímka n kolmá k tečné rovině procházející bodem A se nazývá **normála** grafu funkce $z = f(x, y)$. Její směrový vektor je kolineární s normálovým vektorem roviny, $\vec{s}_n = \vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1 \right)$.

Věta 2.2.39: Normála ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě A je určena parametrickými rovnicemi

$$n : \quad x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(A)t, \quad y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)t, \quad z = z_0 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Věta 2.2.40: Necht' je funkce $z = f(x, y)$ na okolí bodu $A \in D_f$ alespoň $(m + 1)$ -krát spojitě diferencovatelná. Pak v bodě $X \in \mathcal{O}(A)$ platí

$$f(X) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2f(A)}{2!} + \dots + \frac{d^m f(A)}{m!} + R_m, \text{ kde}$$

$$R_m = \frac{d^{m+1}f(A + \kappa(X - A))}{(m + 1)!}, \quad \kappa \in (0, 1).$$

Definice 2.2.41: Výraz z předchozí věty nazýváme **Taylorovým rozvojem** funkce f na okolí bodu A . Hodnota R_m se nazývá **Lagrangeův zbytek** Taylorova rozvoje. Polynom

$$T_m(X) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2f(A)}{2!} + \dots + \frac{d^m f(A)}{m!}$$

se nazývá **Taylorův polynom m -tého řádu** funkce f v bodě A . Je-li $A = [0, 0]$, hovoříme o **MacLaurionovu polynomu**.

42 - Implicitní funkce

Video **Řešené příklady: 118, 119**
Příklady: 230-234

2.2.3 Implicitní funkce

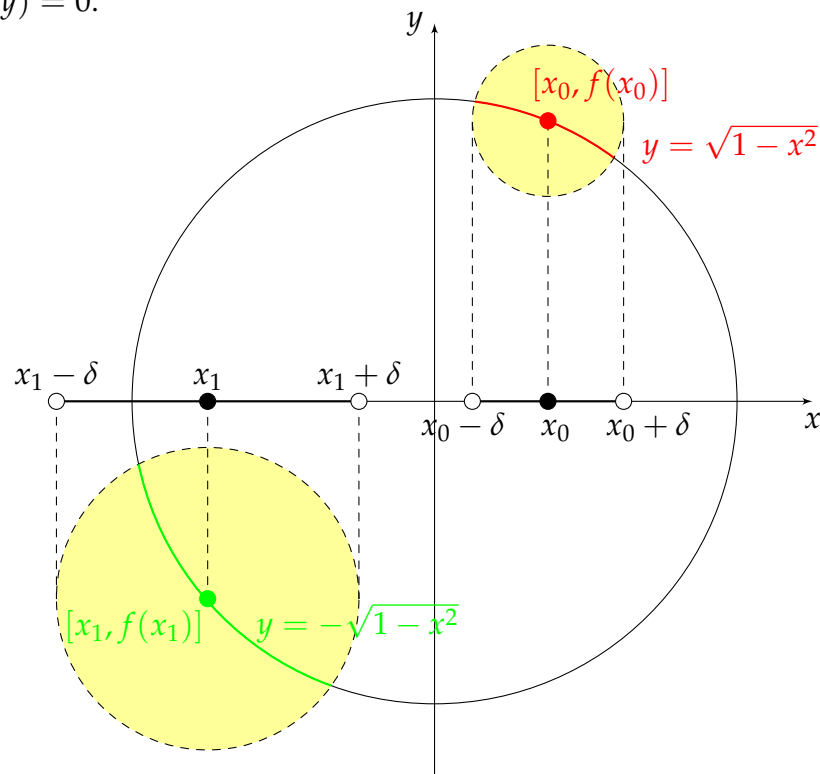
Definice 2.2.42: Bud' $z = F(x, y)$ funkce dvou proměnných. Uvažujme křivku

$$M = \{[x, y] \in D_F \mid F(x, y) = 0\}.$$

Nechť $A = [x_0, y_0] \in M$ je bod, $\mathcal{O}_\delta(A) \subset \mathbb{R}^2$ je deltové okolí bodu A , $\delta > 0$. Jestliže je rovnicí $F(x, y) = 0$ na okolí bodu A určena funkce $y = f(x)$ taková, že platí

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall [x, f(x)] \in \mathcal{O}_\delta(A),$$

pak říkáme, že funkce f je na okolí bodu A definována **implicitně** rovnicí $F(x, y) = 0$.



Na obrázku je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1,

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Na intervalu $(-1, 1)$ jsou rovnicí určeny dvě implicitní funkce, $y = \sqrt{1 - x^2}$ (horní půlkružnice) a $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (spodní půlkružnice). V bodech $[1, 0]$ a $[-1, 0]$ implicitní funkce neexistuje, každé okolí těchto bodů obsahuje body jak horní, tak spodní půlkružnice.

43 - Derivace implicitní funkce

Video

Řešené příklady: 118, 119
Příklady: 230-234

Poznámka: Ne ke každé rovnici $F(x, y) = 0$ existuje jediná implicitní funkce.

Věta 2.2.43: Necht' je funkce $z = F(x, y)$ spojitá na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ a $F(A) = 0$. Necht' F má v A spojitou parciální derivaci $\frac{\partial F}{\partial y}(A)$ a platí $\frac{\partial F}{\partial y}(A) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu A , na kterém je rovnicí $F(x, y) = 0$ definována jediná spojitá implicitní funkce $y = f(x)$.

Poznámka: Podmínka na nenulovost parciální derivace funkce F je pouze podmínkou postačující pro existenci implicitní funkce. Z rovnice $y^3 - x = 0$ plyne $F(x, y) = y^3 - x$ a v bodě $[0, 0]$ platí $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 3y^2|_{[0,0]} = 0$. Přesto na okolí bodu $[0, 0]$ existuje jediná implicitní funkce $y = \sqrt[3]{x}$.

Derivace implicitní funkce

Věta 2.2.44: Necht' jsou splněny předpoklady předchozí věty. Necht' existují spojitě parciální derivace funkce F . Pak má implicitní funkce f , která je na okolí bodu A dána rovnicí $F(x, y) = 0$, derivaci f' v bodě x_0 a platí

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(A)}{\frac{\partial F}{\partial y}(A)}.$$

Věta 2.2.45: Tečna t resp. normála n k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě A je určena rovnicí

$$\begin{aligned} t : \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)(y - y_0) &= 0, \\ n : \frac{\partial F}{\partial y}(A)(x - x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(A)(y - y_0) &= 0. \end{aligned}$$

44 - Lokální extrémy

Video

Řešené příklady: 120, 122
Příklady: 235, 236, 237, 238

2.3 Extrémy funkcí dvou proměnných

2.3.1 Lokální extrémy

Definice 2.3.46: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A \in D_f$ **lokální maximum**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq D_f$ bodu A takové, že $\forall X \in \mathcal{O}(A)$ platí $f(X) \leq f(A)$. Platí-li $f(X) \geq f(A)$, jedná se o **lokální minimum** v bodě A (v případě ostrých nerovností hovoříme o ostrém lokálním maximu resp. minimu).

Definice 2.3.47: Řekneme, že bod $A \in D_f$ je **stacionárním bodem** funkce f , jestliže

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0.$$

Fermatova věta - nutná podmínka existence extrému

Věta 2.3.48: Necht' má funkce f v bodě A lokální extrém a necht' v A existují všechny parciální derivace prvního řádu. Pak je bod A stacionárním bodem funkce f .

Poznámka:

- Fermatova věta nevylučuje možnost existence extrému v bodě, který není stacionárním bodem funkce f , protože některá z parciálních derivací neexistuje.
- Podmínka pro stacionární body je ekvivalentní s podmínkou $df(A) = 0$, platí-li ovšem, že $df(A) \neq 0$, pak lokální extrém v A neexistuje.

45 - Lokální extrémy

Video

Řešené příklady: 120, 122
Příklady: 235, 236, 237, 238

Věta 2.3.49: Necht' existují alespoň spojitě parciální derivace druhého řádu funkce f ve stacionárním bodě A , pak platí-li

- $d^2f(A) < 0$, funkce f má v bodě A **ostré lokální maximum**,
- $d^2f(A) > 0$, funkce f má v bodě A **ostré lokální minimum**.

Postačující podmínka pro existenci extrému

Věta 2.3.50: Necht' je funkce f na okolí bodu A dvakrát spojitě diferencovatelná. Necht' A je stacionární bod. Jestliže

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2 > 0,$$

pak má funkce f v A ostrý lokální extrém. Platí-li navíc

- $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$, funkce f má v bodě A **ostré lokální maximum**,
- $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$, funkce f má v bodě A **ostré lokální minimum**.

Poznámka: Jestliže $D_2 = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout. Toto lze v některých případech vyřešit prověřením lokálního chování funkce f na okolí bodu A .

46 - Vázané extrémy

Video **Řešené příklady: 124, 125**
Příklady: 239, 240

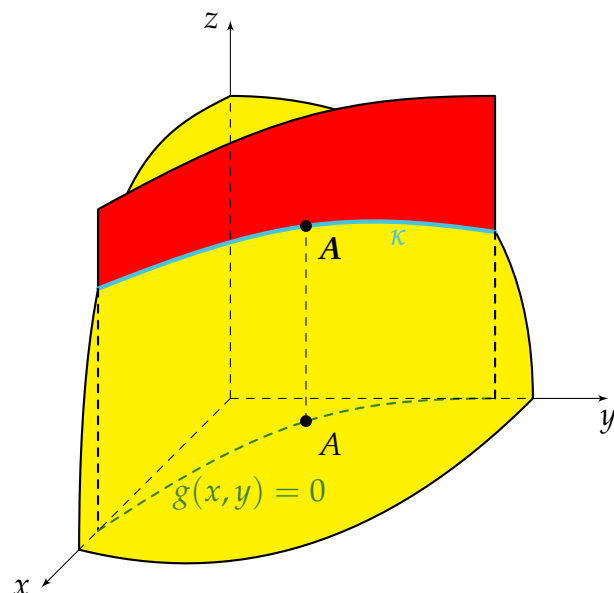
2.3.2 Vázané extrémy

Definice 2.3.51: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0]$ **lokální extrém vázaný podmínkou** $g(x, y) = 0$, jestliže $\forall X \in \mathcal{O}(A) \subset D_f$, které vyhovuje uvedené podmínce, platí

- $f(X) \leq f(A)$, funkce f má v bodě A **vázané lokální maximum**,
- $f(X) \geq f(A)$, funkce f má v bodě A **vázané lokální minimum**.

Geometrický význam vázaných extrémů

Vázaný extrém může nastat pouze v bodech z definičního oboru funkce f , které leží na křivce $g(x, y) = 0$. Těmto bodům odpovídají body na ploše $z = f(x, y)$ tvořící prostorovou křivku κ , průsečnici plochy s válcovou plochou $g(x, y) = 0$. Z geometrického hlediska se jedná o lokální extrémy prostorové křivky.



Lagrangeova metoda

Věta 2.3.52: Buď dána funkce $z = f(x, y)$ a podmínka $g(x, y) = 0$. Jestliže má funkce

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

ve svém stacionárním bodě lokální extrém, má i funkce f v tomto bodě lokální extrém vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$.

Poznámka:

- Funkce Φ se nazývá **Lagrangeova funkce**, číslo λ **Lagrangeův multiplikátor**.
- Stacionární body určíme jako řešení soustavy rovnic,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

- Pokud lze jednoznačně z rovnice vyjádřit $y = \varphi(x)$ resp. $x = \psi(y)$, pak vázané lokální extrémy hledáme jako lokální extrémy funkce $z = f(x, \varphi(x))$ resp. $z = f(\psi(y), y)$.

47 - Globální extrémy

Video

Řešené příklady: 126
Příklady: 241, 242, 243

2.3.3 Globální extrémy

Definice 2.3.53: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0]$ **globální extrém** na uzavřeném definičním oboru D_f , jestliže $\forall X \in D_f$ platí

- $f(X) \leq f(A)$, funkce f má v bodě A **globální maximum**,
- $f(X) \geq f(A)$, funkce f má v bodě A **globální minimum**.

Poznámka:

- V případě ostrých nerovností hovoříme o **ostrých globálních extrémech**.
- Množina D_f se nazývá **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body. **Hraničním bodem** množiny D_f je takový bod, jehož každé okolí obsahuje body X takové, že $X \in D_f$ a současně obsahuje body Y takové, že $Y \notin D_f$.
- Na rozdíl od lokálních extrémů, které hledáme na okolích bodů, hledáme globální extrémy na celém D_f .

Postup určování globálních extrémů

- určíme definiční obor D_f funkce $z = f(x, y)$,
- nalezneme lokální extrémy této funkce na množině D_f , ze které vyloučíme hranici $g(x, y) = 0$,
- určíme vázané extrémy této funkce vzhledem k podmínce $g(x, y) = 0$,
- porovnáme funkční hodnoty všech extrémů, bod s největší funkční hodnotou bude globálním maximem, bod s nejmenší funkční hodnotou bude globálním minimem.

Kapitola 3

Obyčejné diferenciální rovnice

49 - Diferenciální rovnice n -tého řádu, základní pojmy

Video

Řešené příklady: 128-150
Příklady: 245-278

3.1 Diferenciální rovnice n -tého řádu

Definice 3.1.54: Rovnice tvaru $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0$ se nazývá **obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu** pro neznámou funkci $y = y(x)$. Speciálně pro $n = 1$ je

$$F(y', y, x) = 0 \quad \text{nebo} \quad y' = f(x, y)$$

diferenciální rovnice prvního řádu.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace neznáme funkce $y(x)$, který se v rovnici vyskytuje.

Řešením (integrálem) diferenciální rovnice na intervalu I je každá funkce $y(x)$, která má spojité derivace až do řádu n včetně a dané diferenciální rovnici vyhovuje.

Křivka, která znázorňuje některé řešení diferenciální rovnice se nazývá **integrální křivkou** této diferenciální rovnice.

Z hlediska obecnosti rozlišujeme následující typy řešení

- **obecné řešení** rovnice n -tého řádu představuje množinu funkcí tvaru

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad \text{nebo} \quad y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

tj. množina funkcí obsahující n konstant $C_1, C_2, \dots, C_n$,

- **partikulární řešení** je konkrétní řešení, které získáme z obecného řešení volbou nebo výpočtem konstant $C_1, C_2, \dots, C_n$,
- **výjimečné řešení** je řešení, které nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant $C_1, C_2, \dots, C_n$.

50 - Separovatelné diferenciální rovnice

Video

Řešené příklady: 129-139
Příklady: 245-263

3.2 Některé metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

Definice 3.2.55: Diferenciální rovnici se separovanými proměnnými rozumíme každou rovnici, kterou lze zapsat ve tvaru

$$Q(y)y' = P(x), \quad \text{tj.} \quad Q(y)dy = P(x)dx,$$

pokud nahradíme derivaci y' podílem $\frac{dy}{dx}$.

Na první pohled vidíme, že zde jsou proměnné odděleny (separovány) na jednotlivé strany rovnice a je možné provést integraci, která vede přímo k řešení

$$\int Q(y)dy = \int P(x)dx + C.$$

Primitivním funkcím na obou stranách rovnosti správně náleží dvě integrační konstanty, které se však spojují do jedné, kterou zpravidla zapisujeme k výrazu s nezávislou proměnnou.

3.2.1 Separovatelné diferenciální rovnice

V praxi se můžeme setkat s řadou úloh, které lze pomoci jednoduchých operací převést na diferenciální rovnici separovanou. Takové rovnice se označují jako rovnice **separovatelné**. K těmto rovnicím řadíme následující typy rovnic:

- $y' = P(x)Q(y)$,
- $y' = f(ax + by + c)$,
- $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogenní dif. rovnice).

51 - Separovatelné diferenciální rovnice

Video

Řešené příklady: 129-135
Příklady: 245-255

Diferenciální rovnice typu $y' = P(x)Q(y)$

Rovnici typu $y' = P(x)Q(y)$ lze za předpokladu, že $Q(y) \neq 0$ a užitím identity $y' = \frac{dy}{dx}$ upravit na tvar

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx,$$

což je již diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Její obecné řešení lze za daných předpokladů zapsat ve tvaru

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C.$$

Diferenciální rovnice typu $y' = f(ax + by + c)$

Diferenciální rovnici tvaru $y' = f(ax + by + c)$, kde $b \neq 0$, lze převést substitucí $u(x) = ax + by + c$ na rovnici se separovanými proměnnými. Nejprve rovnost derivujeme podle proměnné x , tedy

$$u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}.$$

Dosazením do dané diferenciální rovnice obdržíme rovnici

$$\frac{u' - a}{b} = f(u) \Rightarrow u' = a + bf(u).$$

Pro $a + bf(u) \neq 0$ dostaneme

$$\frac{1}{a + bf(u)} u' = 1,$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými pro funkci $u = u(x)$.

52 - Separovatelné diferenciální rovnice, homogenní rovnice

Video

Řešené příklady: 136, 137, 138, 139
Příklady: 256-263

Homogenní diferenciální rovnice

Definice 3.2.56: Diferenciální rovnice $F(x, y, y') = 0$ se nazývá **homogenní**, pokud ji lze pro $x \neq 0$ upravit na tvar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Homogenní diferenciální rovnici převedeme substitucí $y = zx$, kde $z = z(x)$, na diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro novou neznámou funkci $z(x)$. Ze substituce $y = zx$, tj. $z = \frac{y}{x}$ plyne po derivování $y' = z'x + z$. Dosazením do zadané homogenní diferenciální rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} z'x + z &= f(z) \\ \frac{1}{z - f(z)} z' &= -\frac{1}{x}, \end{aligned}$$

pro $z - f(z) \neq 0$, což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými pro funkci $z = z(x)$.

Poznámka: Připomeňme si, kdy se funkce $f(x, y)$ na oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$ **nazývá homogenní stupně k** a ukážeme si, jak tento pojem souvisí s homogenní diferenciální rovnicí.

Definice 3.2.57: Funkce $f(x, y)$ se nazývá **homogenní funkce stupně k** , $k \in \mathbb{N}$, na oblasti Ω právě tehdy, když v každém bodě $[x, y] \in \Omega$ pro libovolné $t \neq 0$ platí

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Budeme-li předpokládat, že funkce $P(x, y), Q(x, y)$ jsou homogenní stejného stupně k , potom rovnice $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ je homogenní diferenciální rovnicí.

Tedy

$$\begin{aligned} P(tx, ty) &= t^k P(x, y) \quad \wedge \quad Q(tx, ty) = t^k Q(x, y) \\ \frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)} &= \frac{t^k P(x, y)}{t^k Q(x, y)} \Rightarrow \frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \end{aligned}$$

Rovnici $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ lze pro $Q(x, y) \neq 0$ upravit na tvar

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \Rightarrow y' = -\frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)},$$

a z této rovnice pro $t = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ dostaneme

$$y' = -\frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} \Rightarrow y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

což je homogenní diferenciální rovnice.

53 - Exaktní diferenciální rovnice

Video **Řešené příklady: 140**
Příklady: 264, 265 

3.2.2 Exaktní diferenciální rovnice

Definice 3.2.58: Diferenciální rovnice $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ se nazývá **exaktní**, jestliže výraz $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ je **totálním diferenciálem** jisté funkce $F(x, y)$ označované jako **kmenová funkce**.

Věta 3.2.59: Jsou-li funkce $P(x, y)$, $Q(x, y)$ diferencovatelné na oblasti Ω , potom je rovnice $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ exaktní právě tehdy, když na oblasti Ω platí

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Je-li $F(x, y)$ kmenovou funkcí příslušného diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar

$$F(x, y) = C.$$

Z věty vyplývá, že nalézt obecné řešení exaktní diferenciální rovnice znamená nalézt kmenovou funkci $F(x, y)$. Vzhledem k tomu, že levá strana rovnice $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ je totálním diferenciálem hledané funkce F , musí platit, že

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad \wedge \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Máme tedy dvě možnosti jak postupovat při jejím hledání. Budeme-li vycházet např. z první rovnice, potom integrací podle proměnné x dostaneme

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y) = U(x, y) + \varphi(y),$$

kde $U(x, y)$ je primitivní funkce a $\varphi(y)$ je zatím neznámá funkce mající význam „integrační konstanty“, která ale může být funkcí proměnné y .

Tuto rovnici derivujeme podle proměnné y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy}$$

a porovnáním s druhou rovnici dostaneme

$$\frac{d\varphi}{dy} = Q - \frac{\partial U}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \int \left(Q - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy$$

Nyní musíme ukázat, že funkce $Q - \frac{\partial U}{\partial y}$ je vždy funkcí pouze proměnné y . To ukážeme tak, že jeho derivace podle proměnné x bude vždy rovna nule:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Q - \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Hledaná kmenová funkce je

$$F(x, y) = U(x, y) + \int \left(Q(x, y) - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right) dy + C,$$

kde $U(x, y) = \int P(x, y)dx$.

Poznámka: Budeme-li při hledání kmenové funkce vycházet z rovnice $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$, potom po integraci podle proměnné y a použití analogických operací obdržíme kmenovou funkci ve tvaru

$$F(x, y) = V(x, y) + \int \left(P(x, y) - \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \right) dx + K,$$

kde $V(x, y) = \int Q(x, y)dy$.

54 - Exaktní diferenciální rovnice

Video

Řešené příklady: 140
Příklady: 264, 265

Kmenovou funkci $F(x, y)$ lze v mnohých případech určit jednodušším způsobem. Integrací rovnice $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$ podle proměnné x , resp. rovnice $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$ podle proměnné y dostaneme:

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx = U(x, y) + C_1,$$

$$F(x, y) = \int Q(x, y) dy = V(x, y) + C_2.$$

Lze ukázat, že kmenová funkce $F(x, y)$ je sjednocením množin sčítanců tvořících funkce $U(x, y)$ a $V(x, y)$. Nevýhodou ovšem je, že v některých případech není na první pohled zřejmé, zda se některé sčítance liší pouze o konstantu.

Celý algoritmus řešení exaktní rovnice je následující:

1. Ověříme, zda platí podmínka exaktnosti $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$.
2. Vypočítáme kmenovou funkci $F(x, y)$.
3. Určíme obecné řešení rovnice ve tvaru $F(x, y) = C$.

55 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Video

Řešené příklady: 141-145
Příklady: 266-273

3.2.3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 3.2.60: Lineární diferenciální rovnici prvního řádu (zkráceně LDR) nazýváme každou rovnici tvaru

$$y' + yp(x) = q(x),$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité funkce na určitém intervalu $\langle a, b \rangle$. Dále

1. je-li $q(x) = 0$, hovoříme o **zkrácené LDR**,
2. je-li $q(x) \neq 0$, hovoříme o **nezkrácené (úplné) LDR**.

Věta 3.2.61: Obecné řešení úplné lineární diferenciální rovnice má tvar

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x),$$

kde $\hat{y}(x)$ je řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení úplné lineární diferenciální rovnice.

Funkce $v(x)$ bývá také nazývána jako **partikulární integrál úplné lineární diferenciální rovnice**.

56 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu, řešení zkrácené LDR

Video

Řešené příklady: 141-145
Příklady: 266-273**Obecné řešení zkrácené lineární diferenciální rovnice 1. řádu**

Věta 3.2.62: Zkrácená LDR $y' + yp(x) = 0$ má na intervalu $\langle a, b \rangle$ obecné řešení tvaru

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Rovnice $y' + yp(x) = 0$ je diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými, tedy

$$\frac{dy}{dx} + yp(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}dy = -p(x)dx, \text{ pro } y \neq 0.$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int p(x)dx + K \Rightarrow \ln |y| = -\int p(x)dx + K$$

$$|y| = e^K e^{-\int p(x)dx},$$

$$y = \pm e^K e^{-\int p(x)dx}.$$

Obecné řešení hledáme ve tvaru

$$y = \pm e^K e^{-\int p(x)dx}.$$

Označíme-li $C = \pm e^K$, potom obecné řešení lze psát ve tvaru

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

57 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu, řešení úplné LDR

Video

Řešené příklady: 141-145
Příklady: 266-273

Obecné řešení úplné lineární DR 1. řádu

Věta 3.2.63: Úplná LDR 1. řádu $y' + yp(x) = q(x)$ má obecné řešení ve tvaru

$$y = \frac{1}{E(x)} \left[\int E(x)q(x)dx + K \right],$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Důkaz věty je konstruktivní, tj. ukazuje způsob řešení úplné LDR, který vede k uvedenému vzorci. Níže uvedený postup se nazývá **Metoda variace konstanty**.

1. Určíme obecné řešení zkrácené LDR $y' + p(x)y = 0$, které označíme $\hat{y}$:

$$\hat{y} = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

2. Obecné řešení úplné LDR hledáme ve tvaru

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

tzn. v obecném řešení zkrácené rovnice jsme konstantu C nahradili zatím neurčenou funkcí $C(x)$. Tuto funkci určíme z předpokladu, že $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ je řešením úplné LDR. Dosadíme funkci y a její derivaci

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)$$

do úplné LDR 1. řádu a dostaneme

$$\underbrace{C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)}_{y'(x)} + \underbrace{C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)}_{y(x)} = q(x).$$

Na levé straně rovnice se vždy musí odečíst dva členy obsahující $C(x)$. V rovnici zůstane $C'(x)$ jen ve formě derivace.

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Označíme-li $E(x) = e^{\int p(x)dx}$, obdržíme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $C(x)$ ve tvaru

$$C'(x) = q(x)E(x).$$

Její obecné řešení lze psát ve tvaru

$$C(x) = \int q(x)E(x)dx + K$$

a dosazením do $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ dostaneme

$$y = \frac{1}{E(x)} \left[\int q(x)E(x)dx + K \right],$$

což je hledané řešení úplné lineární diferenciální rovnice.

Poznámka: Pokud bychom roznásobili obdržené řešení úplné lineární diferenciální rovnice a dosadili za $E(x)$ výraz $e^{\int p(x)dx}$, viděli bychom, že obdržené řešení je dáno součtem řešení zkrácené rovnice a partikulárního integrálu

$$y(x) = \underbrace{Ke^{-\int p(x)dx}}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}}_{v(x)}.$$

58 - Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu, vlastnosti LDR

Video

Řešené příklady: 146-150
Příklady: 274-278

3.3 Vlastnosti lineárních diferenciálních rovnic

Definice 3.3.64: Lineární diferenciální rovnici (LDR) n -tého řádu nazýváme rovnici tvaru

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0y = b(x),$$

kde funkce $a_i(x)$, $b(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $a(x) \neq 0$.

Je-li $b(x) = 0$, mluvíme o **zkrácené (homogenní)** LDR, je-li $b(x) \neq 0$, jde o **úplnou (nehomogenní)** LDR. Je-li $a_n(x) = 1$, jedná se o **normovanou** LDR.

Dále budeme používat označení pro tzv. diferenciální operátor levé strany:

$$L^n(y) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0y,$$

$$\tilde{L}^n(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0y.$$

Diferenciální operátory L^n a $\tilde{L}^n$ jsou **lineární**, neboť pro libovolné n -krát diferencovatelné funkce $u(x)$, $v(x)$ a konstantu c platí

$$L^n(cu) = cL^n(u), \quad L^n(u + v) = L^n(u) + L^n(v).$$

Tedy lineární diferenciální rovnici n -tého řádu můžeme nyní zapsat ve tvaru $L^n(y) = b(x)$, resp. normovanou rovnici ve tvaru $\tilde{L}^n(y) = b(x)$.

Věta 3.3.65: (věta o snížení řádu LDR) Necht' je dána lineární diferenciální rovnice $L^n(y) = b(x)$. Známe-li jedno nenulové řešení $y_1(x)$ zkrácené rovnice $L^n(y) = 0$, potom substitucí

$$y = y_1(x) \int v(x) dx,$$

kde $v(x)$ je spojitá funkce, přejde rovnice $L^n(y) = b(x)$ v LDR řádu $n - 1$ pro novou neznámou funkci $v(x)$.

59 - Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu, struktura řešení

Video

Řešené příklady: 146-150
Příklady: 274-2783.4 Struktura řešení zkrácené LDR n -tého řádu

Z lineární algebry je známo, že množina všech funkcí spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$ tvoří lineární prostor. V této souvislosti má smysl vymezení pojmů jako jsou lineární závislost resp. lineární nezávislost.

Definice 3.4.66: Řekneme, že funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou na intervalu I **lineárně závislé**, jestliže existují konstanty $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ takové, že

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0,$$

přičemž alespoň jedno z čísel C_i je různé od nuly. V opačném případě jsou funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ na intervalu I **lineárně nezávislé**.

V praxi bývá poměrně často potřeba nezávislost funkcí ověřovat a k tomu využijeme tzv. Wronského determinant.

Definice 3.4.67: Necht' funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ mají na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitě derivace až do $n - 1$ řádu včetně. Potom determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \dots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

se nazývá **Wronského determinant (wronskián)** příslušný k funkcím $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Vztah mezi Wronského determinantem a řešeními zkrácené LDR n -tého řádu je takový, že jsou-li funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ lineárně závislá řešení normované rovnice $\tilde{L}^n(y) = 0$ na intervalu I , ve kterém jsou koeficienty $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ spojitě funkce, potom jejich wronskián $W(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.

Množina všech řešení LDR $L^n(y) = 0$ tvoří vektorový prostor, jehož dimenze je rovna řádu dané diferenciální rovnice a každou n -tici lineárně nezávislých řešení této rovnice nazýváme **fundamentálním systémem řešení**. Fundamentální systém řešení tvoří bázi prostoru řešení.

Tedy tvoří-li funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fundamentální systém řešení rovnice $L^n(y) = 0$, potom obecné řešení této rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_n$ jsou libovolné konstanty.

60 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Video

Řešené příklady: 146-150
Příklady: 274-278

3.5 Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Definice 3.5.68: Lineární diferenciální rovnice (LDR) druhého řádu má tvar

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x),$$

kde funkce (nebo konstanty) $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ jsou koeficienty rovnice a funkci $b(x)$ nazýváme pravou stranou rovnice. Dále

1. je-li $b(x) = 0$, hovoříme o **zkrácené LDR**,
2. je-li $b(x) \neq 0$, hovoříme o **nezkrácené (úplné) LDR**.

Definice 3.5.69: Počáteční (Cauchyho) úlohou pro rovnici

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

nazýváme úlohu najít takové řešení $y(x)$ této rovnice, která splňuje podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Poznámka: Při řešení počáteční úlohy postupujeme tak, že dosazením zadaných podmínek do obecného řešení a do jeho první derivace dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých pro konstanty C_1 a C_2 .

Řešíme-li konkrétní problémy z praxe, které jsou popsány diferenciálními rovnicemi, často zjistíme, že jednotlivé parametry (hmotnost, hustota, frekvence, atd.), které vystupují jako koeficienty diferenciálních rovnic, jsou konstanty. Takovéto úlohy tvoří základní skupinu mezi LDR druhého řádu.

Zaměříme se nejprve na zkrácené LDR druhého řádu s konstantními koeficienty ve tvaru

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

61 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu, charakteristická rovnice

Video

Řešené příklady: 146-150
Příklady: 274-278

3.5.1 Charakteristická rovnice

Lze ukázat, že existují řešení rovnice $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ve tvaru $y = e^{rx}$, kde r je konstanta, která vystupuje jako neznámá v algebraické rovnici

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

Tuto rovnici označujeme jako **charakteristickou rovnici** LDR druhého řádu. Ta může mít reálné i komplexní kořeny s různou násobností, a podle toho rozlišujeme následující případy:

- má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny r_1, r_2 , potom **fundamentální systém řešení** je $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

- má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen r , potom **fundamentální systém řešení** je e^{rx}, xe^{rx} a její obecné řešení je

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx},$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

- má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, potom **fundamentální systém řešení** je $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

62 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu, metoda variace konstant

Video

Řešené příklady: 146-150
Příklady: 274-278

3.5.2 Metoda variace konstant

Věta 3.5.70: (Variace konstant pro LDR 2. řádu) Obecné řešení rovnice

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

s konstantními koeficienty a_0, a_1, a_2 lze vyjádřit ve tvaru

$$y = \hat{y}(x) + y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx,$$

kde $\hat{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ je obecné řešení příslušné zkrácené rovnice, $W(x)$ wronskián jejího fundamentálního systému a $W_1(x), W_2(x)$ jsou determinanty, vytvořené z wronskiánu $W(x)$ nahrazením 1. (resp. 2.) sloupce vektorem pravých stran $(0, b/a_2)$.

Úplnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

budeme řešit za předpokladu, že známe řešení zkrácené rovnice $\hat{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Dále předpokládáme, že obecné řešení úplné lineární diferenciální rovnice druhého řádu bude mít stejný tvar jako řešení zkrácené rovnice, avšak ve vzorci nahradíme konstanty C_1, C_2 neznámými funkcemi $C_1(x), C_2(x)$. Provedeme tzv. **variaci konstant**. Hledáme tedy řešení ve tvaru

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

takže

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'.$$

Volba nových funkcí $C_1(x), C_2(x)$ umožňuje stanovit vhodnou doplňující podmínku, a tou je požadavek, aby

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0.$$

Odtud potom je

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \quad \text{a} \quad y'' = C_1' y_1 + C_1 y_1'' + C_2' y_2 + C_2 y_2''.$$

Získaný vztah pro funkci $y(x)$ a její derivace dosadíme do úplné rovnice a po úpravě obdržíme

$$C_1(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + C_2(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + a_2(C_1' y_1 + C_2' y_2) = b.$$

Protože y_1, y_2 jsou řešení příslušné zkrácené rovnice, musí být výrazy v závorkách rovny nule a dostaneme $C_1' y_1 + C_2' y_2 = \frac{b}{a_2}$. Tím jsme obdrželi druhou podmínku pro derivace neznámých funkcí $C_1(x), C_2(x)$ a můžeme řešit soustavu lineárních rovnic

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0,$$

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = \frac{b}{a_2}.$$

Její determinant je wronskiánem funkcí y_1, y_2 , který je různý od nuly, neboť obě funkce jsou podle předpokladu lineárně nezávislé. Soustava má tedy jediné řešení, které nalezneme pomocí **Cramerova pravidla** pro řešení soustav lineárních rovnic

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}.$$

Po integraci těchto vztahů dostaneme

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + K_1, \quad C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx + K_2,$$

kde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li do předpokládaného řešení, potom po roznásobení dostaneme obecné řešení zadané rovnice v požadovaném tvaru

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx.$$

63 - Lineární dif. rovnice 2. řádu, metoda neurčitých koeficientů

Video

Řešené příklady: 146-150
Příklady: 274-278**3.5.3 Metoda neurčitých koeficientů**

Ve fundamentálním systému LDR s konstantními koeficienty se mohou vyskytovat pouze polynomy, přirozené exponenciální funkce a funkce goniometrické, případně jejich součiny. Je-li také pravá strana $b(x)$ v diferenciální rovnici polynom, exponenciální nebo goniometrická funkce, popřípadě jejich součin, lze partikulární integrál nalézt jednodušší metodou, než je variace konstant.

Postupujeme tak, že partikulární integrál zvolíme předem, a to stejného typu jako je pravá strana rovnice, ale s obecnými koeficienty, které určíme dosazením partikulárního integrálu do původní rovnice a porovnáním jejich obou stran. Podrobněji nám o tom pojednává následující věta.

Věta 3.5.71: (Metoda neurčitých koeficientů) Jestliže má pravá strana LDR s konstantními koeficienty tvar

$$b(x) = e^{\lambda x}(p_m(x) \cos \omega x + q_n(x) \sin \omega x),$$

kde $p_m(x), q_n(x)$ jsou polynomy stupňů m, n se zadanými koeficienty. Dále je-li číslo $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ k -násobným kořenem její charakteristické rovnice, potom volíme partikulární integrál ve tvaru

$$v(x) = x^k e^{\lambda x}(P_M(x) \cos \omega x + Q_M(x) \sin \omega x),$$

kde $M = \max\{m, n\}$. Koeficienty polynomů $P_M(x)$ a $Q_M(x)$ určíme porovnávací metodou po dosazení partikulárního integrálu do původní rovnice.

Matematika II: Řešené příklady

Radomír Paláček, Petra Schreiberová, Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Řešené příklady – Integrální počet funkcí jedné proměnné

66 - Přímá metoda

Zadání Vypočtěte integrál $\int \left(7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{1+x^2} \right) dx$.

Řešení Video Teorie: 11, 12, 13 Příklady: 153, 154, 155 

Integrand je složen ze součtu tří funkcí, proto využijeme vlastnosti o integraci součtu funkcí (13.), dostaneme součet tří integrálů:

$$\int 7\sqrt[3]{x^2} dx + \int \frac{1}{2} \sin x dx - \int \frac{2}{1+x^2} dx,$$

ve všech integrálech je funkce ve tvaru konstanta krát funkce, využijeme tedy druhé vlastnosti (14.) a konstanty vytkneme před integrál:

$$7 \int \sqrt[3]{x^2} dx + \frac{1}{2} \int \sin x dx - 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx,$$

funkci $\sqrt[3]{x^2}$ si napíšeme ve tvaru mocninné funkce $x^{\frac{2}{3}}$.

S využitím vlastností jsme získali základní integrály, které již podle vzorců (2.), (6.) a (11.) integrujeme.

Výsledek:

$$\int \left(7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{1+x^2} \right) dx = 7 \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} \cos x - 2 \arctan x + c = \frac{21}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{2} \cos x - 2 \arctan x + c.$$

Poznámky

Základní integrály

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$
 $f = f(x) \quad g = g(x)$
13. $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$
14. $\int (k \cdot f) dx = k \int f dx, k \in \mathbb{R}$

67 - Přímá metoda

Zadání Vypočtěte integrál $\int \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + \frac{4}{1 - \cos^2 x} \right) dx$.

Řešení Video **Teorie: 11, 12, 13 Příklady: 153, 154, 155, 156** 

Integrand je složen ze součtu funkcí, proto opět využijeme vlastnosti o integraci součtu funkcí (13.), dostaneme součet dvou integrálů:

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx + \int \frac{4}{1 - \cos^2 x} dx.$$

Výpočet prvního integrálu:

s využitím vzorce $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ upravíme čítec

$$\int \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^x - 1) dx,$$

rozdělíme na 2 integrály a pomocí vzorců pro integrování (3.), (1.) vypočítáme

$$\int (e^x - 1) dx = e^x - x + c.$$

Výpočet druhého integrálu:

využijeme vlastnosti (14.), konstantu vytkneme před integrál, jmenovatel si upravíme ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$) a podle (9.) integrujeme

$$\int \frac{4}{1 - \cos^2 x} dx = 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -4 \cot x + c.$$

Výsledek:

$$\int \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + \frac{4}{1 - \cos^2 x} \right) dx = e^x - x - 4 \cot x + c.$$

Poznámky

Základní integrály

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$
 $f = f(x) \quad g = g(x)$
13. $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$
14. $\int (k \cdot f) dx = k \int f dx, k \in \mathbb{R}$

68 - Přímá metoda

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{-2}{\tan x \cos^2 x} dx$.

Řešení Video Teorie: 11, 12, 13 Příklady: 153, 154, 155, 156 

Vidíme integrand ve tvaru zlomku, proto nejdříve kontrolujeme, zda nelze využít vzorec (12.).

Víme, že $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Po úpravě integrandu dostáváme:

$$\int \frac{-2}{\tan x \cos^2 x} dx = -2 \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x} dx.$$

Tedy platí, že derivace jmenovatele je v čitateli a lze využít vzorec (12.).

Výsledek:

$$\int \frac{-2}{\tan x \cos^2 x} dx = -2 \ln |\tan x| + c.$$

Poznámky*Základní integrály*

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$
 $f = f(x) \quad g = g(x)$
13. $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$
14. $\int (k \cdot f) dx = k \int f dx, k \in \mathbb{R}$

69 - Lineární substituce, obecné vzorce

Zadání Vypočtěte integrály: $\int e^{-3x+1} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{4 - (3x - 1)^2}} dx$.

Řešení

Video **Teorie: 17** **Příklady: 157, 158** 

Výpočet integrálu $\int e^{-3x+1} dx$.

Integrand je ve tvaru e^{ax+b} , proto k nalezení primitivní funkce využijeme lineární substituce vzorec (1.), varianta (3.), kde $a = -3$, $b = 1$.

Výsledek:

$$\int e^{-3x+1} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x+1} + c.$$

Výpočet integrálu $\int \frac{1}{\sqrt{4 - (3x - 1)^2}} dx$.

Integrand je ve tvaru $\frac{1}{\sqrt{d^2 - (ax + b)^2}}$, proto k nalezení primitivní funkce využijeme opět lineární substituci vzorec (1.) varianta (7.), kde $a = 3$, $b = -1$, $d = 2$.

Výsledek:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - (3x - 1)^2}} dx = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x - 1}{2} + c.$$

Poznámky

Lineární substituce, obecné vzorce

1. $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$
2. $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n + 1} + c$
3. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$
4. $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$
5. $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
6. $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{d^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{d} + c$
8. $\int \frac{1}{d^2 + x^2} dx = \frac{1}{d} \arctan \frac{x}{d} + c$

70 - Metoda per partes

Zadání Vypočtěte integrál $\int (-2x + 3) \cos 3x dx$.

Řešení

Video **Teorie: 14, 15** **Příklady: 159, 160, 161** 

Integrál je ve tvaru $\int P(x) \cos ax dx$, což je integrál typický pro výpočet metodou per partes, kde polynom $P(x)$ derivujeme a funkci $\cos ax$ integrujeme.

$$\begin{aligned} u &= -2x + 3 & v' &= \cos 3x \\ u' &= -2 & v &= \frac{1}{3} \sin 3x \end{aligned}$$

Po aplikaci PP :

$$\int (-2x + 3) \cos 3x dx = \frac{-2x + 3}{3} \sin 3x - \int \frac{-2}{3} \sin 3x dx = \frac{-2x + 3}{3} \sin 3x + \frac{2}{3} \int \sin 3x dx.$$

Dostali jsme jednodušší integrál $\int \sin 3x dx$, který již umíme vyřešit pomocí vzorců,

$$\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + c.$$

Výsledek:

$$\int (-2x + 3) \cos 3x dx = \frac{-2x + 3}{3} \sin 3x - \frac{2}{9} \cos 3x + c.$$

Poznámky

Metoda per partes

$$\begin{aligned} u &= u(x) & v' &= v'(x) \\ u' &= u'(x) & v &= v(x) \end{aligned}$$

$$\int (u \cdot v') dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v) dx$$

71 - Metoda per partes

Zadání Vypočtěte integrál $\int \ln^2 x dx$.

Řešení

Video **Teorie: 14, 15** **Příklady: 159, 160, 161** 

Funkci $\ln^2 x$ integrovat neumíme, proto musíme k výpočtu využít metodu per partes, kde si integrand napíšeme ve tvaru součinu funkce s jedničkou : $\int 1 \cdot \ln^2 x dx$.

Volíme

$$\begin{aligned} u &= \ln^2 x & v' &= 1 \\ u' &= 2 \frac{\ln x}{x} & v &= x \end{aligned}$$

Po aplikaci PP :

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2 \int x \frac{\ln x}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx.$$

Dostali jsme jednodušší integrál $\int \ln x dx$, který řešíme opět metodou PP

$$\begin{aligned} u &= \ln x & v' &= 1 \\ u' &= \frac{1}{x} & v &= x \end{aligned}$$

Po aplikaci PP :

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c.$$

Výsledek:

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + c.$$

Poznámky

Metoda per partes

$$\begin{aligned} u &= u(x) & v' &= v'(x) \\ u' &= u'(x) & v &= v(x) \end{aligned}$$

$$\int (u \cdot v') dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v) dx$$

72 - Substituční metoda

Zadání Vypočtěte integrál $\int x \tan(x^2 - 2) dx$.

Řešení

Video **Teorie: 16, 17** **Příklady: 162, 163, 164** 

Derivace vnitřní funkce je rovna (až na násobek) druhé funkci v součinu, $(x^2 - 2)' = 2x$, využijeme tedy substituce:

$$\begin{aligned}x^2 - 2 &= t \\ 2x dx &= dt \\ x dx &= \frac{1}{2} dt\end{aligned}$$

Po aplikaci:

$$\int x \tan(x^2 - 2) dx = \frac{1}{2} \int \tan t dt.$$

Dostali jsme integrál $\int \tan t dt$, který si napíšeme ve tvaru $\int \frac{\sin t}{\cos t} dt$.

Všimneme si, že derivace jmenovatele je v čitateli (liší se pouze konstantou), proto tento integrál řešíme přímou metodou s využitím vzorce $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$. Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci.

Výsledek:

$$\int x \tan(x^2 - 2) dx = -\frac{1}{2} \ln |\cos(x^2 - 2)| + c.$$

Poznámky

Substituce typu $\varphi(x) = t$

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

Postup

1. označíme substituci $\varphi(x) = t$
2. rovnost diferencujeme: $\varphi'(x) dx = dt$
3. v integrálu $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$ nahradíme za $\varphi(x)$ proměnnou t a za výraz $\varphi'(x) dx$ diferenciál dt
4. řešíme integrál $\int f(t) dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$

73 - Substituční metoda

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Řešení

Video Teorie: **16, 17** Příklady: **162, 163, 164** 

Integrand je ve tvaru součinu dvou funkcí: $\int \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Derivace jedné funkce je rovna druhé funkci v součinu, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, využijeme tedy substituci:

$$\begin{aligned}\arcsin x &= t \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= dt\end{aligned}$$

Po aplikaci:

$$\int \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t dt.$$

Získali jsme tabulkový integrál, který již umíme pomocí vzorce vypočítat.

$$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c.$$

Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci.

Výsledek:

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\arcsin^2 x}{2} + c.$$

Poznámky

Substituce typu $\varphi(x) = t$

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

Postup

1. označíme substituci $\varphi(x) = t$
2. rovnost diferencujeme: $\varphi'(x) dx = dt$
3. v integrálu $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$ nahradíme za $\varphi(x)$ proměnnou t a za výraz $\varphi'(x) dx$ diferenciál dt
4. řešíme integrál $\int f(t) dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$

74 - Substituční metoda

Zadání Vypočtěte integrál $\int \sin \sqrt{2x+3} dx$.

Řešení

Video **Teorie: 18** **Příklady: 165** 

V prvním kroku potřebujeme odstranit odmocninu z argumentu funkce sinus.

$$\begin{aligned} 2x+3 &= t^2 \\ x &= \frac{t^2-3}{2} \\ dx &= t dt \end{aligned}$$

Po nahrazení novou proměnnou:

$$\int \sin \sqrt{2x+3} dx = \int t \sin \sqrt{t^2} dt = \int t \sin t dt.$$

Nový integrál proměnné t je ve tvaru $\int P(t) \sin at dt$, který řešíme pomocí metody per partes.

$$\begin{aligned} u &= t & v' &= \sin t \\ u' &= 1 & v &= -\cos t \end{aligned}$$

Po aplikaci PP a přímé metody:

$$\int t \sin t dt = -t \cos t + \int \cos t dt = -t \cos t + \sin t + c.$$

Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $t = \sqrt{2x+3}$.

Výsledek:

$$\int \sin \sqrt{2x+3} dx = -\sqrt{2x+3} \cos \sqrt{2x+3} + \sin \sqrt{2x+3} + c.$$

Poznámky

Substituce typu $x = \varphi(t)$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Postup

1. označíme substituci $x = \varphi(t)$
2. rovnost diferencujeme: $dx = \varphi'(t) dt$
3. v integrálu $\int f(x) dx$ nahradíme proměnnou x funkcí $\varphi(t)$ a diferenciál dx výrazem $\varphi'(t) dt$
4. řešíme integrál $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c$

75 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{x^4 + 2}{x - 1} dx$.

Řešení

Video **Teorie: 19** **Příklady: 167, 168, 169** 

V čitateli funkce je stupeň polynomu roven čtyřem, a polynom ve jmenovateli je 1. stupně. Stupeň ve jmenovateli je menší, polynomy tedy lze dělit. Dělíme tak, že vždy vezmeme v čitateli člen s nejvyšší mocninou a vydělíme členem s nejvyšší mocninou ve jmenovateli. Dalším krokem je vynásobení výsledku získaného dělení se jmenovatelem a odečtení od původního polynomu v čitateli (snížíme stupeň čitatele). Provedeme kontrolu, zda získaný polynom je již nižšího stupně než polynom, kterým dělíme. Pokud ano, jedná se o zbytek (ryze lomená funkce), pokud ne, musíme dělit dále.

$$\begin{array}{r}
 (x^4 + 2) : (x - 1) = x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{3}{x - 1} \\
 \underline{-(x^4 - x^3)} \\
 x^3 + 2 \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 x^2 + 2 \\
 \underline{-(x^2 - x)} \\
 x + 2 \\
 \underline{-(x - 1)} \\
 3
 \end{array}$$

Po dělení

$$\int \frac{x^4 + 2}{x - 1} dx = \int \left(x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{3}{x - 1} \right) dx.$$

Využitím vlastností a vzorců řešíme 5 tabulkových integrálů.

Výsledek:

$$\int \frac{x^4 + 2}{x - 1} dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 3 \ln |x - 1| + c.$$

Poznámky

Racionální lomená funkce

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Ryze lomená racionální funkce

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m$$

Neryze lomená racionální funkce

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n \geq m$$

- každou neryze lomenou racionální funkci lze dělením upravit na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce

76 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{x+2}{x^2+x-6} dx$.

Řešení Video Teorie: 20 Příklady: 170, 171, 172 

Funkce je ryze lomená, rozložíme ji na parciální zlomky. Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele,

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

Tvar rozkladu : $\frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$

Vynásobíme výrazem $(x-2)(x+3)$,

$$x+2 = A(x+3) + B(x-2).$$

Využijeme dosazovací metodu:

$$x = 2 : \quad 4 = 5A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4}{5}$$

$$x = -3 : \quad -1 = -5B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{5}$$

Řešíme tedy 2 integrály dle prvního vzorce v „Poznámkách“.

$$\int \frac{x+2}{x^2+x-6} dx = \frac{4}{5} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx.$$

Výsledek:

$$\int \frac{x+2}{x^2+x-6} dx = \frac{4}{5} \ln |x-2| + \frac{1}{5} \ln |x+3| + c.$$

Poznámky

Postup

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli
2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu
3. celou rovnici rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli
4. nalezneme koeficienty rozkladu:
srovnávací metodou, dosazovací metodou
nebo kombinací těchto metod

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln |x-\alpha| + c$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + c, \\ k \geq 2$$

$$\int \frac{B(2x+p)}{x^2+px+q} dx = B \ln |x^2+px+q| + c$$

$$\int \frac{C}{x^2+px+q} dx = \frac{C}{a} \arctan \frac{x+p/2}{a} + c,$$

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

77 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{-3x+1}{x^2+4x+4} dx$.

Řešení Video **Teorie: 20 Příklady: 170, 171, 172** 

Funkce je ryze lomená, rozložíme ji na parciální zlomky. Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele,

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2.$$

Tvar rozkladu : $\frac{-3x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}.$

Vynásobíme výrazem $(x+2)^2$,

$$-3x + 1 = A(x + 2) + B.$$

Využijeme kombinaci dosazovací a srovnávací metody:

$$x = -2 : 7 = B$$

$$x^0 : 1 = 2A + B \Rightarrow -6 = 2A \Rightarrow A = -3$$

Řešíme tedy 2 integrály dle prvního a druhého vzorce v „Poznámkách“,

$$\int \frac{-3x+1}{x^2+4x+4} dx = -3 \int \frac{1}{x+2} dx + 7 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx.$$

Výsledek:

$$\int \frac{-3x+1}{x^2+4x+4} dx = -3 \ln |x+2| - \frac{7}{x+2} + c.$$

Poznámky

Postup

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli
2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu
3. celou rovnici rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli
4. nalezneme koeficienty rozkladu: srovnávací metodou, dosazovací metodou nebo kombinací těchto metod

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + c$$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx = \frac{A}{(1 - k)(x - \alpha)^{k-1}} + c, \\ k \geq 2$$

$$\int \frac{B(2x + p)}{x^2 + px + q} dx = B \ln |x^2 + px + q| + c$$

$$\int \frac{C}{x^2 + px + q} dx = \frac{C}{a} \arctan \frac{x + p/2}{a} + c,$$

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

78 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{x}{x^2 + 3x + 4} dx$.

Řešení Video Teorie: 20 Příklady: 170, 171, 172 

Funkce je ryze lomená, rozložíme ji na parciální zlomky. Jmenovatel má dva komplexně sdružené kořeny.

$$\text{Tvar rozkladu : } \frac{x}{x^2 + 3x + 4} = \frac{B(2x + 3)}{x^2 + 3x + 4} + \frac{C}{x^2 + 3x + 4}.$$

Vynásobíme výrazem $(x^2 + 3x + 4)$,

$$x = B(2x + 3) + C.$$

Využijeme srovnávací metody:

$$x^1 : 1 = 2B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$$

$$x^0 : 0 = 3B + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{3}{2}$$

Počítáme tedy dva integrály dle třetího a čtvrtého vzorce v „Poznámkách“,

$$\int \frac{x}{x^2 + 3x + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + 3x + 4} dx.$$

Jmenovatel druhého integrandu si upravíme na tvar $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$.

Výsledek:

$$\int \frac{x}{x^2 + 3x + 4} dx = \frac{\ln(x^2 + 3x + 4)}{2} - \frac{3}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{7}} + c.$$

Poznámky

Postup

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli
2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu
3. celou rovnici rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli
4. nalezneme koeficienty rozkladu: srovnávací metodou, dosazovací metodou nebo kombinací těchto metod

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + c$$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx = \frac{A}{(1 - k)(x - \alpha)^{k-1}} + c, \quad k \geq 2$$

$$\int \frac{B(2x + p)}{x^2 + px + q} dx = B \ln |x^2 + px + q| + c$$

$$\int \frac{C}{x^2 + px + q} dx = \frac{C}{a} \arctan \frac{x + p/2}{a} + c,$$

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

79 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \cos^2 x \sin^5 x dx$.

Řešení Video Teorie: 21 Příklady: 173, 174 

Integrand je typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde u funkce kosinus je sudá mocnina a u funkce sinus lichá, tudíž využijeme substituci (viz 1.):

$$\begin{aligned}\cos x &= t \\ -\sin x dx &= dt\end{aligned}$$

Musíme si integrand upravit tak, aby byl složen pouze z funkce $\cos x$ a jedné funkce $\sin x$:

$$\int \cos^2 x \sin^4 x \sin x dx = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx.$$

Po aplikaci substituce:

$$-\int t^2 (1 - t^2)^2 dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = -\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + c.$$

Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci.

Výsledek:

$$\int \cos^2 x \sin^5 x dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. m je liché $\Rightarrow$ substituce $\cos x = t$
2. n je liché $\Rightarrow$ substituce $\sin x = t$
3. m i n sudé, alespoň jedno záporné $\Rightarrow$ substituce $\tan x = t$, pak
$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
4. m i n sudé nezáporné $\Rightarrow$ využití vzorců na dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

80 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Řešení

Video **Teorie: 21** **Příklady: 173, 174** 

Integrand je typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde u funkce kosinus je lichá mocnina a u funkce sinus sudá, tudíž využijeme substituci (viz 2.):

$$\begin{aligned}\sin x &= t \\ \cos x dx &= dt\end{aligned}$$

Po aplikaci substituce:

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c.$$

Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci.

Výsledek:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. m je liché $\Rightarrow$ substituce $\cos x = t$
2. n je liché $\Rightarrow$ substituce $\sin x = t$
3. m i n sudé, alespoň jedno záporné $\Rightarrow$ substituce $\tan x = t$, pak
$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
4. m i n sudé nezáporné $\Rightarrow$ využití vzorců na dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

81 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$.

Řešení Video Teorie: 21 Příklady: 173, 174 

Integrand je typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde u obou funkcí jsou sudé mocniny a jedna je záporná, tudíž využijeme substituci (viz 3.):

$$\begin{aligned}\tan x &= t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx &= dt\end{aligned}$$

Integrand si upravíme:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \tan^4 x \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Po aplikaci substituce:

$$\int t^4 (1 + t^2) dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c.$$

Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci.

Výsledek:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. m je liché $\Rightarrow$ substituce $\cos x = t$
2. n je liché $\Rightarrow$ substituce $\sin x = t$
3. m i n sudé, alespoň jedno záporné $\Rightarrow$ substituce $\tan x = t$, pak

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
4. m i n sudé nezáporné $\Rightarrow$ využití vzorců na dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

82 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Řešení

Video **Teorie: 21** **Příklady: 173, 174** 

Integrand je typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde u obou funkcí jsou sudé nezáporné mocniny, tudíž využijeme goniometrických vzorců (viz 4.):

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx.$$

Opět využijeme stejného vzorce:

$$\frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx.$$

Využitím základních integračních vzorců spočítáme.

Výsledek:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. m je liché $\Rightarrow$ substituce $\cos x = t$
2. n je liché $\Rightarrow$ substituce $\sin x = t$
3. m i n sudé, alespoň jedno záporné $\Rightarrow$ substituce $\tan x = t$, pak

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
4. m i n sudé nezáporné $\Rightarrow$ využití vzorců na dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

83 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{-3}{2 + \cos x} dx$.

Řešení

Video **Teorie: 22 Příklady: 175** 

Integrandem je racionální funkce obsahující goniometrické funkce, využijeme tedy univerzální substituci:

$$\int \frac{-3}{2 + \cos x} dx = \int \frac{-3}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{-6}{3+t^2} dt.$$

Využitím obecného vzorce $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$ spočítáme:

$$\int \frac{-6}{3+t^2} dt = \frac{-6}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + c.$$

Vrátíme substituci a dostáváme výsledek:

$$\int \frac{-3}{2 + \cos x} dx = -2\sqrt{3} \arctan \frac{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2}}{3} + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int R(\sin x, \cos x) dx$, kde $R(u, v)$ představuje racionální funkci dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$

Univerzální substituce

$$\tan \frac{x}{2} = t, x \in (-\pi, \pi)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

84 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

Řešení Video Teorie: 22 Příklady: 175 

1. způsob řešení:

Integrandem je racionální funkce obsahující goniometrickou funkci, využijeme univerzální substituci:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt.$$

Využitím základního integračního vzorce spočítáme a vrátíme substituci:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c.$$

2. způsob řešení:

Integrand je typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde u funkce sinus je lichá mocnina, tudíž využijeme substituci $\cos x = t$.

Integrand si upravíme:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = - \int \frac{dt}{1 - t^2}.$$

Rozložíme na parciální zlomky a po nalezení primitivní funkce vrátíme substituci:

$$\int \left(\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \frac{1}{2} \ln |\cos x - 1| - \frac{1}{2} \ln |\cos x + 1| + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int R(\sin x, \cos x) dx$, kde $R(u, v)$ představuje racionální funkci dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$

Univerzální substituce

$$\tan \frac{x}{2} = t, x \in (-\pi, \pi)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

85 - Integrace iracionálních funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}+2} dx$.

Řešení Video Teorie: 18 Příklady: 165, 176 

Integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax+b}$, využijeme substituci:

$$\begin{aligned} 2x-1 &= t^3 \\ dx &= \frac{3}{2} t^2 dt \end{aligned}$$

Dostáváme:

$$\int \frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}+2} dx = \int \frac{9t^2}{2(t+2)} dt.$$

Získali jsme racionální lomenou funkci, kde v čitateli je stupeň větší než ve jmenovateli, musíme dělit:

$$\int \frac{9t^2}{2(t+2)} dt = \frac{9}{2} \int \left(t - 2 + \frac{4}{t+2} \right) dt = \frac{9}{2} \left(\frac{t^2}{2} - 2t + 4 \ln |t+2| \right) + c.$$

Vrátíme substituci a dostáváme výsledek:

$$\int \frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}+2} dx = \frac{9}{2} \left(\frac{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}{2} - 2\sqrt[3]{2x-1} + 4 \ln |\sqrt[3]{2x-1}+2| \right) + c.$$

Poznámky

Iracionální funkce integrujeme většinou substituční metodou.

a) integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax+b}$
 $\Rightarrow$ substituce $ax+b = t^n$

b) integrand obsahuje více odmocnin s různými odmocniteli $\sqrt[n_1]{ax+b}$, $\sqrt[n_2]{ax+b}$, ...
 $\Rightarrow$ substituce $ax+b = t^n$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, \dots$

c) integrand obsahuje výraz $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$
 $\Rightarrow$ goniometrická substituce $bx = a \sin t$ nebo $bx = a \cos t$

86 - Integrace iracionálních funkcí

Zadání Vypočtete integrál $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} + 2} dx$.

Řešení Video **Teorie: 18 Příklady: 165, 176** 

Integrand obsahuje více odmocnin s různými odmocniteli, využijeme substituci (viz. b)):

$$\begin{aligned} x &= t^4 \\ dx &= 4t^3 dt \end{aligned}$$

Dostáváme:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} + 2} dx = 4 \int \frac{t^2}{t + 2} t^3 dt.$$

Získali jsme racionální lomenou funkci, kde v čitateli je stupeň větší než ve jmenovateli, musíme dělit:

$$4 \int \left(t^4 - 2t^3 + 4t^2 - 8t + 16 - \frac{32}{t + 2} \right) dt = 4 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{4t^3}{3} - 4t^2 + 16t - 32 \ln |t + 2| \right) + c.$$

Vrátíme substituci a dostáváme výsledek:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} + 2} dx = 4 \left(\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{x}{2} + \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - 4\sqrt{x} + 16\sqrt[4]{x} - 32 \ln |\sqrt[4]{x} + 2| \right) + c.$$

Poznámky

Iracionální funkce integrujeme většinou substituční metodou.

a) integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax + b}$
 $\Rightarrow$ substituce $ax + b = t^n$

b) integrand obsahuje více odmocnin s různými odmocniteli $\sqrt[n_1]{ax + b}$, $\sqrt[n_2]{ax + b}$, ...
 $\Rightarrow$ substituce $ax + b = t^n$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, \dots$

c) integrand obsahuje výraz $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$
 $\Rightarrow$ goniometrická substituce $bx = a \sin t$ nebo $bx = a \cos t$

87 - Integrace iracionálních funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \sqrt{9 - 16x^2} dx$.

Řešení

Video **Teorie: 18** **Příklady: 165, 177** 

Integrand obsahuje $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$, využijeme substituci (viz. c)):

$$\begin{aligned} 4x &= 3 \sin t \\ 4dx &= 3 \cos t dt \end{aligned}$$

Dostáváme:

$$\int \sqrt{9 - 16x^2} dx = \frac{3}{4} \int \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} \cos t dt = \frac{3}{4} \int \sqrt{9(1 - \sin^2 t)} \cos t dt = \frac{3}{4} \int 3 \cos^2 t dt.$$

Získali jsme integrál goniometrické funkce se sudou mocninou, musíme využít vzorce pro dvojnásobný úhel:

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} \int \cos^2 t dt &= \frac{9}{8} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{9}{8} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + c = \frac{9}{8} \left(t + \frac{2 \sin t \cos t}{2} \right) + c \\ &= \frac{9}{8} \left(t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) + c. \end{aligned}$$

Vrátíme substituci a dostáváme výsledek:

$$\int \sqrt{9 - 16x^2} dx = \frac{9}{8} \left(\arcsin \frac{4x}{3} + \frac{4x}{3} \sqrt{1 - \frac{16x^2}{9}} \right) + c = \frac{9}{8} \arcsin \frac{4x}{3} + \frac{x}{2} \sqrt{9 - 16x^2} + c.$$

Poznámky

Iracionální funkce integrujeme většinou substituční metodou.

a) integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax + b}$
 $\Rightarrow$ substituce $ax + b = t^n$

b) integrand obsahuje více odmocnin s různými odmocniteli $\sqrt[n_1]{ax + b}$, $\sqrt[n_2]{ax + b}$, ...
 $\Rightarrow$ substituce $ax + b = t^n$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, \dots$

c) integrand obsahuje výraz $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$
 $\Rightarrow$ goniometrická substituce $bx = a \sin t$ nebo $bx = a \cos t$

88 - Určitý integrál, výpočet a vlastnosti

Zadání Vypočtěte integrál $\int_0^{\pi} ((4-x)^2 + \cos 2x) dx$.

Řešení Video Teorie: 24 Příklady: 182 

Integrand upravíme a s využitím vlastností dostaneme součet 4 integrálů:

$$\int_0^{\pi} (16 - 8x + x^2 + \cos 2x) dx = 16 \int_0^{\pi} dx - 8 \int_0^{\pi} x dx + \int_0^{\pi} x^2 dx + \int_0^{\pi} \cos 2x dx.$$

Všechny integrály jsou tabulkové, tzn. umíme nalézt primitivní funkci. Využijeme tedy N-L formuli.

$$\begin{aligned} 16 \int_0^{\pi} dx - 8 \int_0^{\pi} x dx + \int_0^{\pi} x^2 dx + \int_0^{\pi} \cos 2x dx &= 16[x]_0^{\pi} - 4[x^2]_0^{\pi} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} \\ &= 16(\pi - 0) - 4(\pi^2 - 0) + \left(\frac{\pi^3}{3} - 0\right) + (0 - 0) = 16\pi - 4\pi^2 + \frac{\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

Výsledek:

$$\int_0^{\pi} ((4-x)^2 + \cos 2x) dx = 16\pi - 4\pi^2 + \frac{\pi^3}{3}.$$

Poznámky

Newtonova-Leibnizova formule

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Vlastnosti

$$f = f(x) \quad g = g(x)$$

$$\text{a) } \int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

$$\text{b) } \int_a^b c f dx = c \int_a^b f dx$$

89 - Určitý integrál sudé a liché funkce

Zadání Vypočtěte integrály: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$, $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{2} dx$.

Řešení Video Teorie: 25 Příklady: 183 

Výpočet integrálu $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$:

Funkce tangens je na intervalu $\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle$ lichá, tudíž využijeme vlastnosti určitého integrálu pro lichou funkci (viz. b)) a víme tedy, že integrál je roven 0.

Ověříme:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -[\ln |\cos x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Výpočet integrálu $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{2} dx$:

Funkce $\frac{x^4}{2}$ je na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ sudá, tudíž využijeme vlastnosti určitého integrálu pro sudou funkci (viz. a)):

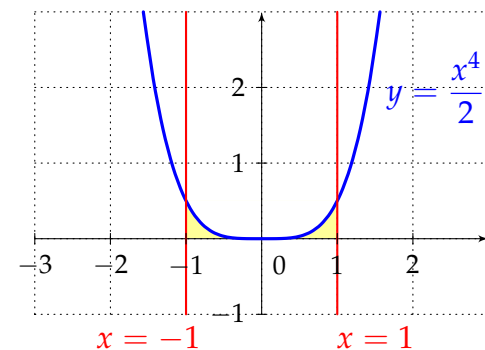
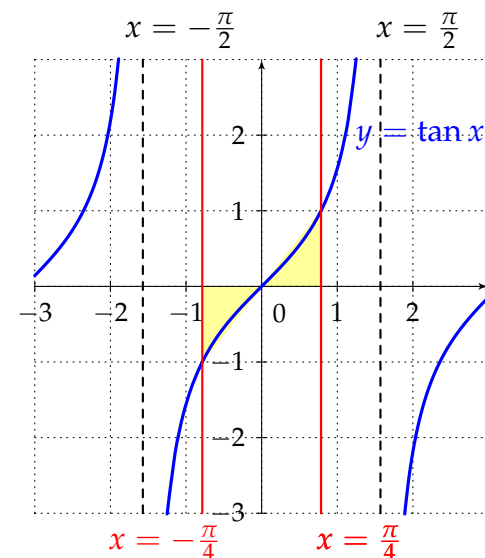
$$\int_{-1}^1 \frac{x^4}{2} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \frac{1}{5} [x^5]_0^1 = \frac{1}{5} (1 - 0) = \frac{1}{5}.$$

Poznámky

Výpočet integrálu sudé a liché funkce

a) sudá funkce: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

b) lichá funkce: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



90 - Metoda per partes pro určité integrály

Zadání Vypočtěte integrál $\int_1^2 \ln x^2 dx$.

Řešení

Video **Teorie: 26** **Příklady: 184** 

Integrand je složená funkce, zkusíme využít metody per partes:

$$\begin{aligned} u &= \ln x^2 & v' &= 1 \\ u' &= \frac{2}{x} & v &= x \end{aligned}$$

Po aplikaci PP :

$$\int_1^2 \ln x^2 dx = [x \ln x^2]_1^2 - \int_1^2 2 dx = 2 \ln 4 - \ln 1 - 2[x]_1^2 = 2 \ln 4 - 2(2 - 1).$$

Výsledek:

$$\int_1^2 \ln x^2 dx = 2(\ln 4 - 1).$$

Poznámky

Metoda per partes pro určitý integrál

$$\begin{aligned} u &= u(x) & v' &= v'(x) \\ u' &= u'(x) & v &= v(x) \end{aligned}$$

$$\int_a^b (u \cdot v') dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b (u' \cdot v) dx$$

91 - Substituční metoda pro určité integrály

Zadání Vypočtěte integrál $\int_0^{\pi} x \cos x^2 dx$.

Řešení

Video **Teorie: 26** **Příklady: 185, 186** 

Integrand je ve tvaru součinu dvou funkcí, kde derivace vnitřní funkce je přímo druhá funkce součinu (lišící se pouze konstantou), využijeme tedy substituci:

$$\begin{aligned}x^2 &= t \\ 2x dx &= dt\end{aligned}$$

Musíme přepočítat meze pro novou proměnnou t :

dolní mez: $0 \mapsto 0^2 = 0$

horní mez: $\pi \mapsto \pi^2$

Po aplikaci:

$$\int_0^{\pi} x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi^2} \cos t dt = \frac{1}{2} [\sin t]_0^{\pi^2} = \frac{1}{2} (\sin \pi^2 - 0).$$

Výsledek:

$$\int_0^{\pi} x \cos x^2 dx = \frac{\sin \pi^2}{2}.$$

Poznámky

Substituční metoda

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt$$

Po zavedení vhodné substituce musíme určit nové meze.

92 - Substituční metoda pro určité integrály

Zadání Vypočtěte integrál $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} dx$.

Řešení

Video **Teorie: 26** **Příklady: 185, 186** 

Jedná se o integrál obsahující odmocninu. Využijeme substituci:

$$\begin{aligned}x+1 &= t^2 \\ dx &= 2t dt\end{aligned}$$

Musíme přepočítat meze pro novou proměnnou t :

dolní mez: $3 \mapsto \sqrt{3+1} = 2$

horní mez: $8 \mapsto \sqrt{8+1} = 3$

Po aplikaci:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} dx = \int_2^3 2t \frac{t^2-1}{t+1} dt = 2 \int_2^3 t(t-1) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_2^3 = 2 \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) \right).$$

Výsledek:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} dx = \frac{23}{3}.$$

Poznámky

Substituce typu $x = \varphi(t)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Po zavedení vhodné substituce musíme určit nové meze.

93 - Určitý integrál, racionální lomená funkce

Zadání Vypočtěte integrál $\int_1^3 \frac{12x+6}{x^2(x^2+x+6)} dx$.

Řešení Video Příklady: 187 

Funkce je ryze lomená, rozložíme ji na parciální zlomky. Jmenovatel má dva komplexně sdružené kořeny a jeden dvojnásobný reálný kořen roven 0.

$$\text{Tvar rozkladu : } \frac{12x+6}{x^2(x^2+x+6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C(2x+1)}{x^2+x+6} + \frac{D}{x^2+x+6}$$

Vynásobíme $x^2(x^2+x+6)$

$$12x+6 = Ax(x^2+x+6) + B(x^2+x+6) + C(2x+1)x^2 + Dx^2$$

Využijeme srovnávací metody:

$$x^3: \quad 0 = A + 2C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2}A \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2}$$

$$x^2: \quad 0 = A + B + C + D \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{3}{2}$$

$$x^1: \quad 12 = 6A + 6B \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$x^0: \quad 6 = 6B \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{12x+6}{x^2(x^2+x+6)} dx &= \int_1^3 \frac{1}{x} dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x+6} dx - \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{1}{x^2+x+6} dx = [\ln|x|]_1^3 \\ &\quad - \left[\frac{1}{x} \right]_1^3 - \frac{1}{2} [\ln(x^2+x+6)]_1^3 - \frac{6}{\sqrt{23}} \left[\arctan \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{23}} \right]_1^3 = \ln 3 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} (\ln 16 - \ln 8) \\ &\quad - \frac{6\sqrt{23}}{23} \left(\arctan \frac{7\sqrt{23}}{23} - \arctan \frac{3\sqrt{23}}{23} \right). \end{aligned}$$

Poznámky

Integrace parciálních zlomků

$$\int_a^b \frac{A}{x-\alpha} dx = A \cdot [\ln|x-\alpha|]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx = \left[\frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} \right]_a^b, \quad k \geq 2$$

$$\int_a^b \frac{B(2x+p)}{x^2+px+q} dx = B \cdot [\ln|x^2+px+q|]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{C}{x^2+px+q} dx = \frac{C}{m} \cdot \left[\arctan \frac{x+p/2}{m} \right]_a^b,$$

$$m = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

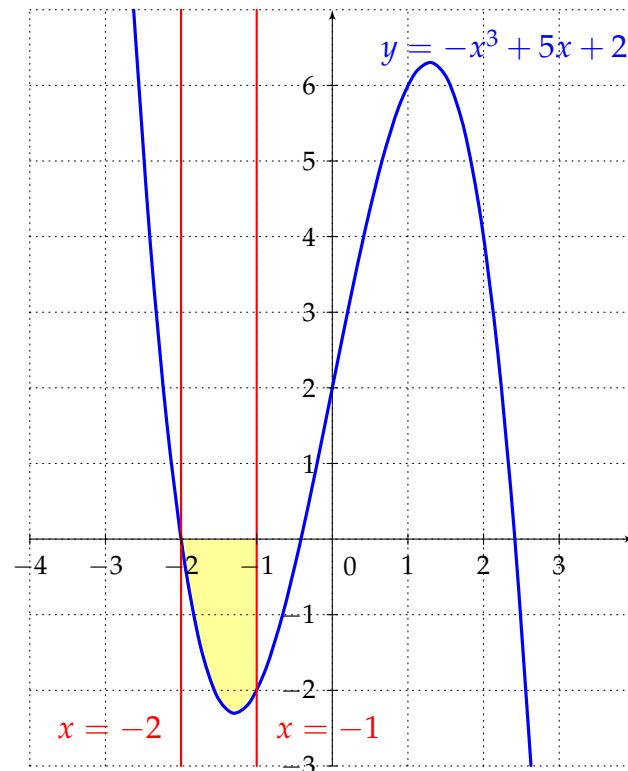
94 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Znázorněte graf funkce $y = -x^3 + 5x + 2$ a vypočítejte obsah plochy ohraničené touto funkcí, osou x a přímkami $x = -2$ a $x = -1$.

Řešení

Video **Teorie: 27 Příklady: 188** 

Znázorníme si plochu, jejíž obsah máme určit:



Z grafu vidíme, že funkce je na intervalu $\langle -2, -1 \rangle$ záporná:

$$P = - \int_{-2}^{-1} (-x^3 + 5x + 2) dx = \int_{-2}^{-1} (x^3 - 5x - 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2 - (4 - 10 + 4) \right) = \frac{7}{4}.$$

Poznámky

Obsah křivočarého lichoběžníka pro nezápornou funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

Obsah křivočarého lichoběžníka pro zápornou funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

$$P = - \int_a^b f(x) dx$$

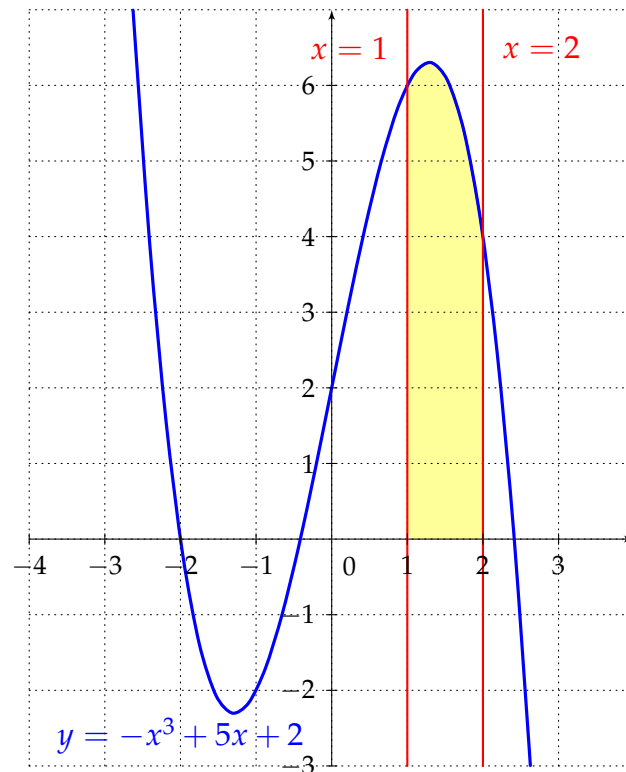
95 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Znázorněte graf funkce $y = -x^3 + 5x + 2$ a vypočítejte obsah plochy ohraničené touto funkcí, osou x a přímkami $x = 1$ a $x = 2$.

Řešení

Video **Teorie: 27** **Příklady: 188** 

Znázorníme si plochu, jejíž obsah máme určit:



Z grafu vidíme, že funkce je na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ nezáporná:

$$P = \int_1^2 (-x^3 + 5x + 2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} + 2x \right]_1^2 = \left(-4 + 10 + 4 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2} + 2 \right) \right) = \frac{23}{4}.$$

Poznámky

Obsah křivočarého lichoběžníka pro nezápornou funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

Obsah křivočarého lichoběžníka pro zápornou funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

$$P = - \int_a^b f(x) dx$$

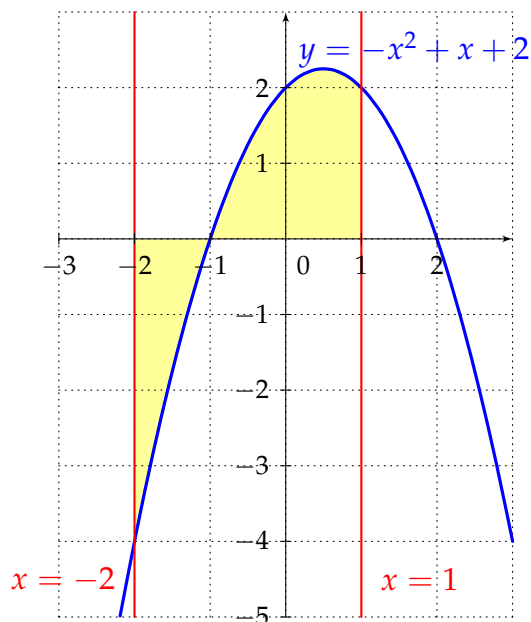
96 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Znázorněte graf funkce $y = -x^2 + x + 2$ a vypočítejte obsah plochy ohraničené touto funkcí, osou x a přímkami $x = -2$ a $x = 1$.

Řešení

Video **Teorie: 27** **Příklady: 189** 

Znázorníme si plochu, jejíž obsah máme určit:



Z grafu vidíme, že funkce na intervalu $\langle -2, 1 \rangle$ mění znaménko, musíme proto určit zvlášť obsah části pod osou x a nad osou x , určíme si průsečík s osou x na intervalu $\langle -2, 1 \rangle$:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Rightarrow \text{hledaný průsečík je } x = -1.$$

$$\begin{aligned} P &= - \int_{-2}^{-1} (-x^2 + x + 2) dx + \int_{-1}^1 (-x^2 + x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4 \right) \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right) = \frac{11}{6} + \frac{10}{3} = \frac{31}{6} \end{aligned}$$

Poznámky

Pokud funkce mění znaménko, je nutno brát části nad osou x kladně a části pod osou x záporně.

Obsah křivočarého lichoběžníka

$$P = \int_a^b |f(x)| dx$$

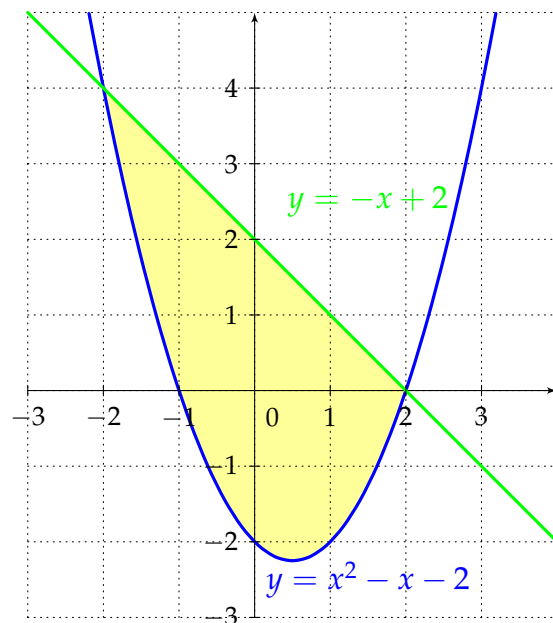
97 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Vypočtěte obsah rovinného obrazce (danou plochu znázorněte) ohraničeného křivkami $y = x^2 - x - 2$, $y = -x + 2$.

Řešení

Video **Teorie: 28** **Příklady: 190, 191** 

Znázorníme si plochu, jejíž obsah máme určit:



Z grafu vidíme, že plocha je ohraničená shora funkcí $y = -x + 2$ a zdola kvadratickou funkcí $y = x^2 - x - 2$, potřebujeme určit interval omezující daný útvar, tzn. určíme si průsečíky funkcí:

$$-x + 2 = x^2 - x - 2 \Rightarrow \text{řešíme tedy kvadratickou rovnici } x^2 - 4 = 0,$$

hledané průsečíky jsou $x_1 = -2, x_2 = 2$.

$$P = \int_{-2}^2 (-x + 2 - (x^2 - x - 2)) dx = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = -\frac{8}{3} + 8 - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = \frac{32}{3}.$$

Poznámky

Obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného dvěma funkcemi

pokud platí: $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$\Rightarrow P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

kde a, b jsou průsečíky funkcí,

tzn. řešíme rovnici $f(x) = g(x)$

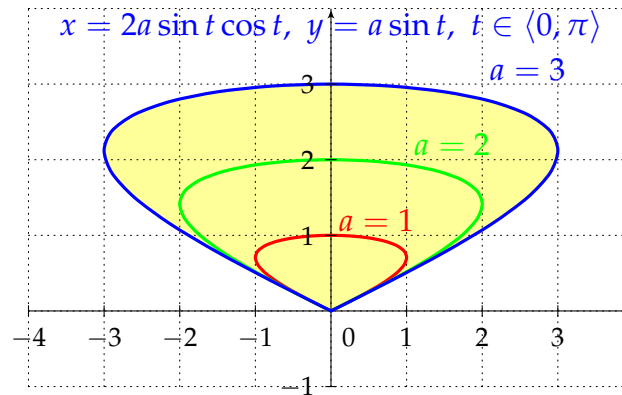
98 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Vypočtěte obsah rovinného obrazce (danou plochu znázorněte) ohraničeného křivkami $x = 2a \sin t \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Řešení

Video **Teorie: 28** **Příklady: 192** 

Znázorníme si plochu, jejíž obsah máme určit:



Pro výpočet obsahu rovinné plochy ohraničené parametrickými rovnicemi potřebujeme znát derivaci funkce $x = 2a \sin t \cos t$:

$$\dot{\varphi}(t) = 2a(\cos^2 t - \sin^2 t) = 2a(1 - 2\sin^2 t).$$

Dosadíme do vzorečku:

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_0^\pi 2a^2(\sin t - 2\sin^3 t) dt \right| = \left| -2a^2[\cos t]_0^\pi - 4a^2 \int_0^\pi (1 - \cos^2 t) \sin t dt \right| \\ &= \left| 4a^2 + 4a^2 \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \right| = \left| 4a^2 + 4a^2 \left(-1 + \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right) \right| = \frac{4}{3}a^2. \end{aligned}$$

Poznámky

Obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného funkcí danou parametrickými rovnicemi

$x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$

$$\Rightarrow P = \left| \int_\alpha^\beta \psi(t) \dot{\varphi}(t) dt \right|$$

99 - Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky

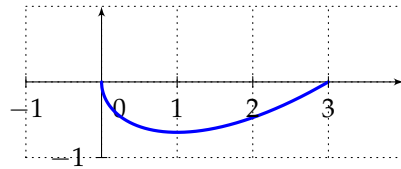
Zadání Vypočtěte velikost dráhy, kterou urazí bod od $t = 0$ do $t = \sqrt{3}$ při pohybu po křivce dané parametrickými rovnicemi $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$.

Řešení

Video **Teorie: 29** **Příklady: 195** 

Znázorníme si křivku, jejíž délku máme spočítat:

$$x = t^2, \quad y = \frac{t}{3}(t^2 - 3), \quad t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$$



Pro výpočet délky křivky dané parametrickými rovnicemi potřebujeme znát derivace funkcí:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= 2t \\ \dot{\psi}(t) &= \frac{t^2 - 3}{3} + \frac{2t^2}{3} = t^2 - 1\end{aligned}$$

Dosadíme do vzorečku:

$$l = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt = \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Poznámky

Délka oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2} dt$$

100 - Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky

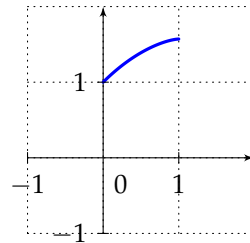
Zadání Vypočtěte délku křivky $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ pro $0 \leq x \leq 1$.

Řešení

Video Teorie: **29** Příklady: **194** 

Znázorníme si křivku, jejíž délku máme spočítat:

$$y = \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$



Pro výpočet délky křivky potřebujeme znát druhou mocninu derivace funkce:

$$(f'(x))^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right)^2 = \frac{1-x}{1+x}.$$

Dosadíme do vzorečku:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1-x}{1+x}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x+1-x}{1+x}} dx = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t}{t} dt = 2\sqrt{2} [t]_1^{\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Poznámky

Délka oblouku křivky na $\langle a; b \rangle$

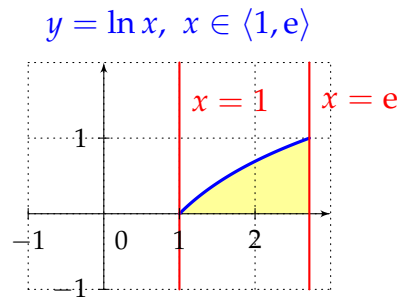
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

101 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

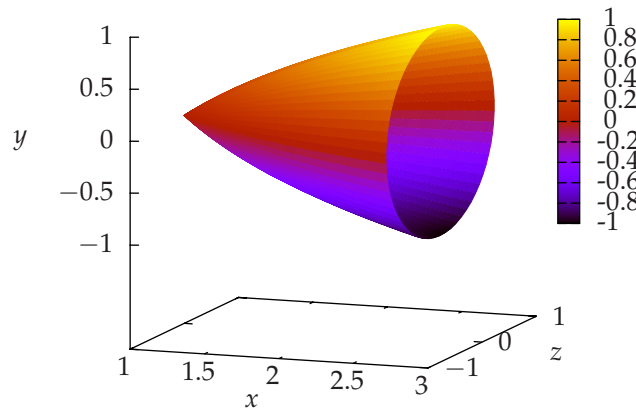
Zadání Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací (kolem osy x) oblasti ohraničené funkcí $y = \ln x$, osou x v $\langle 1, e \rangle$.

Řešení

Znázorníme si oblast, která bude rotovat:



Video Teorie: 30 Příklady: 196, 197, 198 



Oblast je ohraničena pouze jednou funkcí, tzn. budeme počítat integrál z druhé mocniny dané funkce.

Dosadíme do vzorečku:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^e \ln^2 x dx = (PP) = \pi [x \ln^2 x]_1^e - 2\pi \int_1^e \ln x dx = (PP) = \pi e - 2\pi \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \right) \\
 &= \pi e - 2\pi e + 2\pi [x]_1^e = \pi(e - 2).
 \end{aligned}$$

Poznámky

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

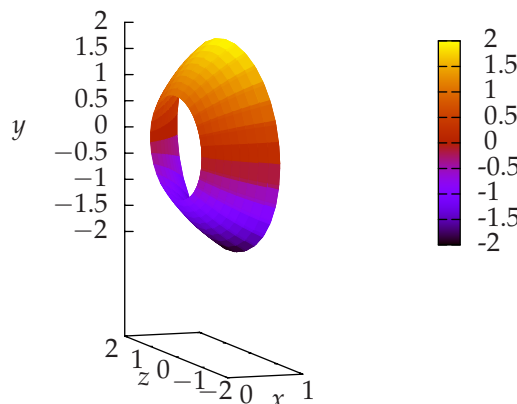
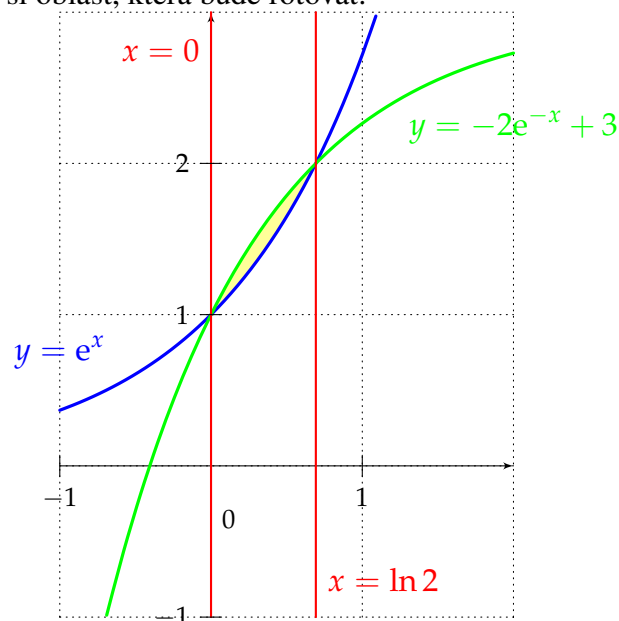
102 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

Zadání Vypočítejte objem tělesa, vzniklého rotací oblasti (oblast načrtněte) ohraničené funkcemi $y = e^x$, $y = -2e^{-x} + 3$ kolem osy x .

Řešení

Video **Teorie: 30** **Příklady: 199** 

Znázorníme si oblast, která bude rotovat:



Z grafu vidíme, že oblast je ohraničená shora funkcí $y = -2e^{-x} + 3$ a zdola funkcí $y = e^x$, potřebujeme určit interval omezující daný útvar, tzn. určíme si průsečíky funkcí:

$$-2e^{-x} + 3 = e^x \Rightarrow \frac{2}{e^x} - 3 + e^x = 0 \Rightarrow \frac{2 - 3e^x + e^{2x}}{e^x} = 0 \Rightarrow 2 - 3e^x + e^{2x} = 0,$$

zavedeme substituci $e^x = t$ a řešíme kvadratickou rovnici $t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \ln 2$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\ln 2} \left| (-2e^{-x} + 3)^2 - e^{2x} \right| dx = \pi \int_0^{\ln 2} (4e^{-2x} - 12e^{-x} + 9 - e^{2x}) dx \\ &= \pi \left[-2e^{-2x} + 12e^{-x} + 9x - \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\ln 2} = \pi(9 \ln 2 - 6). \end{aligned}$$

Poznámky

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx,$$

kde a, b jsou průsečíky funkcí,

tzn. řešíme rovnici $f(x) = g(x)$

103 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

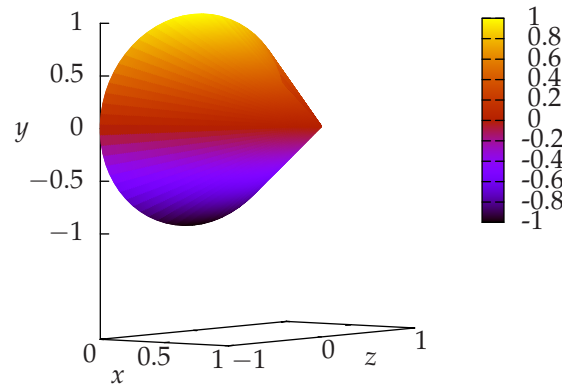
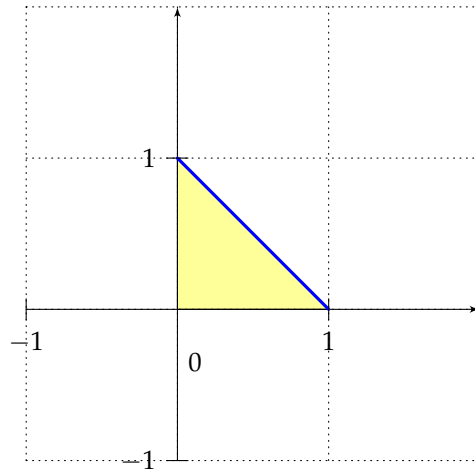
Zadání Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací parametricky zadané funkce $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, kde $t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ kolem osy x .

Řešení

Video **Teorie: 30** **Příklady: 200** 

Znázorníme si oblast, která bude rotovat:

$$x = \cos^2 t, y = \sin^2 t, t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$$



Potřebujeme znát derivaci funkce $x = \cos^2 t$:

$$\dot{\varphi}(t) = -2 \cos t \sin t.$$

Dosadíme do vzorečku:

$$V = -2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \sin^5 t dt = (\text{substituce: } \sin t = u) = 2\pi \int_0^1 u^5 du = \frac{1}{3}\pi [u^6]_0^1 = \frac{1}{3}\pi.$$

Poznámky

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) |\dot{\varphi}(t)| dt$$

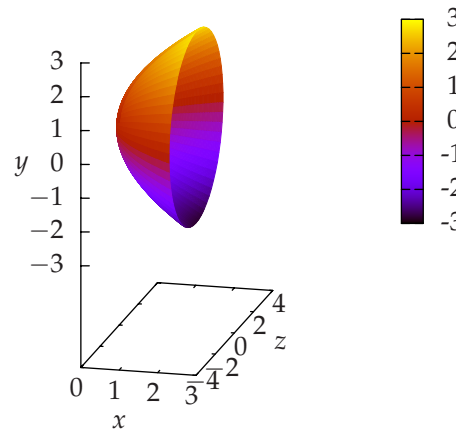
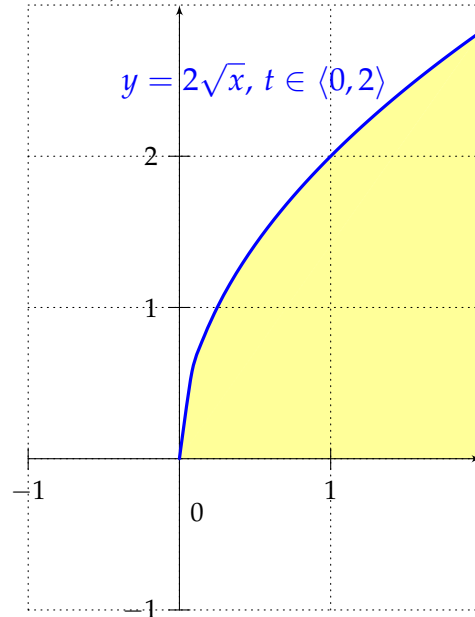
104 - Užití určitého integrálu, obsah rotační plochy

Zadání Vypočtěte povrch rotačního tělesa vzniklé rotací křivky $y = 2\sqrt{x}$ pro $x \in \langle 0; 2 \rangle$ kolem osy x .

Řešení

Video **Teorie: 31** **Příklady: 201, 202** 

Znázorníme si oblast, která bude rotovat:



Potřebujeme znát druhou mocninu derivace funkce:

$$(y')^2 = \frac{1}{x}.$$

Dosadíme do vzorečku:

$$S = 4\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = 4\pi \int_0^2 \sqrt{x+1} dx = \frac{8}{3}\pi \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi(\sqrt{27} - 1).$$

Poznámky

Obsah rotační plochy

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$f(x) \geq 0$$

105 - Užití určitého integrálu, obsah rotační plochy

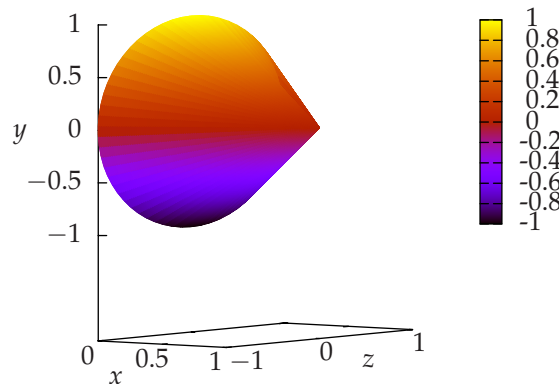
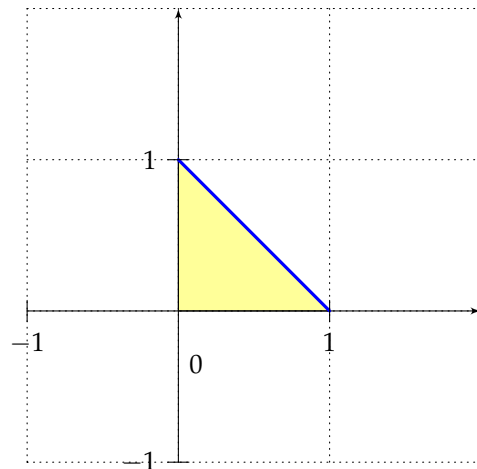
Zadání Vypočtete obsah rotačního tělesa vzniklého rotací parametricky zadané funkce $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$ kolem osy x , kde $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Řešení

Video Teorie: 31 Příklady: 201, 202 

Znázorníme si oblast, která bude rotovat:

$$x = \cos^2 t, y = \sin^2 t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



Potřebujeme určit druhé mocniny derivací obou funkcí:

$$(\dot{\varphi}(t))^2 = 4 \cos^2 t \sin^2 t$$

$$(\dot{\psi}(t))^2 = 4 \cos^2 t \sin^2 t$$

Dosadíme do vzorečku:

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{8 \cos^2 t \sin^2 t} dt = 2\pi\sqrt{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^3 t dt = \left| \begin{array}{l} \text{subst. :} \\ \sin t = u \end{array} \right| = 2\pi\sqrt{8} \int_0^1 u^3 du = \pi\sqrt{2} \left[u^4 \right]_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$

Poznámky

Obsah rotační plochy

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2} dt$$

$$\psi(t) \geq 0$$

Řešené příklady – Funkce dvou proměnných

107 - Definiční obor

Zadání Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce $z = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.

Řešení

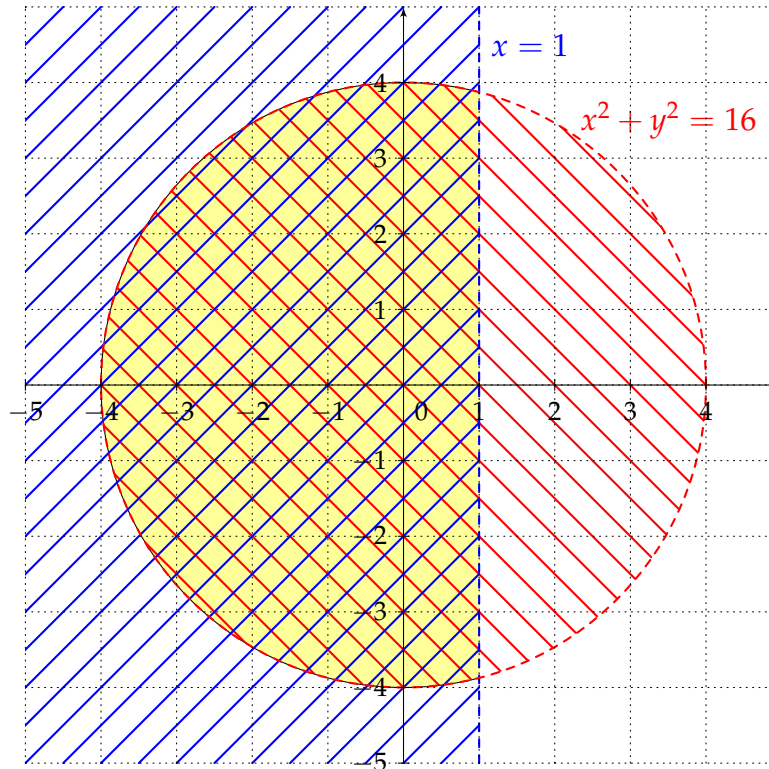
Video **Teorie: 33** **Příklady: 204-213** 

Sestavíme omezující podmínky na definiční obor.

Podmínka $1 - x > 0$ zaručí existenci logaritmu $\Rightarrow x < 1$. Jedná se o polorovinu s hraniční přímkou o rovnici $x = 1$, která ovšem do definičního oboru nepatří, bude vyznačena čárkovaně.

Podmínka $16 - x^2 - y^2 \geq 0$ zajistí existenci druhé odmocniny, podmínka $\sqrt{16 - x^2 - y^2} \neq 0$ vyloučí možnost dělení nulou. Tyto dvě podmínky se dají sloučit do jediné podmínky, $16 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 4^2$. Jedná se o kruh se středem v počátku a poloměrem 4. Hraniční kružnice do definičního oboru patřit nebude, bude vyznačena čárkovaně.

Definičním oborem je pak průnik obou ploch, na obrázku žlutě vyznačená plocha.

**Poznámky**

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je
nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

108 - Definiční obor

Zadání Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce $z = \sqrt{y \sin x}$.

Řešení

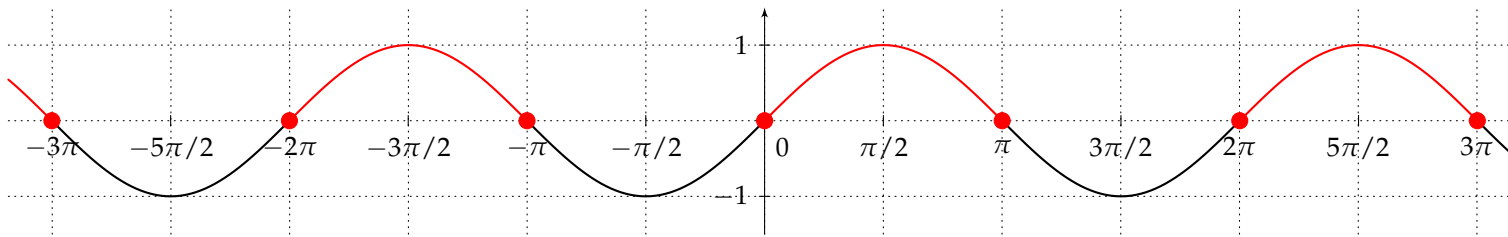
Video **Teorie: 33 Příklady: 204-213** 

Sestavíme omezující podmínky na definiční obor. Podmínka $y \sin x \geq 0$ zaručí existenci odmocniny. Součin $y \sin x$ je nezáporný, když jsou oba činitele nezáporní, nebo jsou oba nekladní, tedy

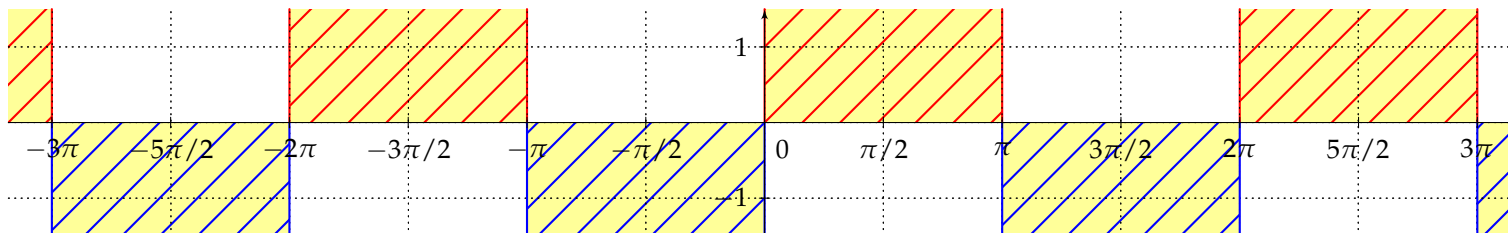
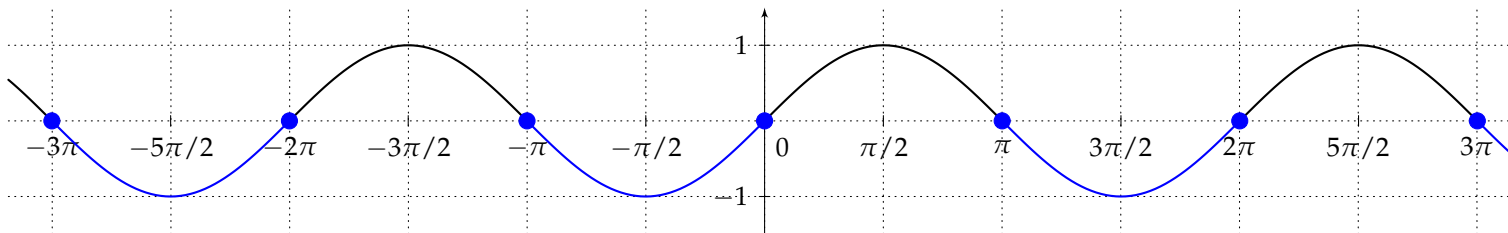
$$(y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0).$$

Ještě je nutné vyřešit nerovnici $\sin x \geq 0$ resp. $\sin x \leq 0$, ptáme se, kdy je funkce sinus nezáporná a kdy je nekladná.

$$\sin x \geq 0 \Rightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle 0 + k2\pi, \pi + k2\pi \rangle$$



$$\sin x \leq 0 \Rightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\pi + k2\pi, 0 + k2\pi \rangle$$



Poznámky

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

109 - Vrstevnicový graf

Zadání Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \frac{5x}{x^2 + y^2 + 1}$.

Řešení

Dosadíme do zadané funkce $z = k$, kde $k \in \mathbb{R}$, tedy

Video **Teorie:** 34, 35 **Příklady:** 214, 215 

$$k = \frac{5x}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 = \frac{5x}{k} \Rightarrow x^2 - \frac{5x}{k} + y^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2k}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4k^2} + 1 = 0.$$

Výraz $x^2 - \frac{5x}{k}$ jsme doplnili na úplný čtverec, $x^2 - \frac{5x}{k} = \left(x - \frac{5}{2k}\right)^2 - \frac{25}{4k^2}$.

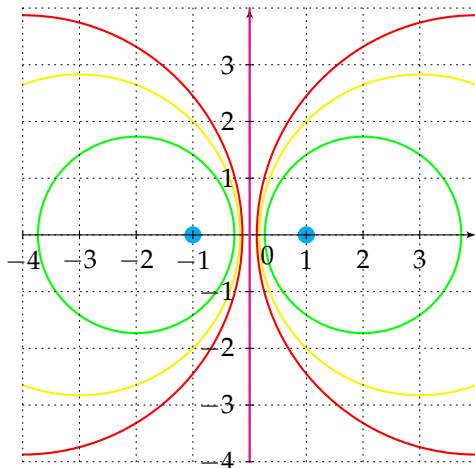
Nyní je třeba diskutovat konkrétní hodnoty k .

1. Pro $k = 0$ (řez grafu funkce z s půdorysnou rovinou) dostáváme $0 = \frac{5x}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow x = 0$, vrstevnicí je osa y .

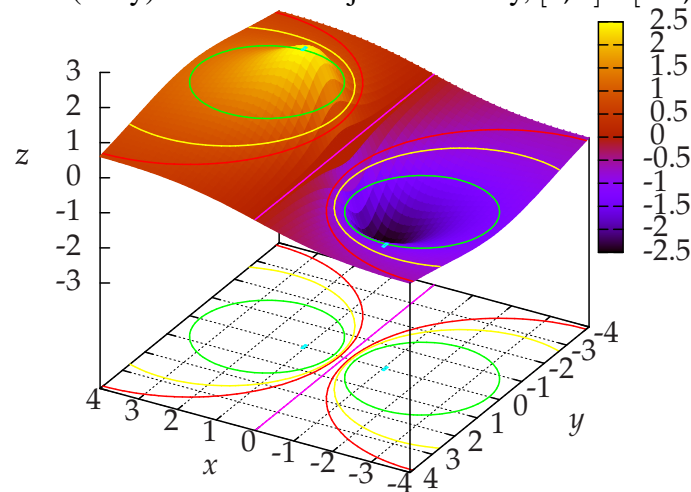
2. Pro $k \neq 0$ dostáváme $\left(x - \frac{5}{2k}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4k^2} - 1$. Vrstevnicemi budou kružnice pouze v případě, kdy pravá strana rovnice bude větší než 0,

$$\frac{25}{4k^2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{25}{4k^2} > 1 \Rightarrow 25 > 4k^2 \Rightarrow k^2 < \frac{25}{4} \Rightarrow |k| < \frac{5}{2} \Rightarrow k \in \left(-\frac{5}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

3. Pro $k = \pm \frac{5}{2}$ platí $(x \mp 1)^2 + y^2 = 0$. Jedná se o dvě singulární kružnice (body). Vrstevnicemi jsou dva body, $[1, 0]$ a $[-1, 0]$.



$$\begin{aligned} k &= 0 \\ k &= \pm \frac{5}{4} \\ k &= \pm \frac{5}{6} \\ k &= \pm \frac{5}{8} \end{aligned}$$

**Poznámky**

Hledáme průniky grafu funkce s rovinami rovnoběžnými s půdorysnou rovinou, tj. dosazujeme $z = k, k \in \mathbb{R}$.

Číslo k je možné volit libovolně. Ovšem může se stát, že při nevhodné volbě se plochy neprotínají.

Seznam příkazů pro Gnuplot:

```
set view 62,210; set view equal xy
set iso 50; set samp 50
set xrange [-4:4]; set yrange [-4:4]
set ztics 1; set pm3d
set contour both
set cntrparam levels discrete 0, 2.485, -2.485, 1.25, -1.25, .83, -.83, .625, -.625
set style increment user
set style line 1 lc rgb 'black' lw 2
set style line 2 lc rgb 'red'
set style line 3 lc rgb 'red'
set style line 4 lc rgb 'yellow'
set style line 5 lc rgb 'yellow'
set style line 6 lc rgb 'green'
set style line 7 lc rgb 'green'
set style line 8 lc rgb 'cyan'
set style line 9 lc rgb 'cyan'
set style line 10 lc rgb 'magenta'
set grid; unset surf; unset key
set xlabel "x"
set ylabel "y"
set zlabel "z"
splot 5*x/(x**2+y**2+1)
```

110 - Limita funkce

Zadání Vypočítejte limitu funkce $z = \frac{y(x+1)}{x^3+1}$ v bodě $[-1, 0]$ a dokažte, že limita funkce $z = \frac{x^2+x}{xy+y}$ v bodě $[0, 0]$ neexistuje.

Řešení

Video **Teorie: 36** **Příklady: 216** 

Řešíme první část úlohy,

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{yx+y}{x^3+1} = \frac{0}{0} = \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{y(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{y}{x^2-x+1} = 0.$$

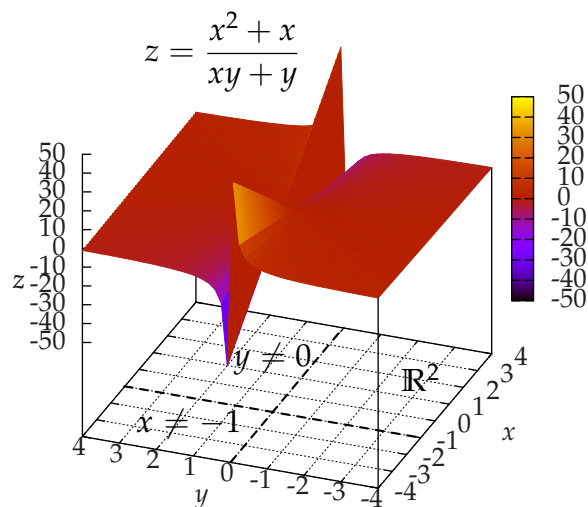
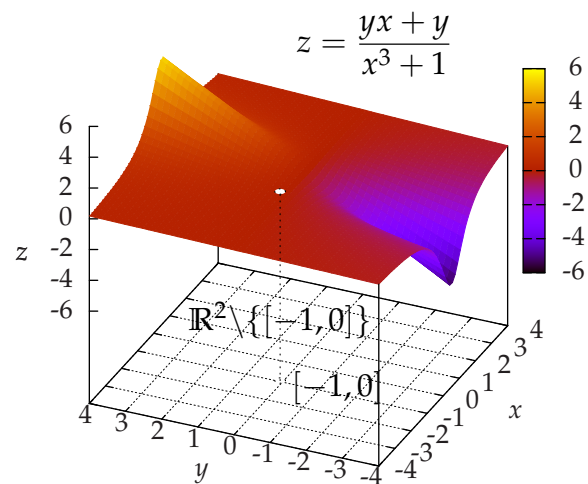
Ve druhé části úlohy musíme dokázat, že limita neexistuje. Na rozdíl od funkcí jedné proměnné, kdy se k limitnímu bodu můžeme blížit pouze ze dvou stran (zleva a zprava), v případě funkcí dvou i více proměnných se k limitnímu bodu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby. Limita neexistuje v případě, že její hodnota závisí na volbě přibližování, či se pro různé volby přibližování mění. Pokud ovšem limita na konkrétní volbě přibližování nezávisí, pak to ještě neznamená, že existuje.

Zkusme se k limitnímu bodu blížit po přímkách prochazejících počátkem, tj. volíme $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Dosadíme $y = kx$ do

$$\text{funkce } z = \frac{x^2+x}{xy+y},$$

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2+x}{xy+y} = \frac{0}{0} \stackrel{y=kx}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{kx^2+kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{k(x^2+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{k},$$

limita závisí na parametru k , pro různé volby parametru k vyjde různě. Tzn. limita funkce $z = \frac{x^2+x}{xy+y}$ v bodě $[0, 0]$ neexistuje.



Poznámky

Limity funkcí dvou proměnných řešíme většinou přímým dosazením, nebo se pokusíme limitu upravit.

V případě limit funkcí dvou proměnných se spíše řeší jiný typ úlohy. Dokazuje se, že daná limita neexistuje.

111 - Parciální derivace

Zadání Určete parciální derivace prvního řádu funkce $z = x^2 \sin^2(xy^2)$ v bodě $[\pi, 0]$.

Řešení

Video **Teorie: 37, 38** **Příklady: 217-221** 

Parciální derivace prvního řádu počítáme vzhledem k jednotlivým proměnným funkce z . Funkce z je funkcí dvou nezávislých proměnných, proměnné x a y . Parciální derivace tedy budeme počítat jak podle proměnné x , tak i podle proměnné y .

Vzhledem k definici parciální derivace budeme postupovat tak, že s proměnnou, podle které se nederivuje, budeme pracovat jako s konstantou. To ale v konečném důsledku znamená, že ve funkci z zůstane pouze jedna nezávislá proměnná. Funkce z se stává funkcí jedné proměnné. Ale takovou funkci již umíme snadno zderivovat s využitím formulí 1. až 19.

Parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial x}$ funkce z podle proměnné x :

jelikož funkci z derivujeme podle x , pak s proměnnou y budeme pracovat jako s konstantou, naším úkolem je tedy derivovat součin dvou funkcí proměnné x , funkce x^2 a složené funkce $\sin^2(xy^2)$, kterou derivujeme po jednotlivých složkách v pořadí: druhá mocnina, sinus, xy^2 ; ve výrazu xy^2 je y^2 konstanta v součinu a proto se derivuje pouze x ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) \cdot \sin^2(xy^2) + x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\sin^2(xy^2)) \\ &= 2x \sin^2(xy^2) + x^2 \cdot 2 \sin(xy^2) \cdot \cos(xy^2) \cdot y^2 = 2x \sin^2(xy^2) + 2x^2 y^2 \sin(xy^2) \cos(xy^2).\end{aligned}$$

Parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial y}$ funkce z podle proměnné y :

derivujeme zcela analogicky, v tomto případě budeme jako s konstantou pracovat s proměnnou x , derivujeme tedy složenou funkci; x^2 je konstanta v součinu, proto se derivuje podle y pouze druhý činitel jako složená funkce v pořadí: druhá mocnina, sinus, xy^2 ; ve výrazu xy^2 je x konstanta v součinu a proto se derivuje pouze y^2 ,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\sin^2(xy^2)) = x^2 \cdot 2 \sin(xy^2) \cdot \cos(xy^2) \cdot x2y = 4x^3 y \sin(xy^2) \cos(xy^2).$$

Poznamenejme, že jestliže derivujeme podle y , tak samozřejmě lze použít formule uvedené v sekci „Poznámky“, stačí formálně místo x psát y .

Parciální derivace jsou opět funkce dvou proměnných a snadno je vyčíslíme na zadaném bodě přímým dosazením:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\pi, 0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(\pi, 0) = 0.$$

Poznámky

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $u = u(x) \quad v = v(x)$
15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

112 - Parciální derivace

Zadání Určete parciální derivace druhého řádu funkce $z = x^y$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení

Video Teorie: **37, 38** Příklady: **217-221** 

Nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu,

derivace podle x , derivujeme mocninou funkci podle vzorce č. 2. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$

derivace podle y , derivujeme exponenciální funkci podle vzorce č. 4. $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

K určení parciálních derivací druhého řádu je třeba parciální derivace prvního řádu jako funkce dvou proměnných opět derivovat jak podle x , tak i podle y ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^y \ln x) = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x^y \ln x) = x^y \ln x \ln x = x^y \ln^2 x.\end{aligned}$$

Zdůrazněme, že v případě spojitých funkcí se spojitými parciálními derivacemi se smíšené parciální derivace podle Schwarzovy věty rovnají.

Vskutku:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = yx^{y-1} \ln x + x^y x^{-1} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Opět zbývá jednoduché vyčíslení parciálních derivací druhého řádu přímým dosazením zadaného bodu $[1, 1]$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 1) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1) = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1, 1) = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 1) = 0.$$

Poznámky

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

113 - Parciální derivace

Zadání Určete parciální derivaci $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$ funkce $z = 2x^2 e^y + \sin(xy^2)$.

Řešení

Video Teorie: **37, 38** Příklady: **217-221** 

Derivujeme funkci z postupně podle jednotlivých proměnných. Nejdříve derivujeme podle x , poté ještě jednou podle x a pak postupně dvakrát podle y .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xe^y + \cos(xy^2) \cdot y^2 = 4xe^y + y^2 \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4e^y + y^2(-\sin(xy^2) \cdot y^2) = 4e^y - y^4 \sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 4e^y - [4y^3 \sin(xy^2) + y^4 \cos(xy^2) \cdot x2y] = 4e^y - 4y^3 \sin(xy^2) - 2xy^5 \cos(xy^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} &= 4e^y - [12y^2 \sin(xy^2) + 4y^3 \cos(xy^2) \cdot x2y] - [10xy^4 \cos(xy^2) + 2xy^5(-\sin(xy^2) \cdot x2y)] \\ &= 4e^y - 12y^2 \sin(xy^2) - 8xy^4 \cos(xy^2) - 10xy^4 \cos(xy^2) + 4x^2 y^6 \sin(xy^2) \\ &= 4e^y - 12y^2 \sin(xy^2) - 18xy^4 \cos(xy^2) + 4x^2 y^6 \sin(xy^2) \end{aligned}$$

Poznámky

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
 $u = u(x) \quad v = v(x)$
15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

114 - Diferenciál funkce

Zadání Vypočítejte diferenciál funkce $z = f(x, y) = \sqrt{xy}$ v bodě $A = [2, 1]$. Určete přibližně hodnotu $f(2,04; 0,99)$.

Řešení Video Teorie: 39 Příklady: 222, 223, 224, 225 

Nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu podle proměnných x a y ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}}.$$

Sestavíme diferenciál funkce z ,

$$dz = \frac{y}{2\sqrt{xy}}dx + \frac{x}{2\sqrt{xy}}dy = \frac{1}{2\sqrt{xy}}(ydx + xdy).$$

Dosadíme do diferenciálu dz bod A ,

$$dz(A) = dz(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1(x - 2) + 2(y - 1)) = \frac{\sqrt{2}}{4}(x + 2y - 4).$$

Všimněme si, že diferenciál v bodě je lineární funkce dvou proměnných.

Pro přibližný výpočet funkčních hodnot použijeme poslední vztah v sekci „Poznámky“. Určíme přírůstky od bodu $A = [2, 1]$ k bodu $[2,04; 0,99]$,

$$dx = x - x_0 = 2,04 - 2 = 0,04; \quad dy = y - y_0 = 0,99 - 1 = -0,01.$$

Určíme funkční hodnotu $f(A) = f(2, 1) = \sqrt{2}$. Určíme hodnotu diferenciálu $dz(A)(dx, dy)$ při známých přírůstcích,

$$dz(A)(dx, dy) = dz(2, 1)(0,04; -0,01) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 \cdot 0,04 - 2 \cdot 0,01) = \frac{1}{2\sqrt{2}}0,02 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{2}{100} = \frac{\sqrt{2}}{200}.$$

Přibližná hodnota funkce $f(2,04; 0,99)$ pak bude

$$f(2,04; 0,99) \approx f(A) + df(A)(dx, dy) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{200} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{200} \right).$$

Poznámky

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

při známých přírůstcích dx, dy

$$dz(A)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}$$

Diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy)$$

115 - Diferenciál funkce

Zadání Vypočítejte diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$.

Řešení Video **Teorie:** 39 **Příklady:** 222, 223, 224, 225 

Nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu podle proměnných x a y ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot (-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

Určíme parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-2y(x-y)^{-2}) = -2y(-2)(x-y)^{-3} \cdot 1 = \frac{4y}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-2y}{(x-y)^2} \right) = \frac{-2(x-y)^2 - (-2y)2(x-y) \cdot (-1)}{(x-y)^4} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{(x-y)^2} \right) = \frac{2(x-y)^2 - 2x \cdot 2(x-y) \cdot 1}{(x-y)^4} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x(x-y)^{-2}) = 2x(-2)(x-y)^{-3} \cdot (-1) = \frac{4x}{(x-y)^3}.$$

Sestavíme diferenciál druhého řádu

$$d^2z = \frac{4y}{(x-y)^3} dx^2 - 4 \frac{x+y}{(x-y)^3} dx dy + \frac{4x}{(x-y)^3} dy^2 = \frac{4}{(x-y)^3} (y dx^2 - (x+y) dx dy + x dy^2).$$

Poznámky

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

při známých přírůstcích dx, dy

$$dz(A)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}$$

Diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy)$$

116 - Tečná rovina, normála

Zadání Nalezněte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $z = f(x, y) = \sqrt{2x} - \sqrt{3y} - x$ v bodě $A = [2, 3, ?]$.

Řešení Video **Teorie: 41** **Příklady: 226, 227** 

Bod A je bod dotyku, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, určíme jeho z -ovou složku, $z_0 = f(x_0, y_0) = f(2, 3) = -3$.

Vypočítáme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [2, 3]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{y}},$$

a tyto funkce dvou proměnných vyčíslíme na bodě $A = [2, 3]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}.$$

Sestavíme rovnici tečné roviny

$$\tau : z + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 3),$$

rovnici převedeme na obecný tvar

$$\tau : x + y + 2z + 1 = 0.$$

Pro parametrické rovnice normály dostáváme

$$\begin{aligned} x &= 2 - \frac{1}{2}t \\ n : \quad y &= 3 - \frac{1}{2}t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= -3 - t \end{aligned}$$

Poznámky

Tečná rovina τ ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$, $A = [x_0, y_0]$

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0)$$

Normála n grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$, $A = [x_0, y_0]$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(A)t \\ n : \quad y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 - t \end{aligned}$$

117 - Taylorův polynom

Zadání Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = f(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + x - y + 1$ v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení

Video **Teorie: 41** **Příklady: 228, 229** 

Určíme hodnoty $f(A)$, $df(A)$ a $d^2f(A)$. Poté dosadíme do formule pro Taylorův polynom druhého řádu. Bod $A = [x_0, y_0] = [1, 1]$.

$$f(A) = 5$$

$$\begin{aligned} df(A) &= (4x - y + 1)|_{[1,1]}(x - 1) + (-x + 6y - 1)|_{[1,1]}(y - 1) \\ &= 4(x - 1) + 4(y - 1) \\ &= 4x + 4y - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2f(A) &= 4|_{[1,1]}(x - 1)^2 + 2 \cdot (-1)|_{[1,1]}(x - 1)(y - 1) + 6|_{[1,1]}(y - 1)^2 \\ &= 4x^2 - 8x + 4 - 2xy + 2x + 2y - 2 + 6y^2 - 12y + 6 \\ &= 4x^2 - 2xy + 6y^2 - 6x - 10y + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(A) &= 5 + \frac{4x + 4y - 8}{1!} + \frac{4x^2 - 2xy + 6y^2 - 6x - 10y + 8}{2!} \\ &= 5 + 4x + 4y - 8 + 2x^2 - xy + 3y^2 - 3x - 5y + 4 \\ &= 2x^2 - xy + 3y^2 + x - y + 1 \end{aligned}$$

Poznámky

Taylorův polynom m -tého řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$T_m(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \dots + \frac{d^m f(A)}{m!}$$

Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$T_2(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2f(A)}{2!}$$

resp.

$$\begin{aligned} T_2(A) &= f(A) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0) \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y - y_0)^2 \right) \end{aligned}$$

Zdůrazněme, že Taylorův polynom funkce je polynom. Pokud počítáme např. Taylorův polynom druhého řádu z polynomu dvou proměnných druhého stupně (viz. řešená úloha), výsledkem je ten samý polynom druhého řádu. Každý polynom stupně n je sám sobě Taylorovým polynomem stupně m pro každé $m \geq n$.

118 - Derivace implicitní funkce

Zadání Oběma způsoby nalezněte derivaci implicitní funkce dané rovnicí $x^3 + y + y^2 - 2xy = 3$ v bodě $A = [1, -1]$.

Řešení

Video **Teorie:** 42, 43 **Příklady:** 230, 231, 232 

V našem případě platí

$$F(x, y) = x^3 + y + y^2 - 2xy - 3.$$

Určíme parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2y - 2x.$$

Jedná se o spojitě funkce, navíc

$$\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1 + 2y - 2x|_{A=[1, -1]} = -3 \neq 0.$$

Derivace implicitní funkce tedy existuje a je jediná. Dosadíme do formule pro derivaci implicitní funkce v bodě $A = [x_0, y_0] = [1, -1]$,

$$f'(1) = -\frac{3x^2 - 2y|_{[1, -1]}}{1 + 2y - 2x|_{[1, -1]}} = -\frac{5}{-3} = \frac{5}{3}.$$

Druhý způsob spočívá v předpokladu, že v rovnici $F(x, y) = 0$ budeme předpokládat závislost $y = y(x)$. Tzn., že v této rovnici zůstává pouze jediná nezávislá proměnná, a to x . Rovnici poté derivujeme podle x , zvlášť pravou i levou stranu rovnice,

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y + y^2 - 2xy - 3 = 0) \Rightarrow 3x^2 + y' + 2yy' - 2y - 2xy' = 0.$$

Z rovnice vyjádříme y'

$$y' + 2yy' - 2xy' = -3x^2 + 2y \Rightarrow y'(1 + 2y - 2x) = -3x^2 + 2y \Rightarrow y' = \frac{-3x^2 + 2y}{1 + 2y - 2x} = -\frac{3x^2 - 2y}{1 + 2y - 2x}.$$

Kde se v rovnici po derivaci vzalo y' ? Musíme si uvědomit, že y závisí na x , $y = y(x)$. Nevíme ale, jak konkrétně ta závislost vypadá. Derivujeme tedy pouze formálně, tj. nad y napíšeme čárku. Funkci y^2 musíme ovšem derivovat jako složenou funkci, máme obecnou závislost y na x , na kterou působí druhá mocnina. Derivujeme nejdříve vnější složku (druhou mocninu) v tom samém bodě (v y) a poté násobíme derivací vnitřní funkce, derivací y podle x , což je formálně y' . Výraz $2xy$ musíme derivovat jako součin dvou funkcí proměnné x .

Poznámky

Derivace implicitní funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Derivace implicitní funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(A)}{\frac{\partial F}{\partial y}(A)}$$

Alternativní způsob výpočtu:

- v rovnici $F(x, y) = 0$ předpokládáme závislost y na x , $y = y(x)$,
- rovnice $F(x, y) = 0$ přejde na rovnici $F(x, y(x)) = G(x) = 0$,
- derivujeme funkci jedné proměnné G podle x ,
- vyjádříme y' .

119 - Tečna a normála k implicitní funkci

Zadání Nalezněte tečnu a normálu k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $e^{xy} = x + 2y$ v bodě $A = [1, 0]$.

Řešení

Video **Teorie:** 42, 43 **Příklady:** 233, 234 

V našem případě je funkce F dána

$$F(x, y) = e^{xy} - x - 2y.$$

Určíme parciální derivace funkce F v bodě $A = [x_0, y_0] = [1, 0]$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(A) &= ye^{xy} - 1|_{[1,0]} = -1, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(A) &= xe^{xy} - 2|_{[1,0]} = -1.\end{aligned}$$

Sestavíme rovnici tečny t ke grafu implicitní funkce,

$$t : -(x - 1) - y = 0 \Rightarrow y = -x + 1.$$

Sestavíme rovnici normály n ke grafu implicitní funkce,

$$n : -(x - 1) + y = 0 \Rightarrow y = x - 1.$$

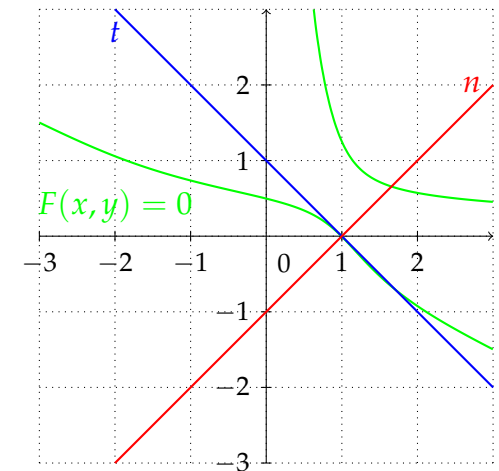
Poznámky

Tečna k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$t : \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)(y - y_0) = 0$$

Normála k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$n : \frac{\partial F}{\partial y}(A)(x - x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(A)(y - y_0) = 0$$



120 - Lokální extrémy - první část

Zadání Nalezněte lokální extrémy funkce $z = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$.

Řešení

Video **Teorie:** 44, 45 **Příklady:** 235, 236, 237, 238 

Definičním oborem funkce z je množina $\mathbb{R}^2$. Určíme parciální derivace prvního řádu a sestavíme rovnice pro stacionární body,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2y^2 + x^2) + e^{-x^2-y^2}2x = -2xe^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 1) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2y^2 + x^2) + e^{-x^2-y^2}4y = -2ye^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 2) = 0.\end{aligned}$$

Exponenciální funkce $e^{-x^2-y^2}$ je kladná, tedy nikdy nemůže nabýt nulové hodnoty a lze ji z rovnic pro stacionární body vykrátit. Rovnice přejdou na tvar

$$\begin{aligned}x(2y^2 + x^2 - 1) &= 0, \\ y(2y^2 + x^2 - 2) &= 0.\end{aligned}$$

Předpokládejme nejdříve, že $x = 0$. Ze druhé rovnice $y(2y^2 - 2) = 0$ dostaneme řešení $y = 0$ a $y = \pm 1$. Obdržíme tři různé stacionární body, $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0, 1]$ a $A_3 = [0, -1]$.

Ve druhé rovnici předpokládejme, že $y = 0$. Z první rovnice $x(x^2 - 1) = 0$ dostaneme řešení $x = 0$ a $x = \pm 1$. Bod $[0, 0]$ již máme vypočítaný, přibýly další dva nové stacionární body, bod $A_4 = [1, 0]$ a $A_5 = [-1, 0]$.

Pokud $x \neq 0$ i $y \neq 0$, řešíme následující soustavu rovnic,

$$\begin{aligned}2y^2 + x^2 - 1 &= 0, \\ 2y^2 + x^2 - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Pokud obě rovnice od sebe odečteme, dostaneme rovnici $1 = 0$, ale 1 se nikdy 0 nerovná. Soustava nemá žádné řešení.

Určili jsme celkem pět stacionárních bodů:

$$A_1 = [0, 0], \quad A_2 = [0, 1], \quad A_3 = [0, -1], \quad A_4 = [1, 0], \quad A_5 = [-1, 0].$$

Poznámky

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme parciální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ parciálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$\begin{aligned}D_2 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2 \\ D_1 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\end{aligned}$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

121 - Lokální extrémy - druhá část

Zadání Nalezněte lokální extrémy funkce $z = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$.

Řešení

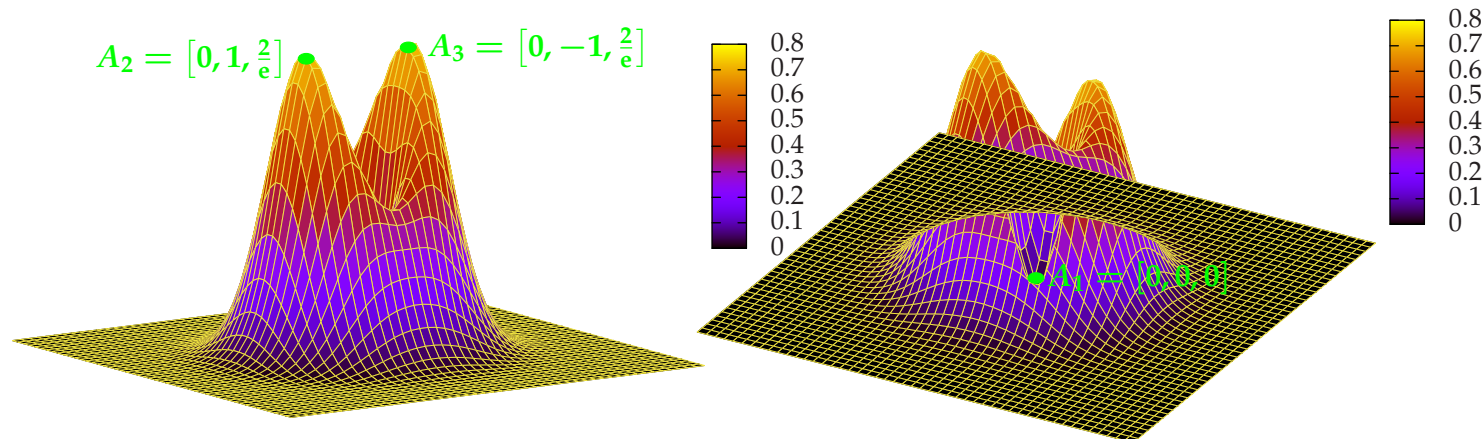
Pokračujeme v hledání lokálních extrémů funkce z předchozího listu. Nalezli jsme celkem pět stacionárních bodů. Určíme matici druhých parciálních derivací a vyhodnotíme ji na jednotlivých stacionárních bodech A_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$,

$$Q = \begin{pmatrix} ((-2 + 4x^2)(2y^2 + x^2 - 1) - 4x^2)e^{-x^2-y^2} & 4xye^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3) \\ 4xye^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3) & ((-2 + 4y^2)(2y^2 + x^2 - 2) - 8y^2)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix},$$

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, Q(A_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}, Q(A_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}, Q(A_4) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}, Q(A_5) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

V následující tabulce uvádíme souhrnný přehled klasifikace extrémů v jednotlivých bodech:

Stacionární bod A_i	D_1	D_2	extrém o hodnotě $z = f(A_i)$
$A_1 = [0, 0]$	$2 > 0$	$8 > 0$	ostré lokální minimum $z = 0$
$A_2 = [0, 1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_3 = [0, -1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_4 = [1, 0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje
$A_5 = [-1, 0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje



Poznámky

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme parciální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ parciálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

122 - Lokální extrémy - první část

Zadání Nalezněte lokální extrémy funkce $z = f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$.

Řešení

Video **Teorie: 44, 45** **Příklady: 235, 236, 237, 238** 

Určíme parciální derivace prvního řádu a sestavíme rovnice pro stacionární body,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \sin(x - y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y + \sin(x - y) = 0.$$

Ze druhé rovnice dostáváme

$$\sin(x - y) = \sin y.$$

Protože jak x , tak y patří do intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, bude rozdíl $x - y$ patřit do intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Nicméně funkce sinus je jak na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, tak i na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ prostá, to ale znamená, že existuje funkce inverzní, arkussinus, kterou lze aplikovat na druhou rovnici,

$$\arcsin(\sin(x - y) = \sin y) \Rightarrow \arcsin(\sin(x - y)) = \arcsin(\sin y) \Rightarrow x - y = y \Rightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Tuto rovnici dosadíme do první rovnice,

$$\cos x - \sin(x - y) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin\left(x - \frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin \frac{x}{2} = 0.$$

Využijeme goniometrické identity $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ a $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$,

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 1 - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - 1 = 0.$$

Použijeme substituci $\sin \frac{x}{2} = t$,

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -1.$$

Vzhledem k omezení x na interval $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ záporné řešení neuvažujeme,

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{x}{2}, \sin k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{stacionární bod } A = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right].$$

Poznámky

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme parciální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ parciálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

123 - Lokální extrémy - druhá část

Zadání Nalezněte lokální extrémy funkce $z = f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$.

Řešení

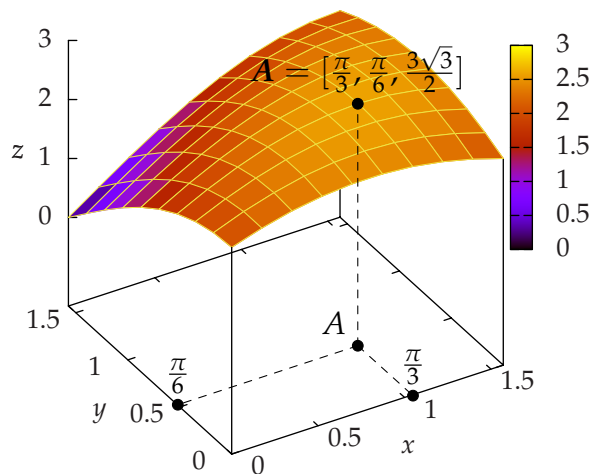
Pokračujeme v hledání lokálních extrémů funkce z předchozího listu. Nalezli jsme jeden stacionární bod. Určíme matici druhých partiálních derivací a vyhodnotíme ji na bodě A ,

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x - y)|_A & \cos(x - y)|_A \\ \cos(x - y)|_A & -\cos y - \cos(x - y)|_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Určíme determinanty D_1 a D_2 ,

$$D_1 = -\sqrt{3}, \quad D_2 = \frac{9}{4}.$$

Protože $D_2 > 0$, v bodě $A = [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ extrém existuje. Protože $D_1 < 0$, má funkce $z = f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ v bodě $A = [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ ostré lokální maximum $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.



Poznámky

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme partiální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ partiálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

124 - Vázané extrém

Zadání Nalezněte vázané extrém funkce $z = f(x, y) = \sqrt{4x + y^2 + 5}$ vzhledem k podmínce $2x - 3 - y = 0$.

Řešení

Video **Teorie: 46** **Příklady: 239, 240** 

Určíme nejdříve definiční obor funkce z , funkce z bude existovat, pokud bude výraz pod odmocninou nezáporný, tj.

$$4x + y^2 + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{4}y^2 - \frac{5}{4}, \text{ viz. obrázek v „Poznámkách“}.$$

Z rovnice vazby $2x - 3 - y = 0$ lze jednoznačně vyjádřit jak y , tak x . Vyjádříme y ,

$$y = 2x - 3.$$

Dosadíme vazbu do předpisu funkce z ,

$$z = \sqrt{4x + (2x - 3)^2 + 5} = \sqrt{4x + 4x^2 - 12x + 9 + 5} = \sqrt{4x^2 - 8x + 14},$$

dostaneme funkci jedné proměnné $z = z(x, \varphi(x))$ (proměnné x) a snadno se přesvědčíme, že $D_z = \mathbb{R}$. Určíme první derivaci, poté ji položíme rovnu nule a dostaneme rovnici pro stacionární body této funkce,

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{8x - 8}{2\sqrt{4x^2 - 8x + 14}} = \frac{4x - 4}{\sqrt{4x^2 - 8x + 14}} = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Definičním oborem první derivace je $D_{z'} = \mathbb{R}$. Na intervalu $(-\infty, 1)$ je první derivace $z' < 0$, funkce z je na tomto intervalu klesající. Na intervalu $(1, \infty)$ je první derivace $z' > 0$, tzn. funkce z je na tomto intervalu rostoucí. Ve stacionárním bodě $x = 1$ se mění znaménko první derivace z – na $+$ což znamená, že v bodě $x = 1$ má funkce z lokální minimum.

Dosadíme bod $x = 1$ do rovnice vazby, dostáváme $y = -1$. Snadno ověříme, že bod A patří do definičního oboru funkce $z = \sqrt{4x + y^2 + 5}$, viz. obrázek vpravo.

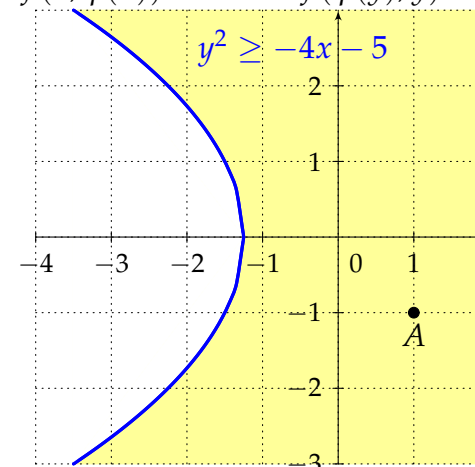
Funkce $z = \sqrt{4x + y^2 + 5}$ má v bodě $A = [1, -1]$ vázané lokální minimum $z = f(1, -1) = \sqrt{10}$.

Zcela analogicky budeme postupovat v případě, kdy lze z rovnice vazby vyjádřit jednoznačně x .

Poznámky

V případě, že lze jednoznačně z rovnice vazby vyjádřit buď x nebo y , budeme postupovat při hledání vázaných extrémů takto:

- vyjádříme buď $y = \varphi(x)$ nebo $x = \psi(y)$
- vázané extrém hledáme jako lokální extrém funkce jedné proměnné buď $z = f(x, \varphi(x))$ nebo $z = f(\psi(y), y)$



125 - Vázané extrémy

Zadání Nalezněte vázané extrémy funkce $z = f(x, y) = -8x + 6y - 5$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 100$.

Řešení

Video **Teorie: 46** **Příklady: 239, 240** 

Sestavíme Lagrangeovu funkci pro funkci $f(x) = -8x + 6y - 5$ a $g(x, y) = x^2 + y^2 - 100$,

$$\Phi(x, y, \lambda) = -8x + 6y - 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 100).$$

Vypočítáme parciální derivace prvního řádu funkce Φ , které položíme rovny nule. Získáme tak rovnice pro stacionární body funkce Φ ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -8 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 6 + 2\lambda y = 0,$$

ke kterým přidáme rovnici vazby, řešíme následující soustavu rovnic

$$-8 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{\lambda} \quad 6 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{\lambda}$$

dosadíme do rovnice vazby za x a y ,

$$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 = 100 \Rightarrow \frac{16}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = 100 \Rightarrow 100\lambda^2 = 25 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}.$$

Dopočítáme stacionární body $A = [x, y]$ dosazením λ ,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow A_1 = [8, -6], \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = [-8, 6].$$

Sestavíme matici parciálních derivací druhého řádu a vyhodnotíme ji na stacionárních bodech,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad Q(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

V bodě $A_1 = [8, -6]$ je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$. Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A_1 = [8, -6]$ vázané lokální minimum $z = -105$. V bodě $A_2 = [-8, 6]$ je $D_1 < 0$, $D_2 > 0$. Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A_2 = [-8, 6]$ vázané lokální maximum $z = 95$.

Poznámky

V případě, že nelze jednoznačně z rovnice vazby $g(x, y) = 0$ vyjádřit buď x nebo y budeme postupovat při hledání vázaných extrémů takto:

- sestavíme Lagrangeovu funkci $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
- hledáme lokální extrémy funkce Φ
- má-li funkce Φ ve svém stacionárním bodě lokální extrém, má i funkce $z = f(x, y)$ v tomto bodě lokální extrém vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$, tzv. vázaný extrém

126 - Globální extrémy

Zadání Nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y) = x^2 - y$ na čtverci s vrcholy $[1, 1]$, $[3, 1]$, $[3, 3]$, $[1, 3]$.

Řešení

Video **Teorie: 47** **Příklady: 241, 242, 243** 

Definičním oborem funkce z je čtverec, viz. obrázek v „Poznámkách“. Určíme lokální extrémy funkce z ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1 = 0.$$

Je zřejmé, že druhá rovnice nemá řešení, lokální extrémy neexistují. Určíme rovnice hraničních křivek, tyto rovnice reprezentují rovnice vazeb,

$$AB : y = 1, x \in (1, 3), \quad BC : x = 3, y \in (1, 3), \quad CD : y = 3, x \in (1, 3), \quad DA : x = 1, y \in (1, 3).$$

Jednotlivé rovnice vazeb dosadíme do funkce z a nalezneme případné vázané extrémy,

$$AB : z = x^2 - 1 \Rightarrow z' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 \notin (1, 3) \Rightarrow \text{extrém neexistuje},$$

$$BC : z = 9 - y \Rightarrow z' = -1 = 0 \Rightarrow \text{rovnice nemá řešení} \Rightarrow \text{extrém neexistuje},$$

$$CD : z = x^2 - 3 \Rightarrow z' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 \notin (1, 3) \Rightarrow \text{extrém neexistuje},$$

$$DA : z = 1 - y \Rightarrow z' = -1 = 0 \Rightarrow \text{rovnice nemá řešení} \Rightarrow \text{extrém neexistuje}.$$

Zbývá porovnat funkční hodnoty ve vrcholech čtverce,

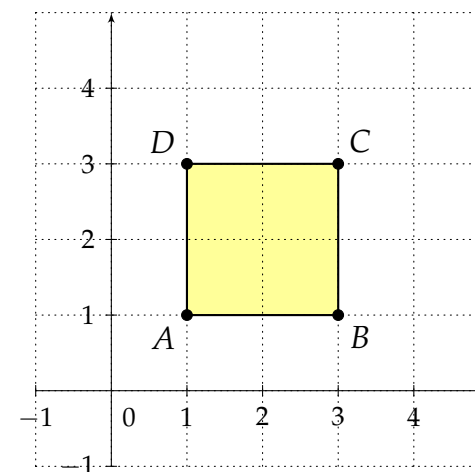
$$f(A) = 0, f(B) = 8, f(C) = 6, f(D) = -2 \Rightarrow f(D) < f(A) < f(C) < f(B).$$

Funkce z má v bodě D globální minimum o hodnotě $z = -2$, v bodě B má globální maximum o hodnotě $z = 8$.

Poznámky

Budeme postupovat takto:

- určíme definiční obor D_f funkce $z = f(x, y)$
- nalezneme lokální extrémy této funkce na množině D_f , ze které vyloučíme hranici $g(x, y) = 0$
- určíme vázané extrémy této funkce vzhledem k podmínce $g(x, y) = 0$
- porovnáme funkční hodnoty všech extrémů, extrém s největší funkční hodnotou bude globálním maximem, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude globálním minimem



Řešené příklady – Obyčejné diferenciální rovnice

128 - Diferenciální rovnice - přímá integrace

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y''' = 6x - 6$.

Řešení

Video **Teorie: 49, 50** **Příklady: 245-253** 

V zadání diferenciální rovnice se nachází neznámá funkce y pouze ve své třetí derivaci, proto k nalezení obecného řešení použijeme přímou integraci. Postupným integrováním budeme snižovat řád derivace hledané funkce y . Budeme vycházet ze skutečnosti, že $y''' = \frac{d}{dx}(y'')$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y'') &= 6x - 6 \quad \Rightarrow \quad d(y'') = (6x - 6)dx, \\ \int d(y'') &= \int (6x - 6)dx \quad \Rightarrow \quad y'' = 3x^2 - 6x + C_1.\end{aligned}$$

Stejným způsobem budeme snižovat řád diferenciální rovnice dokud nedostaneme neznámou funkci y . Tedy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y') &= 3x^2 - 6x + C_1 \quad \Rightarrow \quad d(y') = (3x^2 - 6x + C_1)dx, \\ \int d(y') &= \int (3x^2 - 6x + C_1)dx \quad \Rightarrow \quad y' = x^3 - 3x^2 + C_1x + C_2\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y) &= x^3 - 3x^2 + C_1x + C_2 \quad \Rightarrow \quad d(y) = (x^3 - 3x^2 + C_1x + C_2)dx, \\ \int d(y) &= \int (x^3 - 3x^2 + C_1x + C_2)dx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^4}{4} - x^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.\end{aligned}$$

Vidíme, že v obecném řešení této diferenciální rovnice 3. řádu se vyskytují právě 3 integrační konstanty C_1, C_2, C_3 .

Partikulárním řešením rozumíme konkrétní křivku. Tu získáme libovolnou volbou konstant C_1, C_2 a C_3 , např. pro $C_1 = 2, C_2 = 3$ a $C_3 = 5$ dostaneme partikulární řešení

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 3x + 5.$$

Poznámky

Přímá integrace

Diferenciální rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$

k-tá derivace
 $y^{(k)} = \frac{d}{dx} \left(y^{(k-1)} \right), \quad 1 \leq k \leq n$

Obecné řešení

$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n\text{-krát}} f(x) \underbrace{dx \cdots dx}_{n\text{-krát}},$$

129 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$.

Řešení

Video **Teorie: 50, 51** **Příklady: 245-253** 

Nejprve nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}.$$

Nyní budeme chtít rovnici zapsat v tzv. separovaném tvaru, tj. na levé straně chceme mít pouze výraz obsahující proměnnou y a na pravé ty, které obsahují proměnnou x

$$(y + e^y) dy = (x - e^{-x}) dx$$

Integrací obou stran rovnice dostaneme

$$\int (y + e^y) dy = \int (x - e^{-x}) dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + C.$$

Obecné řešení obdržíme ve tvaru

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + e^y - e^{-x} = C.$$

Protože C je konstanta, bude po vynásobení dvěma hodnota $2C$ také konstantou a v zápise ji můžeme nahradit písmenem K . Po úpravě dostaneme výsledek:

$$y^2 - x^2 + 2e^y - 2e^{-x} = K.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

130 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \cos^2 x \cos^2 2y$.

Řešení Video **Teorie: 50, 51 Příklady: 245-253** 

Nejprve nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 2y$$

Rovnici za předpokladu, že $\cos 2y \neq 0$, upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{dy}{\cos^2 2y} = \cos^2 x dx.$$

Integrací obou stran rovnice

$$\int \frac{dy}{\cos^2 2y} = \int \cos^2 x dx,$$

dostaneme

$$\frac{1}{2} \tan 2y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Po úpravě získáme obecné řešení ve tvaru

$$2 \tan 2y - \sin 2x - 2x = K.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

131 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y^2 \sqrt{1-x^2} y' = \arcsin x$.

Řešení

Video **Teorie: 50, 51** **Příklady: 245-253** 

Nejprve nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$

$$y^2 \sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} = \arcsin x.$$

Za předpokladu, že $\sqrt{1-x^2} \neq 0$ výraz upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$y^2 dy = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Abychom našli obecné řešení, budeme integrovat nyní obě strany rovnice

$$\int y^2 dy = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Integrál na pravé straně rovnice si můžeme spočítat zvlášť

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{array} \right] = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \arcsin^2 x + C.$$

Po dosazení obdržíme rovnici

$$\frac{y^3}{3} = \frac{1}{2} \arcsin^2 x + C.$$

Odtud plyne, že obecné řešení má tvar

$$y^3 - \frac{3}{2} \arcsin^2 x = C.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

132 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte Cauchyho úlohu $(8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y) y' = 5x, y\left(\frac{4}{5}\right) = 1$.

Řešení

Video Teorie: **50, 51** Příklady: **245-253** 

Nejprve nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$

$$(8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y) \frac{dy}{dx} = 5x.$$

Výraz upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$(8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y) dy = 5x dx.$$

Nyní obě strany rovnice integrujeme

$$\int (8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y) dy = \int 5x dx.$$

Obecné řešení má tvar

$$y^8 + y^6 + y^4 + y^2 = \frac{5}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty C

$$1^8 + 1^6 + 1^4 + 1^2 = \frac{5}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 + C \Rightarrow C = \frac{5}{2}.$$

Hledané řešení je tedy

$$y^8 + y^6 + y^4 + y^2 = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

133 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte Cauchyho úlohu $\frac{y'}{y} = -2 \sin x$, $y(\pi) = 1$.

Řešení

Video **Teorie: 50, 51** **Příklady: 245-253** 

Nejprve nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -2 \sin x.$$

Výraz upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{1}{y} dy = -2 \sin x dx.$$

Po integraci máme

$$\int \frac{1}{y} dy = -2 \int \sin x dx \Rightarrow \ln |y| = 2 \cos x + C$$

Podle pravidel pro počítání s logaritmy a exponenciálními výrazy je

$$|y| = e^{2 \cos x + C} \Rightarrow |y| = e^{2 \cos x} e^C \Rightarrow y = \pm e^C e^{2 \cos x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Protože C je konstanta, tak bude i výraz $\pm e^C$ konstantou a můžeme ho nahradit symbolem K ($K \neq 0$, protože funkce $y = 0$ není řešením zadané diferenciální rovnice)

$$y = K e^{2 \cos x}.$$

Dosazením počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty K

$$1 = K e^{2 \cos \pi} \Rightarrow K = e^2.$$

Hledané řešení je tedy

$$y = e^2 e^{2 \cos x} \Rightarrow y = e^{2 \cos x + 2}.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

134 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 3x - 2y + 5$.

Řešení

Video **Teorie: 50, 51** **Příklady: 254, 255** 

Zavedeme substituci $u = 3x - 2y + 5 \Rightarrow u' = 3 - 2y' \Rightarrow y' = \frac{3 - u'}{2}$ a dosadíme do dané diferenciální rovnice

$$\frac{3 - u'}{2} = u$$

V rovnici nahradíme derivaci u' podílem diferenciálů $\frac{du}{dx}$ a upravíme ji na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{3 - \frac{du}{dx}}{2} = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 - 2u \Rightarrow \frac{du}{3 - 2u} = dx$$

Nyní obě strany rovnice budeme integrovat

$$\int \frac{du}{3 - 2u} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln |3 - 2u| = x + C$$

Podle pravidel pro počítání s logaritmy a exponenciálními výrazy je

$$\ln \frac{1}{\sqrt{3 - 2u}} = x + C \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3 - 2u}} = e^{x+C} \Rightarrow \frac{1}{e^{x+C}} = \sqrt{3 - 2u} \Rightarrow e^{-(x+C)} = \sqrt{3 - 2u},$$

tedy

$$e^{-x} e^{-C} = \sqrt{3 - 2(3x - 2y + 5)}.$$

Protože C je konstanta, tak bude i výraz e^{-C} konstantou a můžeme ho nahradit symbolem K a po jednoduché úpravě obdržíme obecné řešení ve tvaru

$$Ke^{-x} = \sqrt{4y - 6x - 7}.$$

Pozn.: Tuto diferenciální rovnici můžeme řešit také jako diferenciální rovnici lineární.

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = f(ax + by + c)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$u = ax + by + c$, kde $u = u(x)$,

odtud

$$u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}$$

pro $b \neq 0$

135 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \cos(x - y)$.

Řešení

Video **Teorie: 50, 51** **Příklady: 254, 255** 

Zavedeme substituci $u = x - y \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$ a dosadíme do dané diferenciální rovnice

$$1 - u' = \cos u$$

V rovnici nahradíme derivaci u' podílem diferenciálů $\frac{du}{dx}$ a upravíme ji na rovnici v separovaném tvaru

$$1 - \frac{du}{dx} = \cos u \Rightarrow \frac{du}{1 - \cos u} = dx$$

Nyní budeme obě strany rovnice integrovat

$$\int \frac{du}{1 - \cos u} = \int dx$$

Integrál na levé straně rovnice si spočítáme zvlášť

$$\int \frac{du}{1 - \cos u} = \left[\begin{array}{l} t = \tan \frac{u}{2} \\ \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ du = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right] = \int \frac{1}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\tan \frac{u}{2}} + c_1 = -\cot \frac{u}{2} + c_1,$$

tedy

$$-\cot \frac{u}{2} = x + c_2.$$

Po návratu k substituci a jednoduché úpravě dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$-x - \cot \frac{x-y}{2} = c_2 \Rightarrow x + \cot \frac{x-y}{2} = C.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = f(ax + by + c)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$u = ax + by + c$, kde $u = u(x)$,

odtud

$$u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}$$

pro $b \neq 0$

136 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $xy' - y = 2\sqrt{xy}$.

Řešení

Video **Teorie: 50, 52** **Příklady: 256-263** 

Obě strany rovnice nejprve vynásobíme výrazem $\frac{1}{x}$ a upravíme

$$xy' - y = 2\sqrt{xy} \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{y}{x} = 2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$. Odtud je $y = zx$ a $y' = z'x + z$.

Po dosazení do zadané homogenní diferenciální rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$z'x + z - z = 2\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad z'x = 2\sqrt{z}.$$

V rovnici nahradíme derivaci z' podílem diferenciálů $\frac{dz}{dx}$ a pro $\sqrt{z} \neq 0$ a $x \neq 0$ ji upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{dz}{dx}x = 2\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2}{x}dx$$

Nyní obě strany rovnice budeme integrovat

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int \frac{2}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \int z^{-\frac{1}{2}}dz = \int \frac{2}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z} = \ln|x| + 2C.$$

Konstanta $2C$ může nabývat všech hodnot z množiny reálných čísel stejně jako funkce $\ln x$, napíšeme si jí tedy jako $2C = \ln K$, kde $K > 0$ a podle pravidel pro počítání s logaritmy dostaneme

$$\sqrt{z} = \ln|x| + \ln K \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z} = \ln(K|x|) \quad \Rightarrow \quad z = \ln^2(K|x|).$$

Dosazením $z = \frac{y}{x}$ a po úpravě dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$\frac{y}{x} = \ln^2(K|x|) \quad \Rightarrow \quad y = x \ln^2(K|x|).$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice typu homogenní rovnice

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce

$z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

137 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{3y - 2x}{x + y}$.

Řešení

Video **Teorie: 50, 52** **Příklady: 256-263** 

Danou rovnici nejprve upravíme na tvar $y' = \frac{3\frac{y}{x} - 2}{1 + \frac{y}{x}}$.

Zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$. Odtud je $y = zx$ a $y' = z'x + z$.

Po dosazení do zadané homogenní diferenciální rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$z'x + z = \frac{3z - 2}{1 + z} \quad \Rightarrow \quad z'x = \frac{3z - 2}{1 + z} - z \quad \Rightarrow \quad z'x = -\frac{z^2 - 2z + 2}{1 + z}.$$

V rovnici nahradíme derivaci z' podílem diferenciálů $\frac{dz}{dx}$ a upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{dz}{dx}x = -\frac{z^2 - 2z + 2}{1 + z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 + z}{z^2 - 2z + 2}dz = -\frac{dx}{x}.$$

Nyní budeme integrovat obě strany rovnice

$$\int \frac{1 + z}{z^2 - 2z + 2}dz = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad 2 \int \frac{1}{(z - 1)^2 + 1}dz + \frac{1}{2} \int \frac{(2z - 2)}{z^2 - 2z + 2}dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$2 \arctan(z - 1) + \frac{1}{2} \ln |z^2 - 2z + 2| = -\ln |x| + C \quad \Rightarrow \quad 4 \arctan(z - 1) + \ln |z^2 - 2z + 2| = -\ln x^2 + 2C.$$

Konstanta $2C$ může nabývat všech hodnot z množiny reálných čísel stejně jako funkce $\ln x$, napíšeme si jí tedy jako $2C = \ln K$, kde $K > 0$ a podle pravidel pro počítání s logaritmy dostaneme

$$4 \arctan(z - 1) = \ln \frac{K}{x^2(z^2 - 2z + 2)}.$$

Po dosazením $z = \frac{y}{x}$ a úpravě dostaneme obecné řešení: $4 \arctan \frac{y - x}{x} = \ln \frac{K}{y^2 - 2yx + 2x^2}.$

Poznámky

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze upravit
na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce
 $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

138 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $xy' - y = \sqrt{y^2 - x^2}$.**Řešení****Video** **Teorie: 50, 52** **Příklady: 256-263** 

Danou rovnici nejprve upravíme na tvar $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$.

Zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$. Odtud je $y = zx$ a $y' = z'x + z$.

Po dosazení do zadané homogenní diferenciální rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$z'x + z = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad z'x = \sqrt{z^2 - 1}$$

V rovnici nahradíme derivaci z' podílem diferenciálů $\frac{dz}{dx}$, upravíme na rovnici v separovaném tvaru a poté integrujeme

$$\frac{dz}{dx}x = \sqrt{z^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x}$$

Integrál na pravé straně rovnice si spočítáme zvlášť

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{z^2 - 1} + z \\ dt = \left(\frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{z^2 - 1}} + 1 \right) dz \\ \frac{dt}{t} = \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| + C_1.$$

Po integraci obou stran dostaneme $\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln |x| + C$.

Konstanta C může nabývat všech hodnot z množiny reálných čísel stejně jako funkce $\ln x$, napíšeme si jí tedy jako $C = \ln K$, kde $K > 0$ a podle pravidel pro počítání s logaritmy dostaneme

$$\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln |x| + \ln K \quad \Rightarrow \quad \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln (K|x|) \quad \Rightarrow \quad z + \sqrt{z^2 - 1} = Kx.$$

Dosazením $z = \frac{y}{x}$ dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Kx \quad \Rightarrow \quad y + \sqrt{y^2 - x^2} = Kx^2.$$

Poznámky

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze upravit
na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce
 $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

139 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $x^2 y' = y^2 + xy + 4x^2$.

Řešení

Video **Teorie: 50, 52** **Příklady: 256-263** 

Danou rovnici nejprve upravíme na tvar

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 4$$

Zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$. Odtud je $y = zx$ a $y' = z'x + z$.

Po dosazení do zadané homogenní diferenciální rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$z'x + z = z^2 + z + 4 \quad \Rightarrow \quad z'x = z^2 + 4$$

V rovnici nahradíme derivaci z' podílem diferenciálů $\frac{dz}{dx}$, upravíme na rovnici v separovaném tvaru a poté integrujeme

$$\frac{dz}{dx}x = z^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z^2 + 4} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z^2 + 4} = \int \frac{dx}{x}.$$

Po integraci dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{2} &= \ln |x| + C, \\ \arctan \frac{z}{2} &= 2 \ln |x| + 2C. \end{aligned}$$

Konstanta $2C$ může nabývat všech hodnot z množiny reálných čísel stejně jako funkce $\ln |x|$, napíšeme si jí tedy jako $2C = \ln K$, kde $K > 0$ a podle pravidel pro počítání s logaritmy dostaneme

$$\arctan \frac{z}{2} = 2 \ln |x| + \ln K \quad \Rightarrow \quad \arctan \frac{z}{2} = \ln (Kx^2).$$

Dosazením $z = \frac{y}{x}$ dostaneme obecné řešení

$$\arctan \frac{y}{2x} = \ln (Kx^2).$$

Poznámky

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze upravit
na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$$z = \frac{y}{x}, \text{ kde } z = z(x),$$

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

140 - Exaktní diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $\left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$.

Řešení

Video **Teorie: 53, 54 Příklady: 264, 265** 

Nejprve ověříme, že se jedná o exaktní diferenciální rovnici. Vidíme, že $P(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}$ a $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Tedy

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{DR je exaktní.}$$

Nyní budeme hledat kmenovou funkci $F(x, y)$, pro kterou platí soustava parciálních diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Z druhé rovnice integrací podle y dostaneme

$$F(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \psi(x) = \arctan \frac{y}{x} + \psi(x),$$

odtud derivací podle proměnné x je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{d\psi}{dx}$$

a porovnáním s první rovnicí

$$1 - \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{d\psi}{dx} \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = 1 \Rightarrow \psi(x) = x + C.$$

Kmenová funkce je $F(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + x + C$ a obecné řešení: $\arctan \frac{y}{x} + x = K$.

Poznámky

Exaktní diferenciální rovnice

Postup řešení

- ověříme, zda platí podmínka exaktnosti $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$
- vypočítáme kmenovou funkci $F(x, y)$
- určíme obecné řešení rovnice ve tvaru $F(x, y) = C$

141 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' - y = e^{2x}$.**Řešení****Video** Teorie: **55, 56, 57** Příklady: **266-273** 

Příslušná zkrácená LDR má tvar $y' - y = 0$. Jedná se o rovnici separovatelnou, jejíž obecné řešení je

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \Rightarrow |y| = e^{x+C_1} \Rightarrow y = \pm e^{C_1} e^x.$$

Protože C_1 je konstanta, tak bude i výraz $\pm e^{C_1}$ konstantou a můžeme ho nahradit symbolem C a obdržíme řešení zkrácené rovnice ve tvaru

$$y = Ce^x.$$

Provedeme variaci konstanty: předpokládejme, že $C = C(x)$, potom

$$y = C(x)e^x$$

a její derivace je

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x.$$

Po dosazení do původní rovnice se mám odečtou dva členy

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^{2x},$$

$$C'(x)e^x = e^{2x} \Rightarrow C'(x) = e^x$$

Odtud přímou integrací

$$C = \int e^x dx = e^x + K.$$

Po dosazení obdržíme obecné řešení

$$y = (e^x + K) e^x.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*
 $C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka*: odečetly se nám dva členy?
(ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek*:

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

142 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $x^2 y' + xy = \ln x$.

Řešení

Video Teorie: **55, 56, 57** Příklady: **266-273** 

Rovnici si nejprve upravíme na tvar

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$$

a vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = -\ln |x| + C_1.$$

Označíme-li $C_1 = \ln C_2$, $C_2 > 0$ potom

$$\ln |y| = -\ln |x| + \ln C_2 \Rightarrow \ln |y| = \ln \frac{C_2}{|x|} \Rightarrow |y| = \frac{C_2}{|x|} \Rightarrow y = \pm \frac{C_2}{x} \Rightarrow y = \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}.$$

(konstanta C může nabýt hodnoty nula, protože i funkce $y = 0$ je řešením zkrácené LDR).

Provedeme variaci konstanty: předpokládejme, že $C = C(x)$, potom

$$y = \frac{C(x)}{x}, \quad y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

Po dosazení do původní rovnice se mám odečtou dva členy

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{C'(x)}{x} = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow C'(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + K.$$

Po dosazení obdržíme obecné řešení

$$y = \frac{\frac{1}{2} \ln^2 x + K}{x}.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*
 $C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka*: odečetly se nám dva členy?
(ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek*:

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

143 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{7y}{x^2 + 3x - 10} = \sqrt{x - 2}$.

Řešení Video Teorie: 55, 56, 57 Příklady: 266-273 

Nejprve vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' - \frac{7y}{x^2 + 3x - 10} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{7}{x^2 + 3x - 10} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{7}{(x-2)(x+5)} dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{7}{(x-2)(x+5)} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln \frac{x-2}{x+5} + \ln C \Rightarrow y = C \frac{x-2}{x+5}.$$

Provedeme variaci konstanty: předpokládejme, že $C = C(x)$, pak

$$y = C(x) \frac{x-2}{x+5}, \quad y' = C'(x) \frac{x-2}{x+5} + C(x) \frac{7}{(x+5)^2}.$$

Po dosazení do původní rovnice se nám odečtou dva členy a po úpravě dostaneme $C'(x) = \frac{(x+5)\sqrt{x-2}}{x-2}$.

Odtud

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \frac{(x+5)\sqrt{x-2}}{x-2} dx = \int \frac{(x+5)\sqrt{x-2}}{x-2} dx \left[\begin{array}{l} x-2 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 2 \end{array} \right] = \int \frac{(t^2+7)t}{t^2} 2t dt \\ &= \int (2t^2 + 14) dt = \frac{2t^3}{3} + 14t = \frac{2}{3} (\sqrt{x-2})^3 + 14\sqrt{x-2} + K. \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě obdržíme obecné řešení

$$y = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x-2} (x+19) + K \right) \frac{x-2}{x+5}.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*
 $C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka*: odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek*:

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

144 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y \sin x = \sin^3 x$.**Řešení****Video** Teorie: **55, 56, 57** Příklady: **266-273** 

Nejprve vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' + y \sin x = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\sin x \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\sin x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx,$$

$$\ln |y| = \cos x + c \Rightarrow |y| = e^{\cos x} + c \Rightarrow y = \pm e^c e^{\cos x}.$$

Označíme-li $C = \pm e^c$, obdržíme řešení zkrácené rovnice ve tvaru $y = Ce^{\cos x}$.Provedeme variaci konstanty: předpokládejme, že $C = C(x)$, pak

$$y = C(x)e^{\cos x}, \quad y' = C'(x)e^{\cos x} + C(x)e^{\cos x}(-\sin x).$$

Po dosazení do původní rovnice se nám odečtou dva členy a po úpravě dostaneme

$$C'(x) = e^{-\cos x} \sin^3 x \Rightarrow C(x) = \int e^{-\cos x} \sin^3 x dx = \int e^{-\cos x} (1 - \cos^2 x) \sin x dx.$$

Odtud

$$C(x) = -(\cos x + 1)^2 e^{-\cos x} + K.$$

Dosadíme do předpokládaného tvaru obecného řešení

$$y = \left(-(\cos x + 1)^2 e^{-\cos x} + K \right) e^{\cos x}$$

a po úpravě dostaneme

$$y = -(\cos x + 1)^2 + Ke^{\cos x}.$$

Poznámky*Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)*

$$y' + yp(x) = q(x)$$

$$\text{derivace} \\ y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*
 $C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka*: odečetly se nám dva členy?
(ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek*:

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

$$\text{kde } E(x) = e^{\int p(x)dx}$$

145 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Řešte Cauchyho úlohu $y' - y \cot x = e^x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Řešení

Video Teorie: **55, 56, 57** Příklady: **266-273** 

Nejprve vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' - y \cot x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cot x \Rightarrow \frac{dy}{y} = \cot x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \cot x dx$$

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + C_1 \Rightarrow \ln |y| = \ln |\sin x| + \ln C_2, \quad C_2 > 0 \Rightarrow \ln |y| = \ln (C_2 |\sin x|).$$

Tedy

$$|y| = C_2 |\sin x| \Rightarrow y = \pm C_2 |\sin x|.$$

Protože C_2 je konstanta, tak bude i výraz $\pm C_2$ konstantou a můžeme ho nahradit symbolem C . Řešení obdržíme ve tvaru $y = C \sin x$. Provedeme variaci konstanty: předpokládejme, že $C = C(x)$, pak

$$y = C(x) \sin x, \quad y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x.$$

Po dosazení do původní rovnice se nám odečtou dva členy

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \sin x \cot x = e^x \sin x \Rightarrow C'(x) = e^x$$

$$C(x) = \int e^x dx = e^x + K,$$

obecné řešení má tvar

$$y = (e^x + K) \sin x.$$

Dosazením počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty K

$$0 = \left(e^{\frac{\pi}{2}} + K\right) \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow K = -e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Hledané řešení je tedy

$$y = \left(e^x - e^{\frac{\pi}{2}}\right) \sin x.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*
 $C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka*: odečetly se nám dva členy?
 (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek*:

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

146 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + y = 5e^{2x}$.

Řešení Video Teorie: 58-62 Příklady: 274-278 

Charakteristická rovnice $r^2 + 1 = 0$ má komplexní kořeny $r_1 = i$, $r_2 = -i$, takže fundamentální systém tvoří funkce $\sin x$ a $\cos x$, obecné řešení zkrácené rovnice bude

$$\hat{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Nyní provedeme variaci konstant a nalezneme příslušné partikulární integrály. Pro určení neznámých funkcí $C_1(x)$ a $C_2(x)$ vypočteme příslušné determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 5e^{2x} & \cos x \end{vmatrix} = -5e^{2x} \sin x, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 5e^{2x} \end{vmatrix} = 5e^{2x} \cos x.$$

Dále bude

$$C_1' = \frac{W_1(x)}{W(x)} = -5e^{2x} \sin x \Rightarrow C_1 = -5 \int e^{2x} \sin x dx = e^{2x}(\cos x - 2 \sin x) + K_1,$$

$$C_2' = \frac{W_2(x)}{W(x)} = 5e^{2x} \cos x \Rightarrow C_2 = 5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x}(2 \cos x + \sin x) + K_2.$$

Za C_1 a C_2 dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice

$$y = \left(e^{2x}(\cos x - 2 \sin x) + K_1 \right) \cos x + \left(e^{2x}(2 \cos x + \sin x) + K_2 \right) \sin x,$$

které nám po úpravě dá obecné řešení

$$y = K_1 \cos x + K_2 \sin x + e^{2x}.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

(metoda variace konstant)
 $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici
 $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$
- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu
- 1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice
- 2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice
- 3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

- vypočítáme Wronského determinanty

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ b & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & b \end{vmatrix}$$

- vypočítáme funkce

$$C_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx$$

- dosadíme $C_1(x)$ a $C_2(x)$ do obecného řešení zkrácené rovnice

147 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 6x^2 + 10x - 2$.

Řešení Video Teorie: 58-63 Příklady: 274-278 

Charakteristická rovnice $r^2 + 2r = 0$ má kořeny $r_1 = 0$, $r_2 = -2$, obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y}(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

Zkonstruujeme $\bar{r} = \lambda \pm i\omega = 0$. Protože $\bar{r} = 0$ je jednonásobným kořenem charakteristické rovnice, a na pravé straně je polynom 2. stupně, budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$v(x) = x(Ax^2 + Bx + C),$$

kde $A, B, C \in \mathbb{R}$ a příslušné derivace budou

$$v' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad v'' = 6Ax + 2B.$$

Provedeme dosazení v' a v'' do úplné LDR druhého řádu

$$\underbrace{6Ax + 2B}_{v''(x)} + 2 \underbrace{(3Ax^2 + 2Bx + C)}_{v'(x)} = 6x^2 + 10x - 2$$

a po úpravě dostaneme $6Ax^2 + (6A + 4B)x + 2B + 2C = 6x^2 + 10x - 2$.

Nyní porovnáme koeficienty u stejných mocnin x :

$$\left. \begin{array}{lcl} x^2 : & 6A & = 6 \\ x^1 : & 6A + 4B & = 10 \\ x^0 : & 2B + 2C & = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 1, B = 1 \text{ a } C = -2.$$

Partikulární řešení bude $v(x) = x(x^2 + x - 2)$ a obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + x(x^2 + x - 2).$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$
- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu
 1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice
 2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice
 3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

• podle pravé strany LDR druhého řádu $b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x))$, a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál $v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x))$, kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty
- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$

148 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 10y' + 24y = (3x - 1)e^{3x}$.

Řešení Video Teorie: 58-63 Příklady: 274-278 

Charakteristická rovnice $r^2 - 10r + 24 = 0$ má kořeny $r_1 = 4$, $r_2 = 6$, obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{6x}.$$

Zkonstruujeme $\bar{r} = \lambda \pm i\omega = 3$. Protože $\bar{r} = 3$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$v(x) = (Ax + B) e^{3x},$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$ a příslušné derivace budou

$$\begin{aligned} v' &= Ae^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x}, \\ v'' &= 6Ae^{3x} + 9e^{3x}(Ax + B). \end{aligned}$$

Provedeme dosazení v , v' a v'' do úplné LDR druhého řádu

$$\underbrace{6Ae^{3x} + 9e^{3x}(Ax + B)}_{v''(x)} - 10 \underbrace{(Ae^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x})}_{v'(x)} + 24 \underbrace{(Ax + B)e^{3x}}_{v(x)} = (3x - 1)e^{3x}$$

a po úpravě dostaneme

$$3Axe^{3x} + (-4A + 3B)e^{3x} = 3xe^{3x} - e^{3x}.$$

Nyní porovnáme koeficienty u výrazů xe^{3x} a e^{3x} na obou stranách rovnice

$$\left. \begin{aligned} xe^{3x}: \quad 3A &= 3 \\ e^{3x}: \quad -4A + 3B &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 1 \text{ a } B = 1.$$

Partikulární řešení bude $v(x) = (x + 1)e^{3x}$ a obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{6x} + (x + 1)e^{3x}.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$
- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu
 1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice
 2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice
 3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

• podle pravé strany LDR druhého řádu $b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x))$, a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál $v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x))$, kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty
- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$

149 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.

Řešení Video Teorie: 58-63 Příklady: 274-278 

Charakteristická rovnice $r^2 - 2r + 2 = 0$ má komplexní kořeny $r_1 = 1 + i$, $r_2 = 1 - i$, obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y}(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$$

Zkonstruujeme $\bar{r} = \lambda \pm i\omega = 1 \pm i$. Protože $\bar{r} = 1 \pm i$ jsou jednonásobné kořeny charakteristické rovnice, budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$v(x) = x e^x (A \sin x + B \cos x),$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$ a příslušné derivace budou

$$\begin{aligned} v' &= e^x (A \sin x + B \cos x) + x e^x (A \sin x + B \cos x) + x e^x (A \cos x - B \sin x), \\ v'' &= 2e^x ((A + B + Bx) \cos x - (A - B + Ax) \sin x). \end{aligned}$$

Provedeme dosazení v , v' a v'' do úplné LDR druhého řádu a po úpravě dostaneme

$$2Be^x \cos x - 2Ae^x \sin x = e^x \sin x.$$

Nyní porovnáme koeficienty u výrazů $e^x \cos x$ a $e^x \sin x$ na obou stranách rovnice

$$\left. \begin{array}{l} e^x \cos x : \quad 2B = 0 \\ e^x \sin x : \quad -2A = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \text{ a } B = 0.$$

Partikulární řešení bude $v(x) = -\frac{1}{2} x e^x \sin x$ a obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x - \frac{1}{2} x e^x \sin x.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$
- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu

1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice
2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice
3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

• podle pravé strany LDR druhého řádu $b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x))$, a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál $v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x))$, kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty
- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$

150 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 8y' + 16y = 32x \cos 4x$.

Řešení Video Teorie: 58-63 Příklady: 274-278 

Charakteristická rovnice $r^2 - 8r + 16 = 0$ má dvojnásobné kořeny $r_{1,2} = 4$ a obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Zkonstruujeme $\bar{r} = \lambda \pm i\omega = \pm i4$. Protože $\bar{r} = \pm i4$ nejsou kořeny charakteristické rovnice, budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$v(x) = (Ax + B) \cos 4x + (Cx + D) \sin 4x,$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ a příslušné derivace budou

$$\begin{aligned} v' &= (A + 4D) \cos 4x + 4Cx \cos 4x + (-4B + C) \sin 4x - 4Ax \sin 4x, \\ v'' &= (8C - 16B) \cos 4x - 16Ax \cos 4x + (-8A - 16D) \sin 4x - 16Cx \sin 4x. \end{aligned}$$

Provedeme dosazení v , v' a v'' do úplné LDR druhého řádu a po úpravě dostaneme

$$(-8A + 8C - 32D) \cos 4x + (-8A + 32B - 8C) \sin 4x - 32Cx \cos 4x + 32Ax \sin 4x = 32x \cos 4x.$$

Nyní porovnáme koeficienty u výrazů $\cos 4x$, $x \cos 4x$, $\sin 4x$ a $x \sin 4x$ na obou stranách rovnice

$$\left. \begin{array}{lcl} \cos 4x : & -8A & + 8C - 32D = 0 \\ \sin 4x : & -8A & + 32B - 8C = 0 \\ x \cos 4x : & & - 32C = 32 \\ x \sin 4x : & 32A & = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0, \quad B = -\frac{1}{4}, \\ C = -1, \quad D = -\frac{1}{4}. \end{array}$$

Partikulární řešení bude $v(x) = -\frac{1}{4} \cos 4x - x \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 4x$ a obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} - \frac{1}{4} \cos 4x - x \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 4x.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$
- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu

1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice
2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice
3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

• podle pravé strany LDR druhého řádu $b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x))$, a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál $v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x))$, kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty
- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$

Matematika II: Pracovní listy do cvičení

Radomír Paláček, Petra Schreiberová, Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Příklady – Integrální počet funkcí jedné proměnné

153 - Přímá metoda

Zadání Vyřešte:

$$\text{a) } \int \left(x^5 - 2x + \frac{x^2}{3} \right) dx \quad \text{b) } \int (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) dx \quad \text{c) } \int \frac{2x-1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{d) } \int \frac{3}{x} dx$$

Řešení

Video **Teorie:** 11, 12, 13 **Řešené příklady:** 66, 67, 68 

Tahák*Základní integrály*

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$
 $f = f(x) \quad g = g(x)$
13. $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$
14. $\int (k \cdot f) dx = k \int f dx, k \in \mathbb{R}$

154 - Přímá metoda

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{2}{x}(3 - xe^x)dx$

b) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$

c) $\int \left(\frac{2}{x^3} - 2\right)dx$

d) $\int (2^x - \cos x)dx$

Řešení

Video Teorie: 11, 12, 13 Řešené příklady: 66, 67, 68 

Tahák

Základní integrály

1. $\int 0dx = c$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

7. $\int \cos x dx = \sin x + c$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$

$$f = f(x) \quad g = g(x)$$

13. $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$

14. $\int (k \cdot f) dx = k \int f dx, k \in \mathbb{R}$

155 - Přímá metoda

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{x^2 e^x - 3x}{2x^2} dx$

b) $\int \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{x\sqrt{x}} dx$

c) $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx$

Řešení**Video** Teorie: **11, 12, 13** Řešené příklady: **66, 67, 68** **Tahák***Základní integrály*

1. $\int 0 dx = c$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

7. $\int \cos x dx = \sin x + c$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$

$f = f(x) \quad g = g(x)$

13. $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$

14. $\int (k \cdot f) dx = k \int f dx, k \in \mathbb{R}$

156 - Přímá metoda

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx$

b) $\int \frac{-4}{1+x^2} dx$

c) $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Řešení

Video Teorie: 11, 12, 13 Řešené příklady: 66, 67, 68 

Tahák

Základní integrály

1. $\int 0 dx = c$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

7. $\int \cos x dx = \sin x + c$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$

$$f = f(x) \quad g = g(x)$$

13. $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$

14. $\int (k \cdot f) dx = k \int f dx, k \in \mathbb{R}$

157 - Lineární substituce, obecné vzorce

Zadání Vyřešte:

a) $\int \sin(4x - 3) dx$

b) $\int \frac{1}{4 + x^2} dx$

c) $\int (2x - 5)^3 dx$

Řešení

Video **Teorie: 17** **Řešené příklady: 69** 

Tahák

Lineární substituce, obecné vzorce

1. $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$
2. $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n + 1} + c$
3. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$
4. $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$
5. $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
6. $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$
8. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$

158 - Lineární substituce, obecné vzorce

Zadání Vyřešte:

a) $\int e^{-6x} dx$

b) $\int \frac{dx}{-3x+8}$

c) $\int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx$

Řešení

Video **Teorie: 17** **Řešené příklady: 69** 

Tahák

Lineární substituce, obecné vzorce

1. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

2. $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$

3. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

4. $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$

5. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$

6. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$

8. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$

159 - Metoda per partes

Zadání Vyřešte:

a) $\int (x^2 - 3) \sin 2x dx$

b) $\int x e^{2x} dx$

c) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

Řešení

Video **Teorie: 14, 15** **Řešené příklady: 70, 71** 

Tahák

Metoda per partes

$$u = u(x) \quad v' = v'(x)$$

$$u' = u'(x) \quad v = v(x)$$

$$\int (u \cdot v') dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v) dx$$

160 - Metoda per partes

Zadání Vyřešte:

a) $\int (2x - 1) \ln x \, dx$

b) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

Řešení

Video **Teorie: 14, 15** **Řešené příklady: 70, 71** 

Tahák

Metoda per partes

$$u = u(x) \quad v' = v'(x)$$

$$u' = u'(x) \quad v = v(x)$$

$$\int (u \cdot v') dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v) dx$$

161 - Metoda per partes

Zadání Vyřešte:

a) $\int e^x \sin x \, dx$

b) $\int \cos(\ln x) \, dx$

Řešení

Video **Teorie: 14, 15** **Řešené příklady: 70, 71** 

Tahák

Metoda per partes

$$u = u(x) \quad v' = v'(x)$$

$$u' = u'(x) \quad v = v(x)$$

$$\int (u \cdot v') \, dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v) \, dx$$

Metoda per partes - obrat

$$\int f(x) \, dx = h(x) + \alpha \cdot \int f(x) \, dx, \quad \alpha \neq 1$$

$$\Rightarrow \int f(x) \, dx = \frac{h(x)}{1 - \alpha} + c$$

162 - Substituční metoda

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{\arctan x}}$

b) $\int e^x \cos(e^x) dx$

Řešení

Video **Teorie:** 16, 17 **Řešené příklady:** 72, 73 

Tahák

Substituce typu $\varphi(x) = t$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

Postup

1. označíme substituci $\varphi(x) = t$
2. rovnost diferencujeme: $\varphi'(x)dx = dt$
3. v integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ nahradíme za $\varphi(x)$ proměnnou t a za výraz $\varphi'(x)dx$ diferenciál dt
4. řešíme integrál $\int f(t)dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$

163 - Substituční metoda

Zadání Vyřešte:

a) $\int x \cot(1 + x^2) dx$

b) $\int \frac{(3 + \ln x)^5}{x} dx$

Řešení

Video **Teorie:** [16](#), [17](#) **Řešené příklady:** [72](#), [73](#) 

Tahák

Substituce typu $\varphi(x) = t$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

Postup

1. označíme substituci $\varphi(x) = t$
2. rovnost diferencujeme: $\varphi'(x)dx = dt$
3. v integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ nahradíme za $\varphi(x)$ proměnnou t a za výraz $\varphi'(x)dx$ diferenciál dt
4. řešíme integrál $\int f(t)dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$

164 - Substituční metoda

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} dx$

b) $\int x^2 e^{-x^3} dx$

Řešení

Video **Teorie:** 16, 17 **Řešené příklady:** 72, 73 

Tahák

Substituce typu $\varphi(x) = t$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

Postup

1. označíme substituci $\varphi(x) = t$
2. rovnost diferencujeme: $\varphi'(x)dx = dt$
3. v integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ nahradíme za $\varphi(x)$ proměnnou t a za výraz $\varphi'(x)dx$ diferenciál dt
4. řešíme integrál $\int f(t)dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$

165 - Substituční metoda

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

b) $\int \frac{\cot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Řešení

Video **Teorie: 18** **Řešené příklady: 74** 

Tahák

Substituce typu $x = \varphi(t)$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Postup

1. označíme substituci $x = \varphi(t)$
2. rovnost diferencujeme: $dx = \varphi'(t)dt$
3. v integrálu $\int f(x)dx$ nahradíme proměnou x funkcí $\varphi(t)$ a diferenciál dx výrazem $\varphi'(t)dt$
4. řešíme integrál $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ pro proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c$

166 - Substituční metoda + metoda per partes

Zadání Vyřešte:

a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

b) $\int \arctan x dx$

Řešení

Video **Teorie:** [14](#), [15](#), [16](#), [17](#) **Řešené příklady:** [71](#), [72](#), [73](#) 

Tahák

Metoda per partes

$$u = u(x) \quad v' = v'(x)$$

$$u' = u'(x) \quad v = v(x)$$

$$\int (u \cdot v') dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v) dx$$

Substituce typu $\varphi(x) = t$

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

Substituce typu $x = \varphi(t)$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

167 - Racionální lomená funkce

Zadání Vyjádřete racionální funkci $R(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 1}$ jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Řešení [Video](#) **Teorie: 19** **Řešené příklady: 75** 

Tahák

Racionální lomená funkce

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Ryze lomená racionální funkce

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m$$

Neryze lomená racionální funkce

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n \geq m$$

- každou neryze lomenou racionální funkci lze dělením upravit na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce

168 - Rozklad na parciální zlomky

Zadání Rozložte na parciální zlomky:

a) $R(x) = \frac{2x - 1}{x^3 - 4x}$

b) $R(x) = \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

Řešení

Video **Teorie: 19** **Řešené příklady: 75** 

Tahák

Parciální zlomky - 2 typy

1. $\frac{A}{(x - \alpha)^k}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}; A, \alpha \in \mathbb{R}$

2. $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}$

$M, N, p, q \in \mathbb{R}$, diskriminant $p^2 - 4q$ je záporný

- každou ryze lomenou racionální funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků

- počet zlomků odpovídá stupni polynomu ve jmenovateli

Postup

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli
2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu
3. celou rovnici rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli
4. nalezneme koeficienty rozkladu:
srovnávací metodou, dosazovací metodou
nebo kombinací těchto metod

Alternativa pro parciální zlomek druhého typu

$$\frac{B(2x + p) + C}{(x^2 + px + q)^k}, \quad B, C, p, q \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{N}$$

169 - Rozklad na parciální zlomky

Zadání Rozložte funkci $R(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}$ na parciální zlomky.

Řešení

Video **Teorie: 19** **Řešené příklady: 75** 

Tahák

Parciální zlomky - 2 typy

$$1. \frac{A}{(x-\alpha)^k}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}; A, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}$$

$M, N, p, q \in \mathbb{R}$, diskriminant $p^2 - 4q$ je záporný

- každou ryze lomenou racionální funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků

- počet zlomků odpovídá stupni polynomu ve jmenovateli

Postup

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli

2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu

3. celou rovnici rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli

4. nalezneme koeficienty rozkladu:
srovnávací metodou, dosazovací metodou
nebo kombinací těchto metod

Alternativa pro parciální zlomek druhého typu

$$\frac{B(2x+p)+C}{(x^2+px+q)^k}, \quad B, C, p, q \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{N}$$

170 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2-8x} dx$

b) $\int \frac{3x-8}{(x-4)(x-2)^2} dx$

Řešení

Video **Teorie: 20** **Řešené příklady: 76, 77, 78** 

Tahák

Integrace parciálních zlomků s reálnými kořeny ve jmenovateli

$$\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln |x-\alpha| + c$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + c,$$

$$k \geq 2$$

171 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{3x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$

b) $\int \frac{3x^2 + 4x + 33}{(x^2 + 9)(3 - x)} dx$

Řešení

Video **Teorie: 20** **Řešené příklady: 76, 77, 78** 

Tahák

Integrace parciálních zlomků s komplexními kořeny ve jmenovateli

$$\int \frac{B(2x + p)}{x^2 + px + q} dx = B \ln |x^2 + px + q| + c$$

$$\int \frac{C}{x^2 + px + q} dx = \frac{C}{a} \arctan \frac{x + p/2}{a} + c,$$

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

172 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{x^3}{x^3 + x} dx$

b) $\int \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^3(x + 1)} dx$

Řešení

Video **Teorie: 20** **Řešené příklady: 76, 77, 78** 

Tahák

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + c$$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx = \frac{A}{(1 - k)(x - \alpha)^{k-1}} + c, \quad k \geq 2$$

$$\int \frac{B(2x + p)}{x^2 + px + q} dx = B \ln |x^2 + px + q| + c$$

$$\int \frac{C}{x^2 + px + q} dx = \frac{C}{a} \arctan \frac{x + p/2}{a} + c,$$

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

173 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vyřešte:

a) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

b) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

Řešení

Video **Teorie: 21** **Řešené příklady: 79, 80, 81, 82** 

Tahák

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$,
kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. m je liché $\Rightarrow$ substituce $\cos x = t$

2. n je liché $\Rightarrow$ substituce $\sin x = t$

3. m i n sudé, alespoň jedno záporné
 $\Rightarrow$ substituce $\tan x = t$, pak

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

4. m i n sudé nezáporné
 $\Rightarrow$ využití vzorců na dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

174 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

b) $\int \cos^4 x dx$

Řešení

Video Teorie: **21** Řešené příklady: **79, 80, 81, 82** 

Tahák

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$,
kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. m je liché $\Rightarrow$ substituce $\cos x = t$

2. n je liché $\Rightarrow$ substituce $\sin x = t$

3. m i n sudé, alespoň jedno záporné
 $\Rightarrow$ substituce $\tan x = t$, pak

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

4. m i n sudé nezáporné
 $\Rightarrow$ využití vzorců na dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

175 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{1}{2 \sin x + 1} dx$

b) $\int \frac{1}{1 + \cos x + \sin x} dx$

Řešení

Video **Teorie: 22** **Řešené příklady: 83, 84** 

Tahák

Výpočet integrálů typu $\int R(\sin x, \cos x) dx$,
kde $R(u, v)$ představuje racionální funkci
dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$

Univerzální substituce

$$\tan \frac{x}{2} = t, x \in (-\pi, \pi)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

176 - Integrace iracionálních funkcí

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x+5}} dx$

b) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt{x^5}} dx$

Řešení

Video **Teorie: 18** **Řešené příklady: 85, 86, 87** 

Tahák

Iracionální funkce integrujeme většinou substituční metodou.

a) integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax+b}$
 $\Rightarrow$ substituce $ax+b = t^n$

b) integrand obsahuje více odmocnin s různými odmocniteli $\sqrt[n_1]{ax+b}$, $\sqrt[n_2]{ax+b}$, ...
 $\Rightarrow$ substituce $ax+b = t^n$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, \dots$

c) integrand obsahuje výraz $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$
 $\Rightarrow$ goniometrická substituce $bx = a \sin t$
nebo $bx = a \cos t$

177 - Integrace iracionálních funkcí

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$

b) $\int \sqrt{4-x^2} dx$

Řešení

Video **Teorie: 18** **Řešené příklady: 85, 86, 87** 

Tahák

Iracionální funkce integrujeme většinou substituční metodou.

a) integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax+b}$
 $\Rightarrow$ substituce $ax+b = t^n$

b) integrand obsahuje více odmocnin s různými odmocniteli $\sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \dots$
 $\Rightarrow$ substituce $ax+b = t^n$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, \dots$

c) integrand obsahuje výraz $\sqrt{a^2-b^2x^2}$
 $\Rightarrow$ goniometrická substituce $bx = a \sin t$
nebo $bx = a \cos t$

178 - Neurčitý integrál

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2} dx$

b) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$

Řešení

Video



179 - Neurčitý integrál

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x+5}} dx$

b) $\int \frac{x^4+1}{x^3-5x^2+6x} dx$

Řešení

Video 

180 - Neurčitý integrál

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1 + 2 \cos x}} dx$

b) $\int 2xe^{x+1} dx$

Řešení

Video 

181 - Neurčitý integrál

Zadání Vyřešte:

a) $\int \frac{dx}{\sin x}$

b) $\int \frac{\ln^2 x + 3 \ln x - 8}{x} dx$

Řešení

Video 

182 - Určitý integrál, výpočet a vlastnosti

Zadání Vyřešte:

a) $\int_1^2 (3x^2 + 1)dx$

b) $\int_0^1 (3 - x^2)^2 dx$

c) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx$

Řešení

Video **Teorie: 24** **Řešené příklady: 88** 

Tahák

Newtonova-Leibnizova formule

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Vlastnosti

$$f = f(x) \quad g = g(x)$$

a) $\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b fdx + \int_a^b gdx$

b) $\int_a^b c fdx = c \int_a^b fdx$

183 - Určitý integrál sudé a liché funkce

Zadání Vyřešte:

a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + \cos x) dx$

b) $\int_{-1}^1 \frac{5x}{2x^2 + 1} dx$

c) $\int_{-2}^2 2 dx$

Řešení

Video **Teorie: 25** **Řešené příklady: 89** 

Tahák

Výpočet integrálu sudé a liché funkce

a) sudá funkce: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

b) lichá funkce: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

184 - Metoda per partes pro určité integrály

Zadání Vyřešte:

a) $\int_0^1 (x+2)e^x dx$

b) $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$

Řešení

Video **Teorie: 26** **Řešené příklady: 90** 

Tahák

Metoda per partes pro určitý integrál

$$u = u(x) \quad v' = v'(x)$$

$$u' = u'(x) \quad v = v(x)$$

$$\int_a^b (u \cdot v') dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b (u' \cdot v) dx$$

185 - Substituční metoda pro určité integrály

Zadání Vyřešte:

a) $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\cos x} dx$

Řešení

Video **Teorie: 26** **Řešené příklady: 91, 92** 

Tahák

Substituční metoda

$$\int_a^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt$$

Po zavedení vhodné substituce musíme určit nové meze.

186 - Substituční metoda + metoda per partes

Zadání Vyřešte:

a) $\int_1^3 x \ln(x^2 + 2) dx$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin 2x dx$

Řešení**Video** **Teorie: 26** **Řešené příklady: 91, 92** **Tahák***Metoda per partes pro určitý integrál*

$$\begin{aligned} u &= u(x) & v' &= v'(x) \\ u' &= u'(x) & v &= v(x) \end{aligned}$$

$$\int_a^b (u \cdot v') dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b (u' \cdot v) dx$$

Substituční metoda

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt$$

Po zavedení vhodné substituce musíme určit nové meze.

187 - Určitý integrál racionální lomené funkce

Zadání Vyřešte:

a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+2}{x(x^2+1)} dx$

b) $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3(x+1)} dx$

Řešení

Video **Řešené příklady: 93** 

Tahák

Integrace parciálních zlomků

$$\int_a^b \frac{A}{x-\alpha} dx = A \cdot [\ln|x-\alpha|]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx = \left[\frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} \right]_a^b, \\ k \geq 2$$

$$\int_a^b \frac{B(2x+p)}{x^2+px+q} dx = B \cdot [\ln|x^2+px+q|]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{C}{x^2+px+q} dx = \frac{C}{m} \cdot \left[\arctan \frac{x+p/2}{m} \right]_a^b,$$

$$m = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

188 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

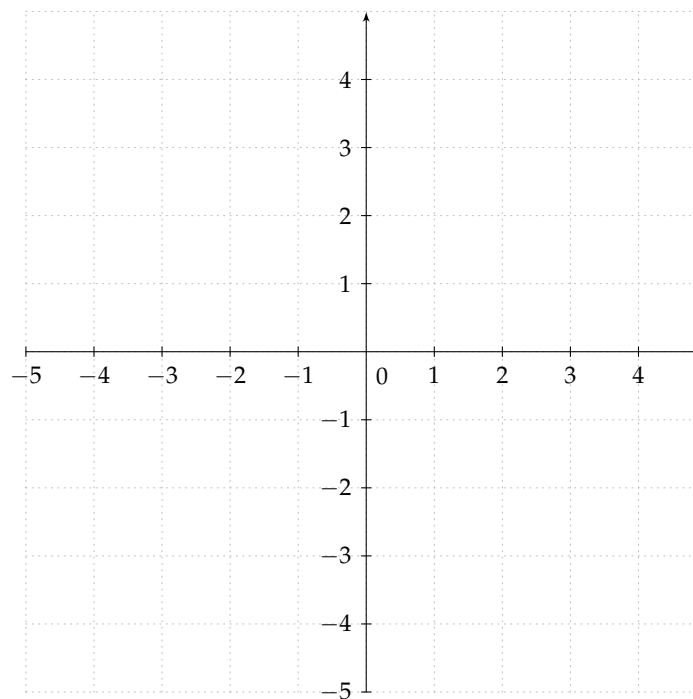
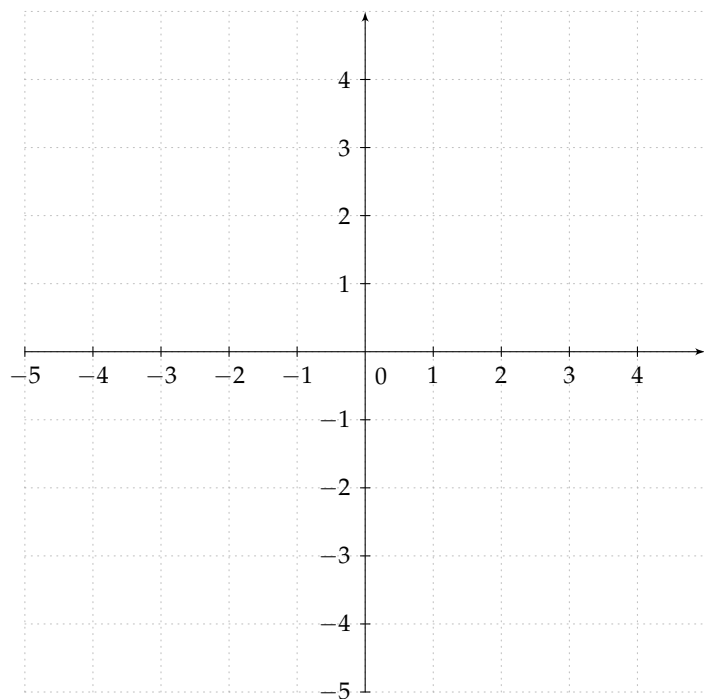
Zadání Znázorněte graf funkce $y = \ln \frac{x}{2}$ a vypočítejte obsah plochy ohraničené touto funkcí, osou x a přímkami:

a) $x = \frac{1}{2}$ a $x = \frac{3}{2}$

b) $x = 2$ a $x = 4$

Řešení

Video Teorie: 27 Řešené příklady: 94, 95 



Tahák

Obsah křivočarého lichoběžníka pro nezápornou funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

Obsah křivočarého lichoběžníka pro nekladnou funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

$$P = - \int_a^b f(x) dx$$

189 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

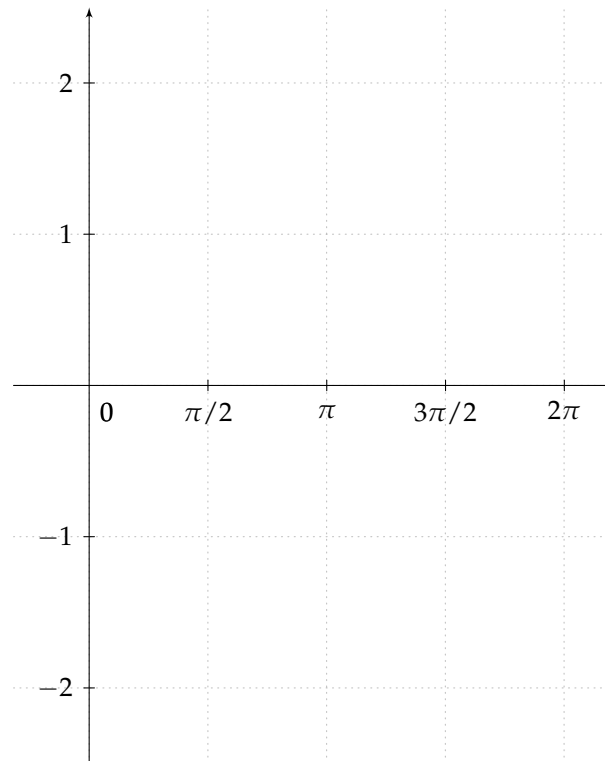
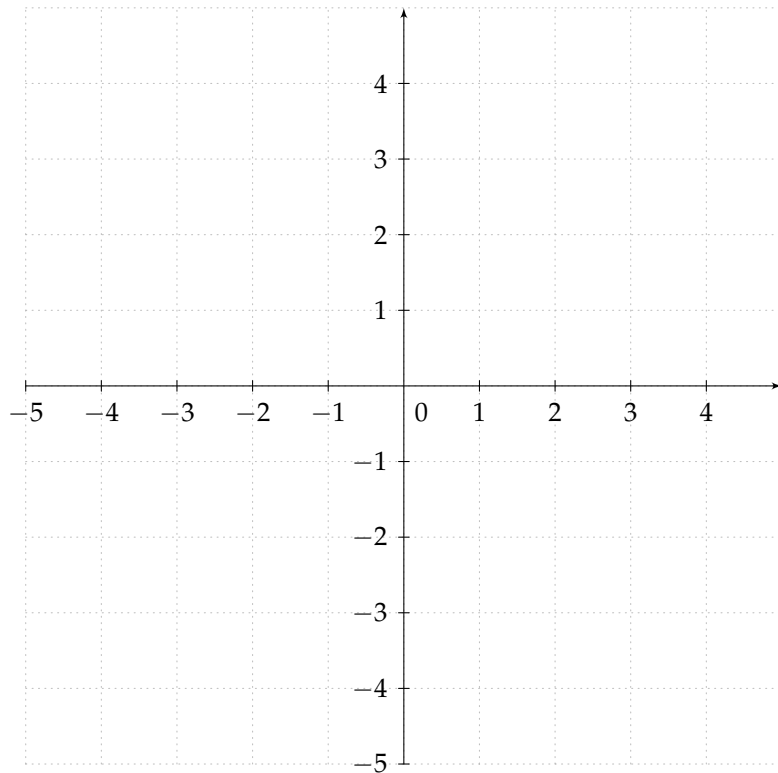
Zadání Vypočtete obsah útvaru (daný útvar znázorněte) ohraničeného osou x a:

a) funkcí $y = x^2 - 3$ a přímkami: $x = -2$, $x = 2$.

b) jednou kladnou vlnou funkce $y = \sin x$.

Řešení

Video **Teorie: 27** **Řešené příklady: 96** 



Tahák

Pokud funkce mění znaménko, je nutno brát části nad osou x kladně a části pod osou x záporně.

Obsah křivočarého lichoběžníka

$$P = \int_a^b |f(x)| dx$$

Poznámka:

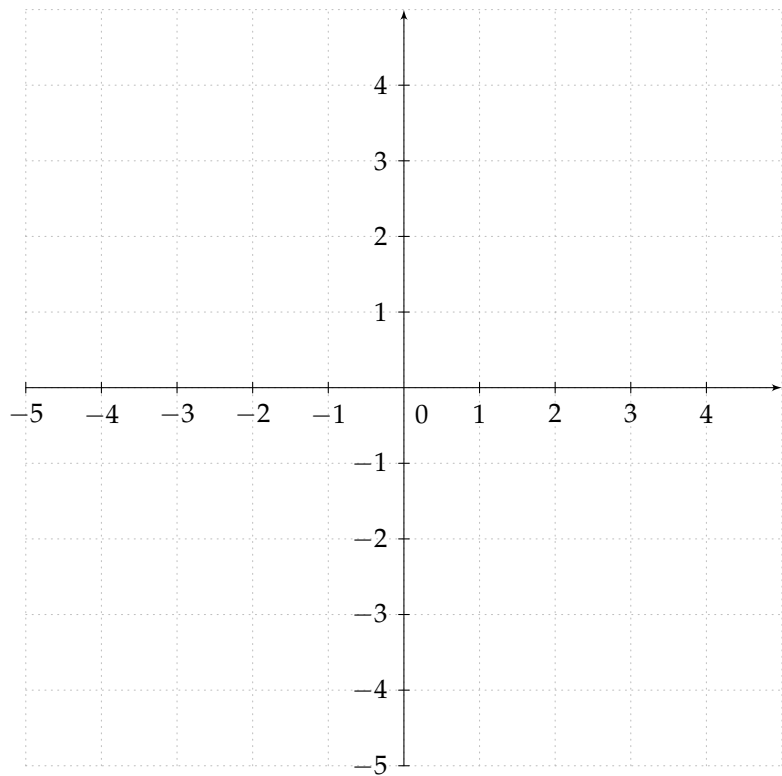
ve druhém obrázku je osa y k ose x v poměru 2 : 1.

190 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Vypočtěte obsah rovinného obrazce (danou plochu znázorněte) ohraničeného křivkami $y = e^x$, $y = e^{-x}$ a $x = 1$.

Řešení

Video **Teorie: 28** **Řešené příklady: 97** 



Tahák

Obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného dvěma funkcemi

pokud platí:

$$f(x) \geq g(x) \text{ na } \langle a, b \rangle$$

$$\Rightarrow P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

kde a, b jsou průsečíky funkcí,

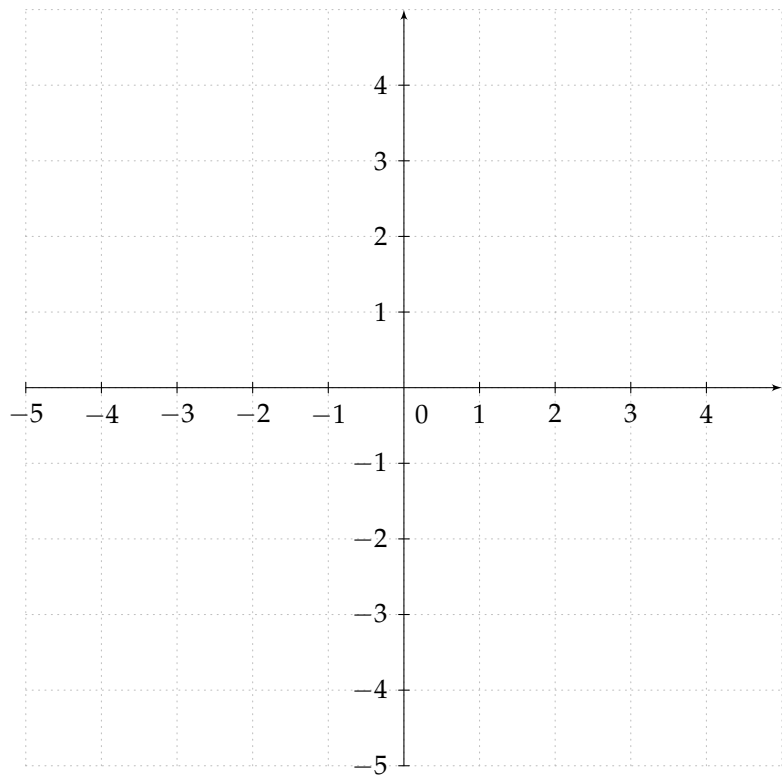
tzp. řešíme rovnici $f(x) = g(x)$

191 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Vypočtete obsah rovinného obrazce (danou plochu znázorněte) ohraničeného křivkami $y = x^2 + 1$, $y = 2x^2 - 3$.

Řešení

Video **Teorie: 28** **Řešené příklady: 97** 



Tahák

Obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného dvěma funkcemi

pokud platí:

$$f(x) \geq g(x) \text{ na } \langle a, b \rangle$$

$$\Rightarrow P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

kde a, b jsou průsečíky funkcí,

tzn. řešíme rovnici $f(x) = g(x)$

192 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a křivkou zadanou parametrickými rovnicemi

$$x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3, \text{ kde } t \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Řešení

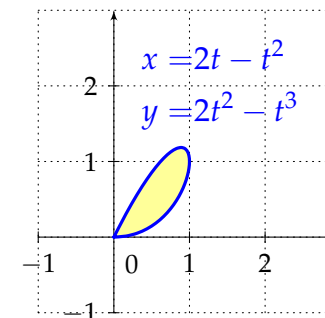
Video **Teorie: 28** **Řešené příklady: 98** 

Tahák

Obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného funkcí danou parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t) \text{ a } y = \psi(t), \text{ kde } t \in \langle \alpha; \beta \rangle$$

$$\Rightarrow P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt \right|$$

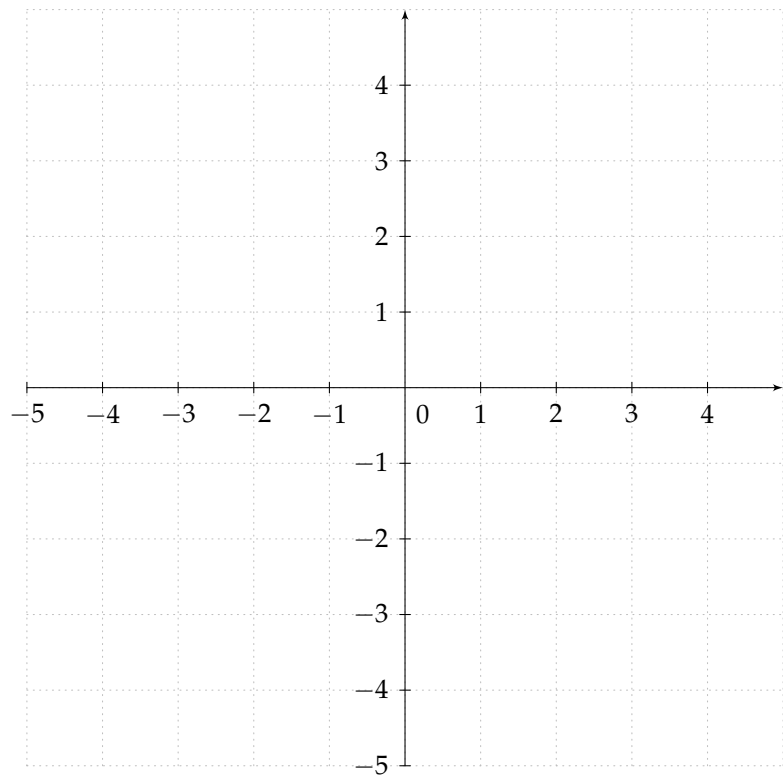


193 - Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky

Zadání Vypočtěte délku křivky $y^2 = x^3$ na $\langle 0, 2 \rangle$.

Řešení

Video **Teorie: 29** **Řešené příklady: 99, 100** 



Tahák

Délka oblouku křivky na $\langle a; b \rangle$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

194 - Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky

Zadání Vypočtěte délku křivky $y = \ln \sin x$ pro $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Řešení

Video

Teorie: 29 Řešené příklady: 99, 100



Tahák

Délka oblouku křivky na $\langle a; b \rangle$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

195 - Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky

Zadání Vypočtěte velikost dráhy, kterou urazí bod od $t = 0$ do $t = 2$ při pohybu po křivce dané parametrickými rovnicemi $x = t^3$, $y = 5t^2$.

Řešení

Video

Teorie: 29 Řešené příklady: 99, 100



Tahák

Délka oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$

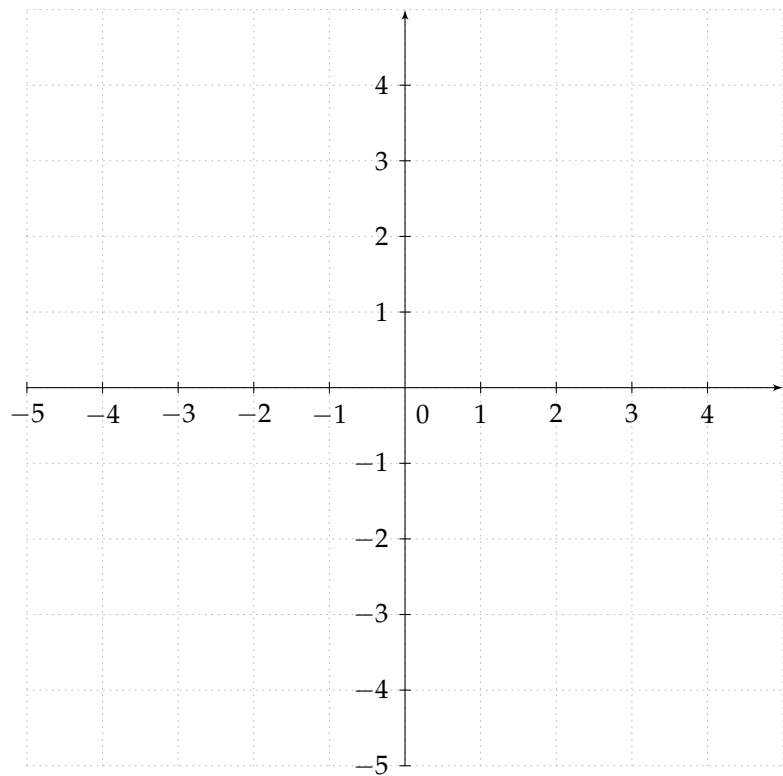
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2} dt$$

196 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

Zadání Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací oblastí ohraničené funkcí $y = \sqrt{2x - 3}$ v $\langle 2, 3 \rangle$ kolem osy x .

Řešení

Video Teorie: **30** Řešené příklady: **101, 102, 103** 



Tahák

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

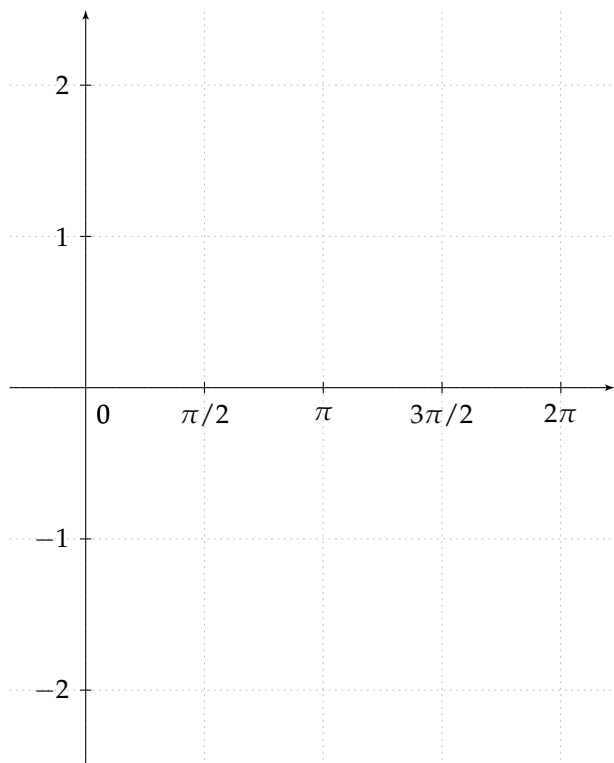
$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

197 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

Zadání Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = 2|\sin x|, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, kolem osy x .

Řešení

Video **Teorie: 30** **Řešené příklady: 101, 102, 103** 



Tahák

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

Poznámka:

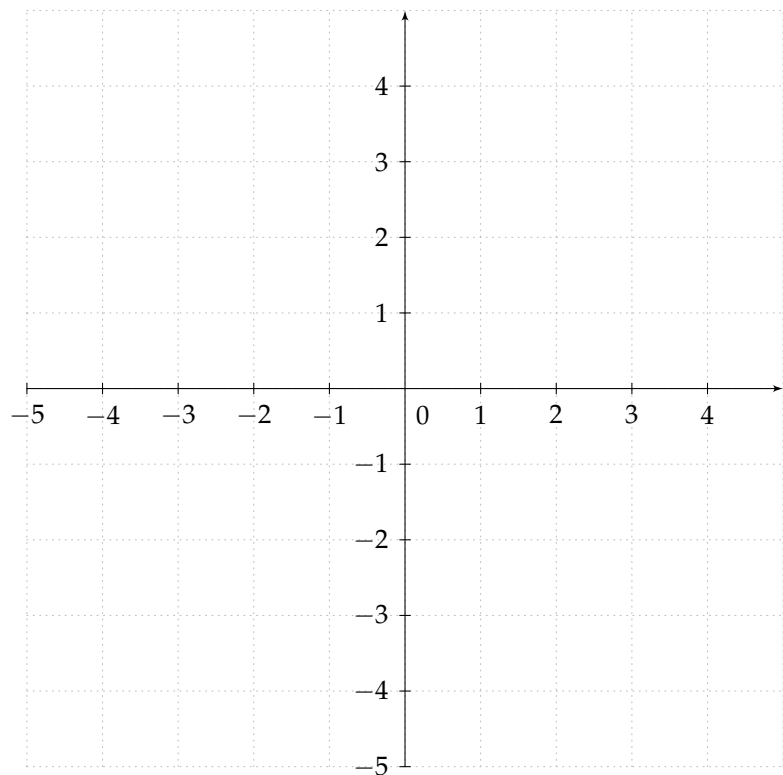
osa y k ose x je v poměru 2 : 1

198 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

Zadání Vypočtete objem tělesa, vzniklého rotací oblasti (oblast načrtněte) ohraničené funkcemi $y = x^2$, $y^2 = x$, kolem osy x .

Řešení

Video Teorie: **30** Řešené příklady: **101, 102, 103** 



Tahák

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

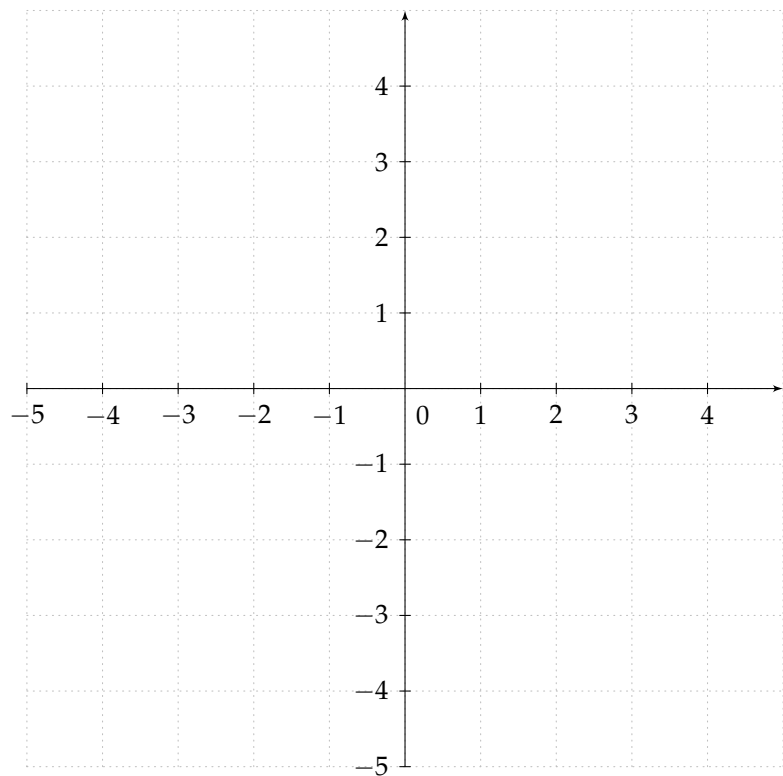
$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

199 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

Zadání Vypočtete objem tělesa, vzniklého rotací oblasti (oblast načrtněte) ohraničené funkcemi $y = e^x$, $y = x + 2$, $x = -1$, $x = 1$, kolem osy x .

Řešení

Video Teorie: **30** Řešené příklady: **101, 102, 103** 



Tahák

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

200 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

Zadání Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací parametricky zadané funkce $x = \frac{1-t}{1+t}$, $y = \frac{1}{1+t}$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$, kolem osy x .

Řešení

Video **Teorie: 30** **Řešené příklady: 101, 102, 103** 

Tahák

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) |\dot{\phi}(t)| dt$$

201 - Užití určitého integrálu, obsah rotační plochy

Zadání Vypočtěte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = \sqrt{x}$ kolem osy x pro $x \in \langle 1, 4 \rangle$.

Řešení

Video **Teorie: 31** **Řešené příklady: 104, 105** 

Tahák

Obsah rotační plochy

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$f(x) \geq 0$$

202 - Užití určitého integrálu, obsah rotační plochy

Zadání Vypočtěte povrch tělesa vzniklého rotací parametricky zadané funkce $x = a \sin 2t$, $y = 2a \sin^2 t$, kde $t \in \langle 0, \pi \rangle$, kolem osy x .

Řešení

Video **Teorie: 31** **Řešené příklady: 104, 105** 

Tahák

Obsah rotační plochy

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2} dt$$

$$\psi(t) \geq 0$$

Příklady – Funkce dvou proměnných

204 - Definiční obor

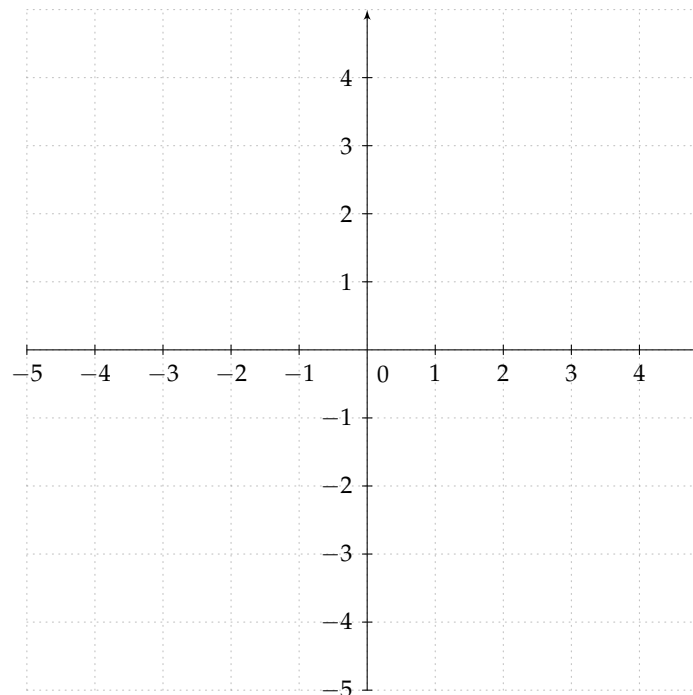
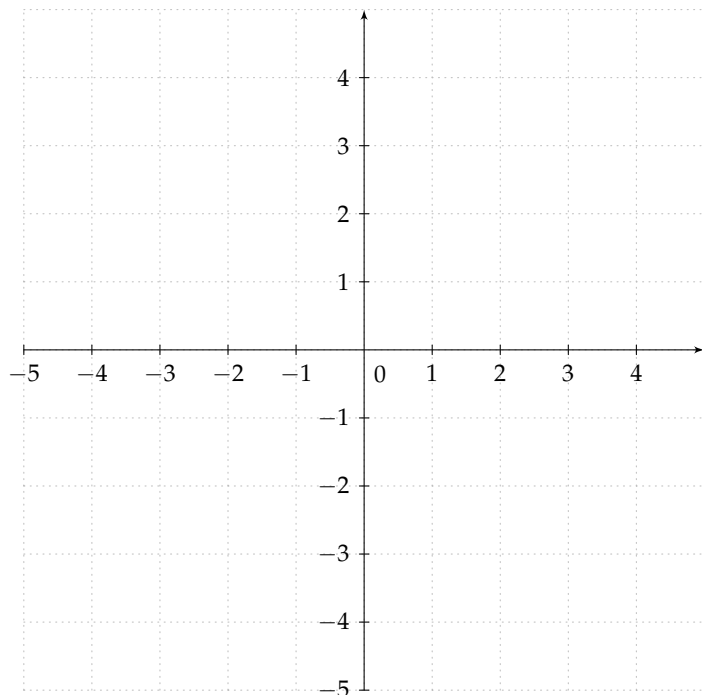
Zadání Nalezněte definiční obor funkce:

a) $z = \frac{x - y + 8}{x + y - 2}$

b) $z = \sqrt{2x + y}$

Řešení

Video Teorie: 33 Řešené příklady: 107, 108 



Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je
nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

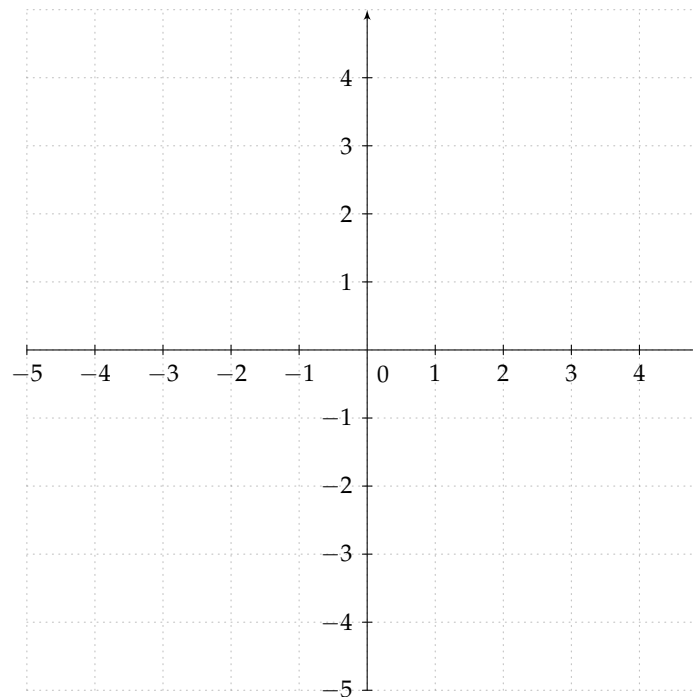
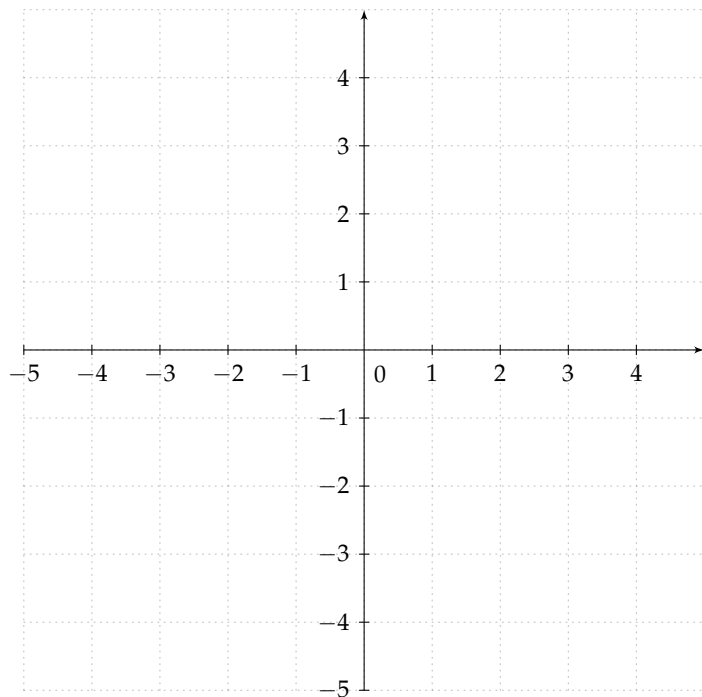
Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

205 - Definiční obor

Zadání Nalezněte definiční obor funkce:

a) $z = \sqrt{y^2 - 1}$

b) $z = \frac{x + 2y}{\sqrt{y^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 1}$

Řešení**Video** Teorie: 33 Řešené příklady: 107, 108 **Tahák***Zlomek*

jmenovatel je různý od 0

*Sudá odmocnina*výraz pod odmocninou je
nezáporný*Logaritmus*

argument je kladný

*Tangens*argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$ *Kotangens*argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$ *Arkussinus, arkuskosinus*argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

206 - Definiční obor

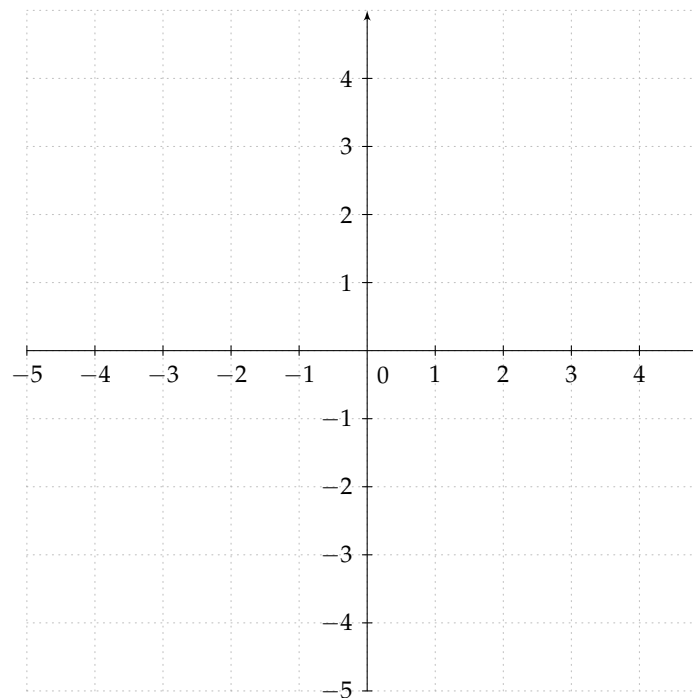
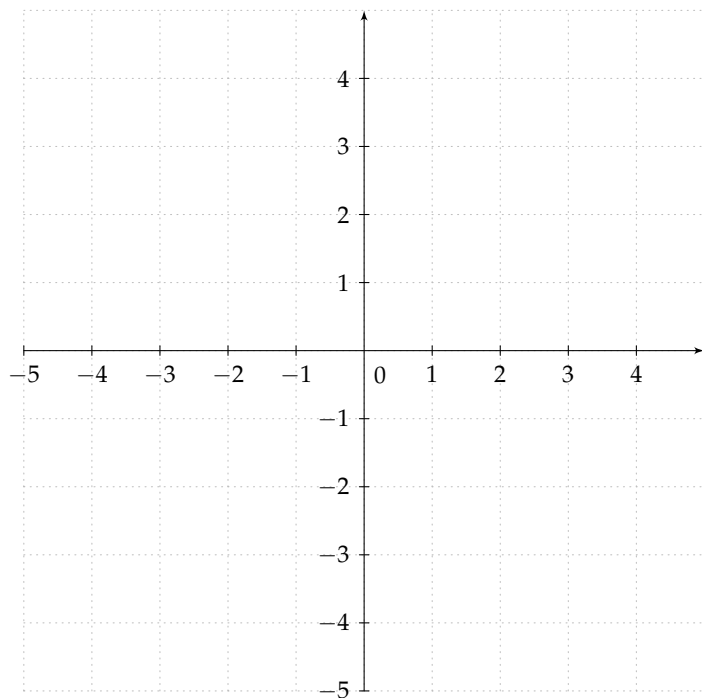
Zadání Nalezněte definiční obor funkce:

a) $z = \ln x + \ln y$

b) $z = \ln(y(x+2))$

Řešení

Video Teorie: 33 Řešené příklady: 107, 108 



Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je
nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

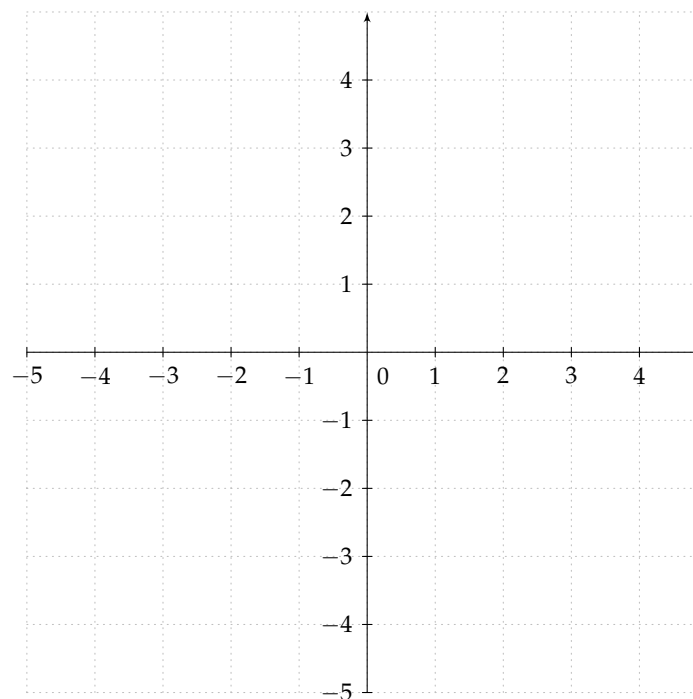
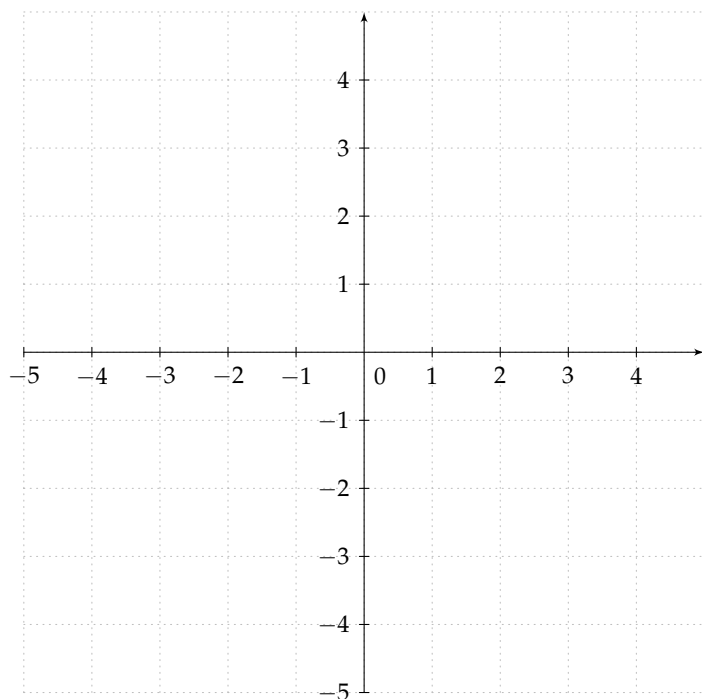
Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

207 - Definiční obor

Zadání Nalezněte definiční obor funkce:

a) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

b) $z = \frac{1}{\arcsin x \arccos x}$

Řešení**Video** Teorie: 33 Řešené příklady: 107, 108 **Tahák***Zlomek*

jmenovatel je různý od 0

*Sudá odmocnina*výraz pod odmocninou je
nezáporný*Logaritmus*

argument je kladný

*Tangens*argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$ *Kotangens*argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$ *Arkussinus, arkuskosinus*argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

208 - Definiční obor

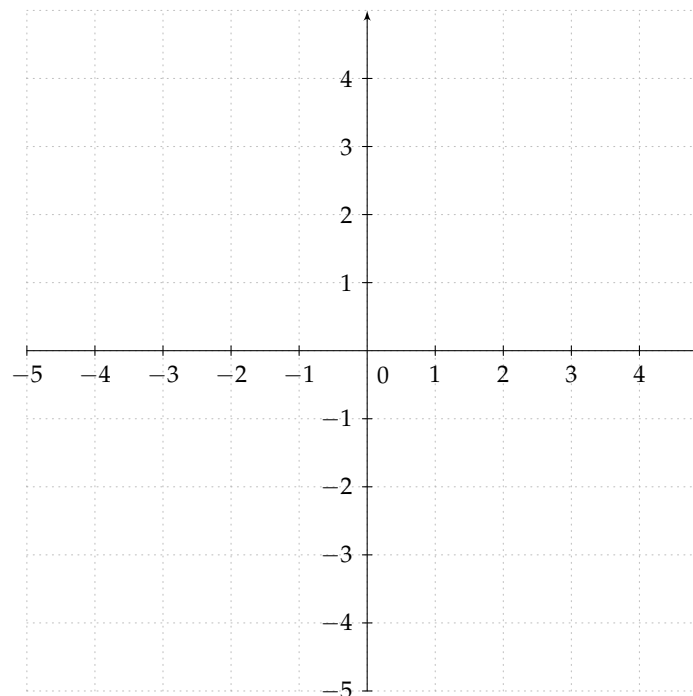
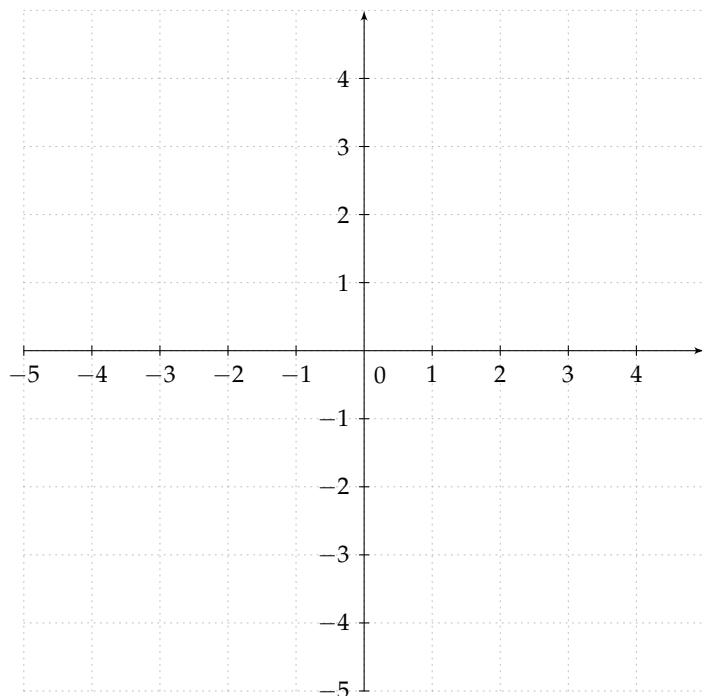
Zadání Nalezněte definiční obor funkce:

a) $z = \ln(xy - 4)$

b) $z = \sqrt{\frac{y - x^2}{x^3 - y}}$

Řešení

Video Teorie: 33 Řešené příklady: 107, 108 



Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je
nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

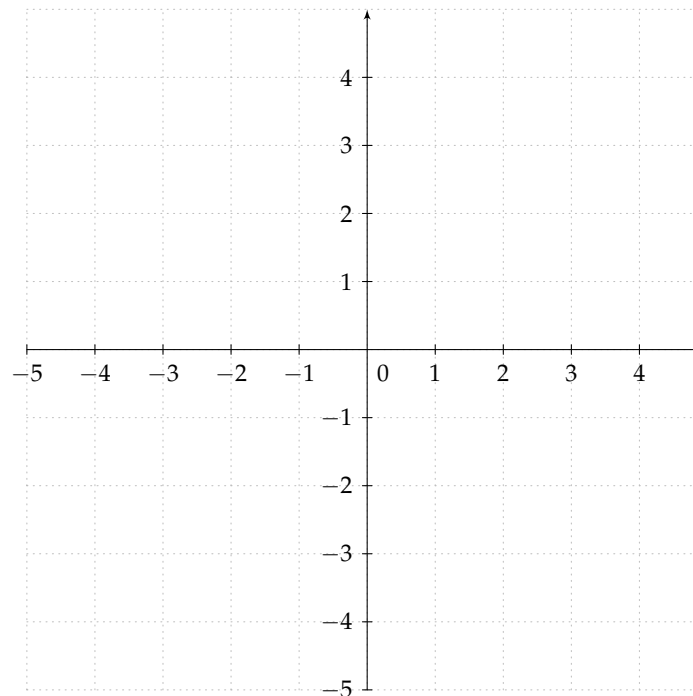
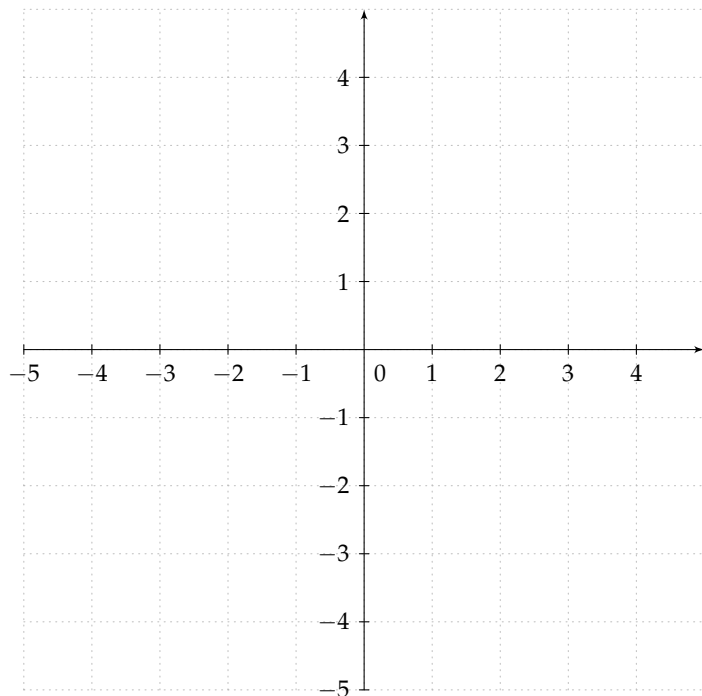
Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

209 - Definiční obor

Zadání Nalezněte definiční obor funkce:

a) $z = \arccos\left(2x^2 + \frac{2y^2}{9} - 1\right)$

b) $z = \sqrt{\cos(x - y)}$

Řešení**Video** Teorie: 33 Řešené příklady: 107, 108 **Tahák***Zlomek*

jmenovatel je různý od 0

*Sudá odmocnina*výraz pod odmocninou je
nezáporný*Logaritmus*

argument je kladný

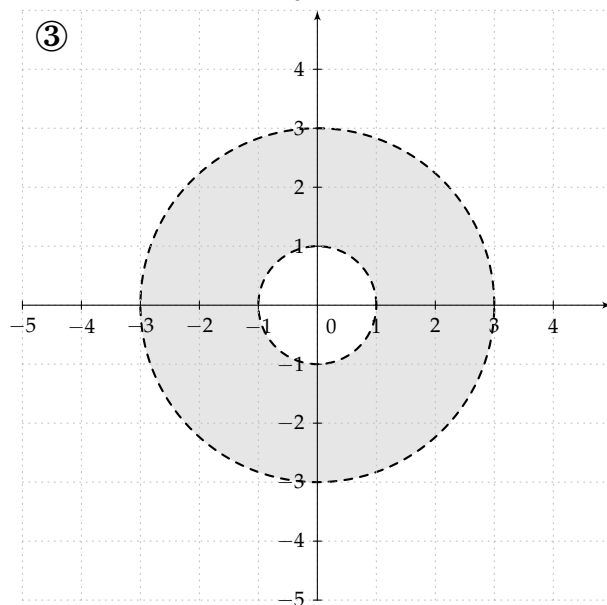
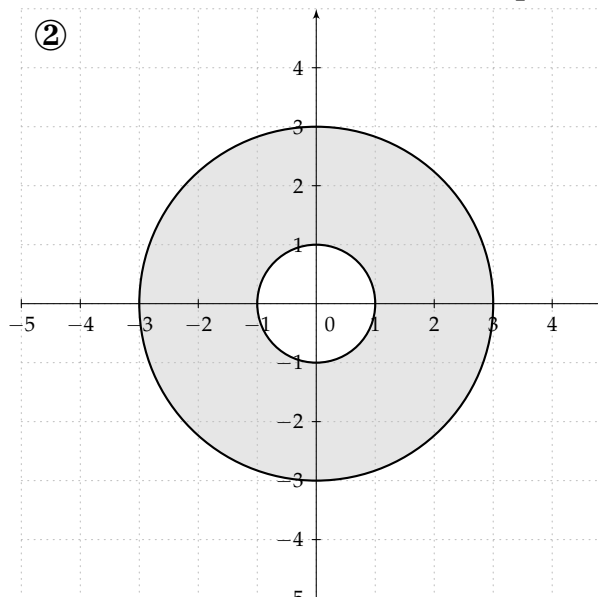
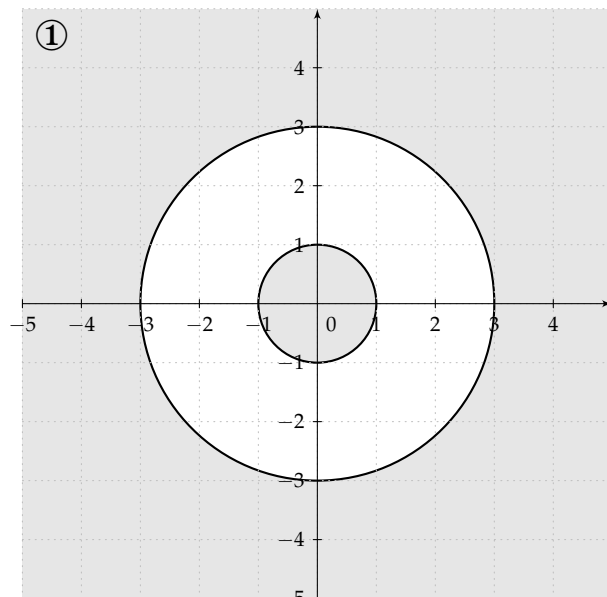
*Tangens*argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$ *Kotangens*argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$ *Arkussinus, arkuskosinus*argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

210 - Definiční obor

Zadání Rozhodněte, který definiční obor odpovídá funkci $z = \arcsin \frac{x^2 + y^2 - 5}{4}$.

Řešení

Video Teorie: 33 Řešené příklady: 107, 108 



Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je
nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

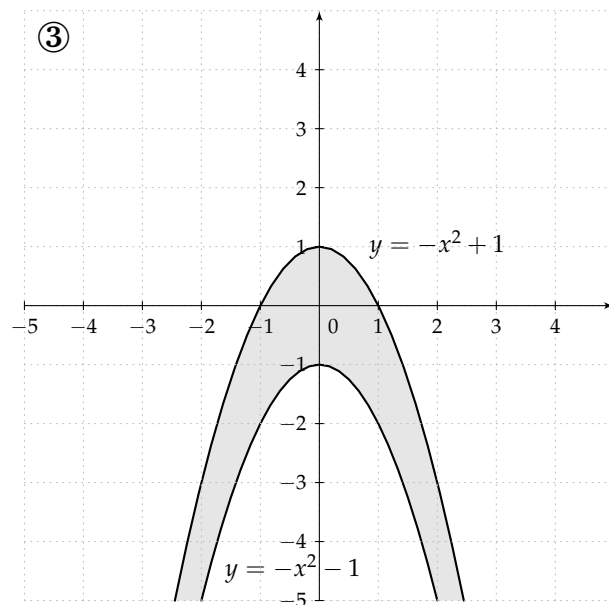
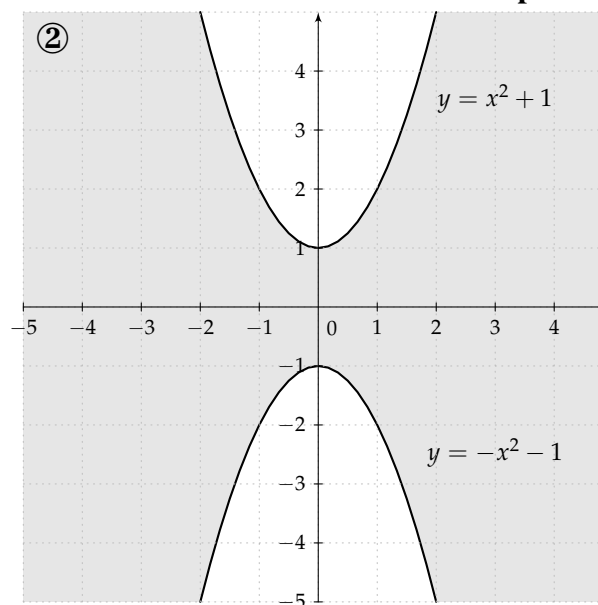
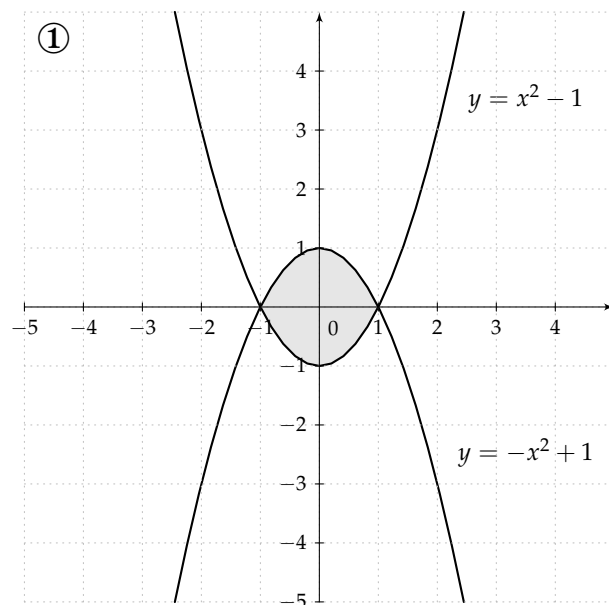
Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

211 - Definiční obor

Zadání Rozhodněte, který definiční obor odpovídá funkci $z = \sqrt{1 - x^2 + y} + \sqrt{1 - x^2 - y}$.

Řešení

Video Teorie: 33 Řešené příklady: 107, 108 



Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je
nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

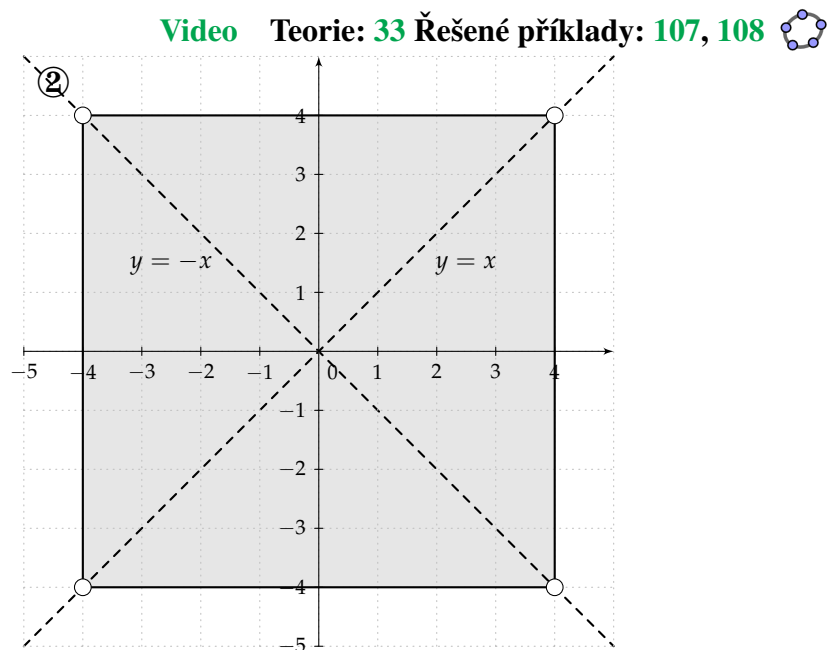
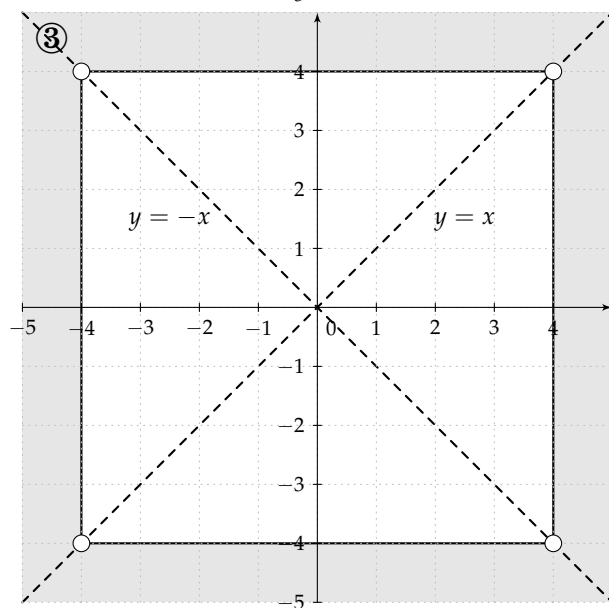
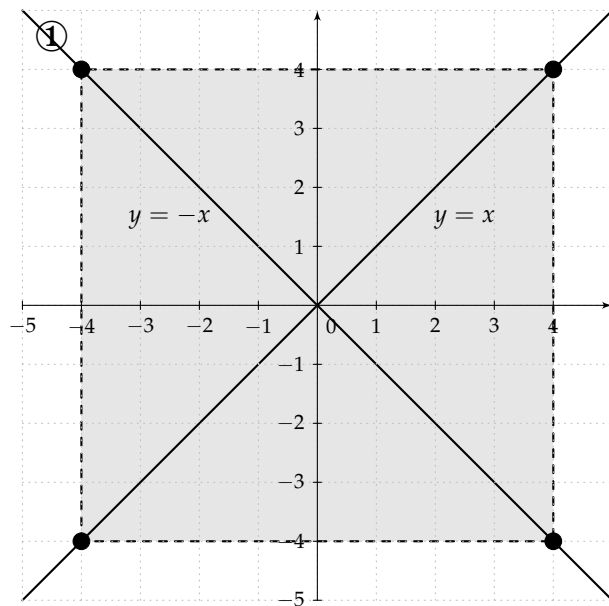
Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

212 - Definiční obor

Zadání Rozhodněte, který definiční obor odpovídá funkci $z = \frac{1}{x^2 - y^2} + \arcsin \frac{x}{4} + \sqrt{16 - y^2}$.

Řešení



Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je
nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

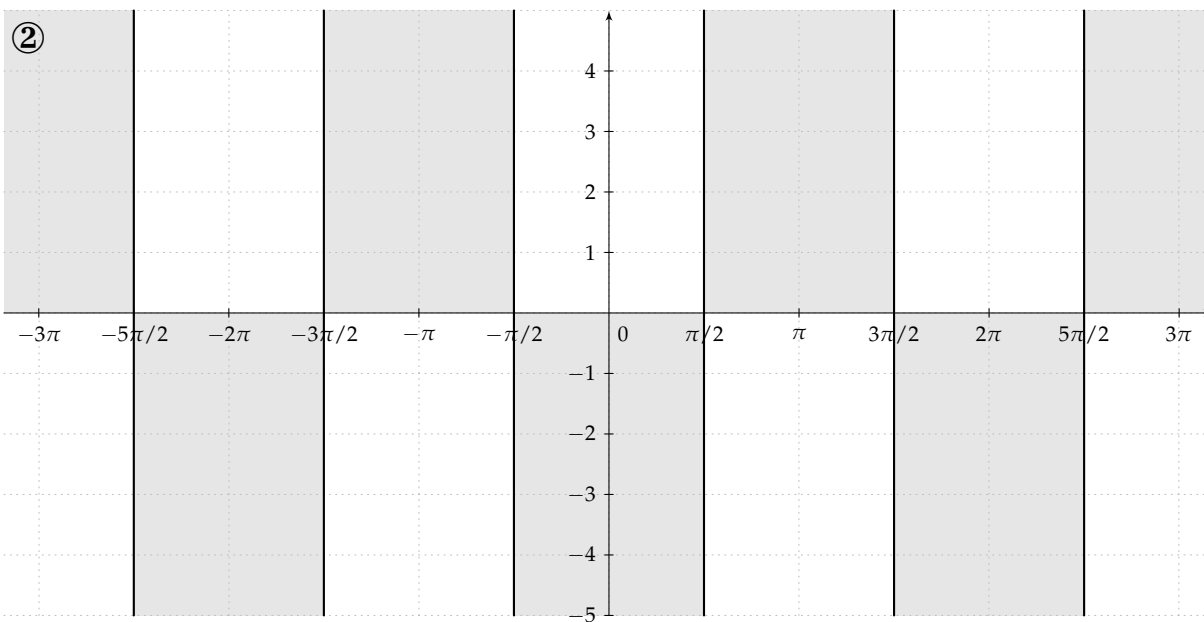
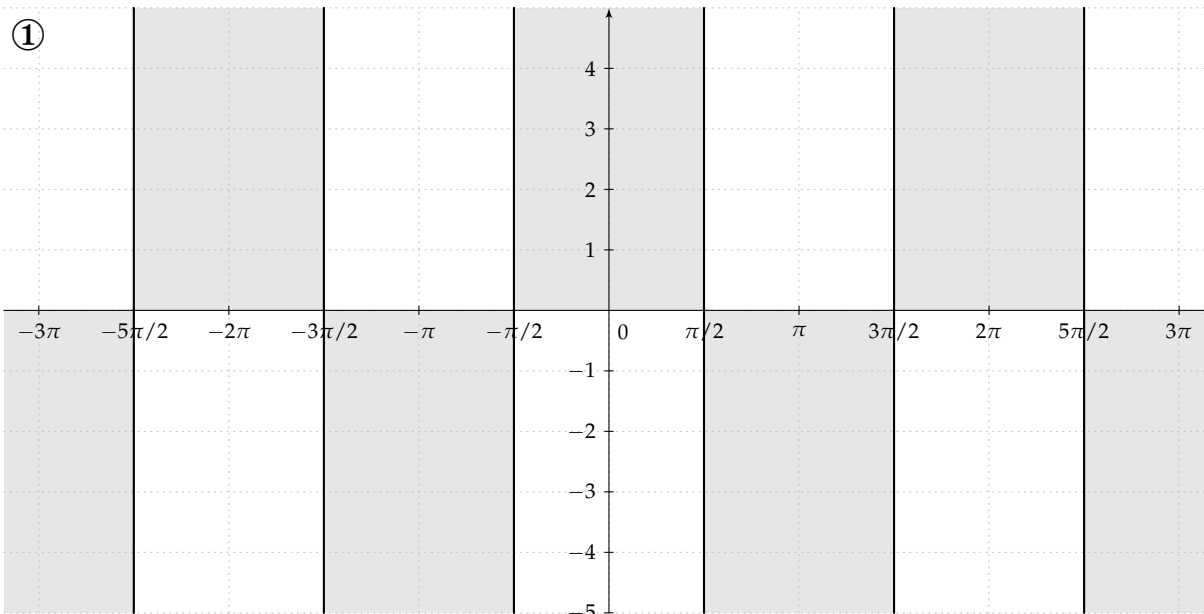
Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

213 - Definiční obor

Zadání Rozhodněte, který definiční obor odpovídá funkci $z = \sqrt{y \cos x}$.

Řešení

Video Teorie: 33 Řešené příklady: 107, 108 



Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je
nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

214 - Vrstevnicový graf

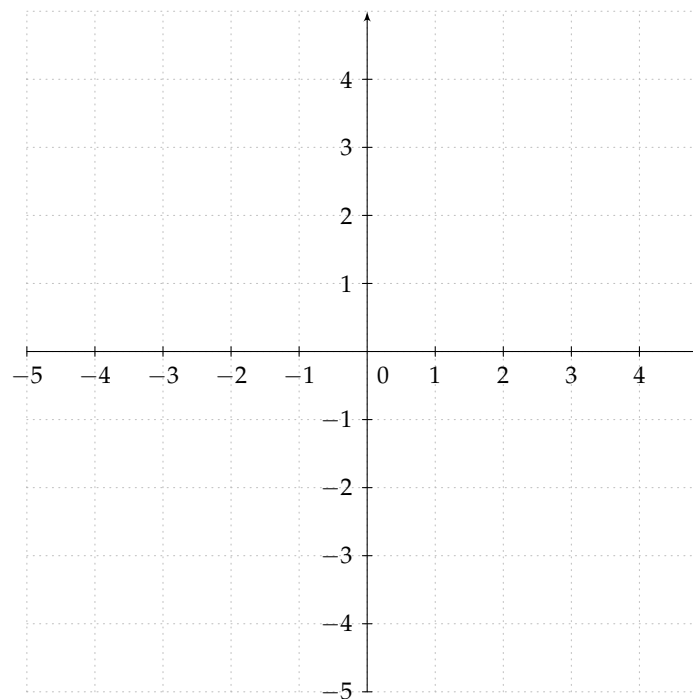
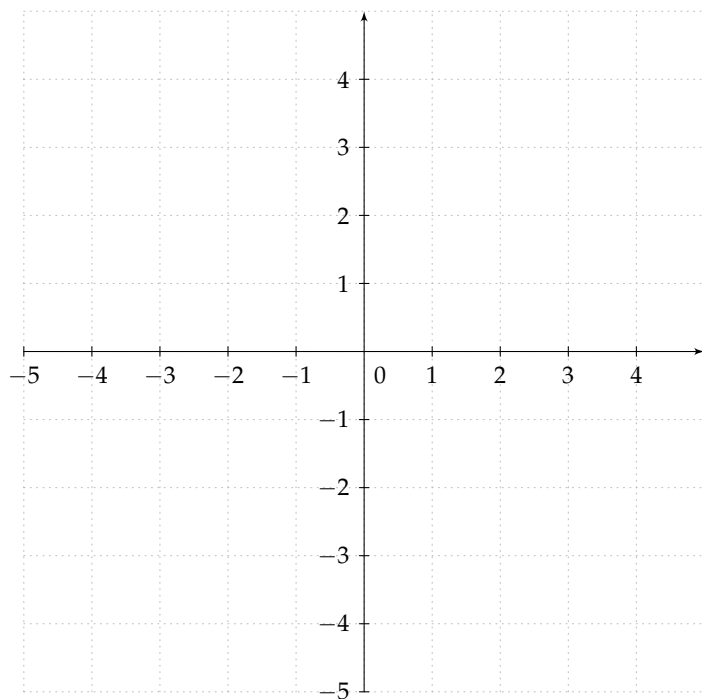
Zadání Sestrojte vrstevnicový graf funkce:

a) $z = x^2 + y^2 - 4$

b) $z = \frac{2y}{x^2} + 1$

Řešení

Video Teorie: [34](#), [35](#) Řešené příklady: [109](#) 



Tahák

Hledáme průniky grafu funkce s rovinami rovnoběžnými s půdorysnou rovinou, tj. dosazujeme $z = k, k \in \mathbb{R}$.

Číslo k je možné volit libovolně. Ovšem může se stát, že při nevhodné volbě se plochy neprotínají, průnik bude prázdný.

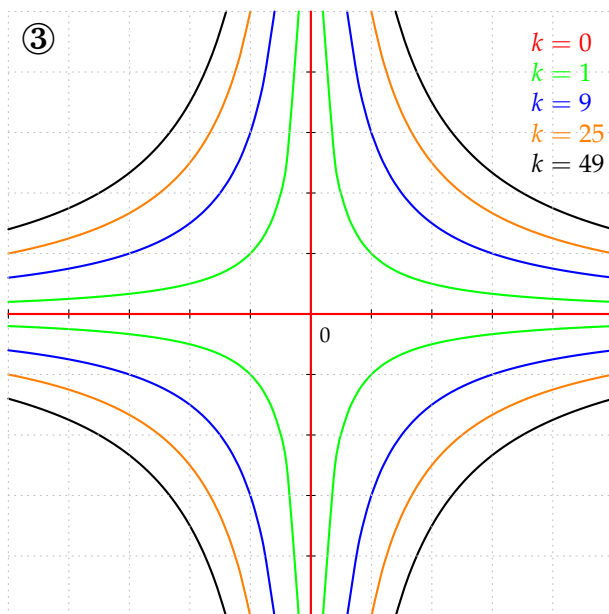
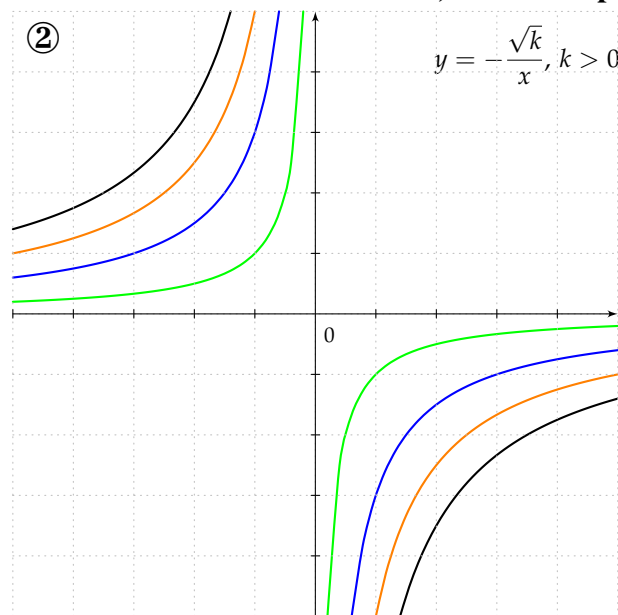
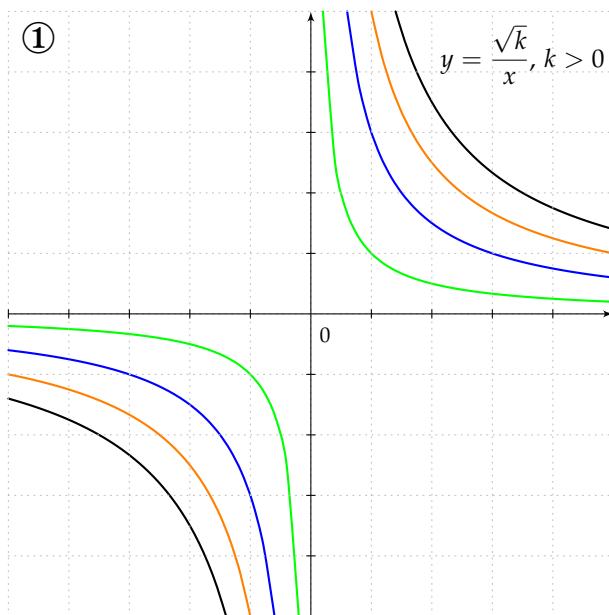
V případě, že průnik je neprázdný, jedná se o prostorovou křivku, kterou promítneme do půdorysné roviny.

215 - Vrstevnicový graf

Zadání Rozhodněte, který vrstevnicový graf odpovídá funkci $z = x^2 y^2$.

Řešení

Video Teorie: 34, 35 Řešené příklady: 109 



Tahák

Hledáme průniky grafu funkce s rovinami rovnoběžnými s půdorysnou rovinou, tj. dosazujeme $z = k, k \in \mathbb{R}$.

Číslo k je možné volit libovolně. Ovšem může se stát, že při nevhodné volbě se plochy neprotínají, průnik bude prázdný.

V případě, že průnik je neprázdný, jedná se o prostorovou křivku, kterou promítneme do půdorysné roviny.

216 - Limita funkce

Zadání Vyřešte:

a) $\lim_{[x,y] \rightarrow [1,2]} \frac{xy + x - y}{x^3 - 2}$

b) $\lim_{[x,y] \rightarrow [\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{6}]} \sin(2x + y)$

c) $\lim_{[x,y] \rightarrow [-1,4]} \frac{x^3 + 1}{y(x + 1)}$

Řešení

Video **Teorie: 36** **Řešené příklady: 110** 

Tahák

Limity funkcí dvou proměnných řešíme většinou přímým dosazením, nebo se pokusíme limitu upravit.

V případě limit funkcí dvou proměnných se spíše řeší jiný typ úlohy. Dokazuje se, že daná limita neexistuje.

217 - Parciální derivace

Zadání Nalezněte parciální derivace prvního řádu:

a) $z = x^2 + y^2$

c) $z = (x^3 + 1)y(x + 1)$

e) $z = \frac{\sqrt{xy}}{\ln(x - y^2)}$

b) $z = \sin(2x + y)$

d) $z = \frac{xy + x - y}{x^3 - 2}$

f) $z = \tan(\ln(xy))$

Řešení**Video** **Teorie:** 37, 38 **Řešené příklady:** 111, 112, 113 **Tahák**

1. $(c)' = 0$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(e^x)' = e^x$

4. $(a^x)' = a^x \ln a$

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$u = u(x) \quad v = v(x)$

15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$

16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$

17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$

18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

218 - Parciální derivace

Zadání Nalezněte parciální derivace prvního řádu:

a) $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$ v bodě $[1, -1]$

b) $z = (x + y)\sqrt{1 - x^2y^2}$ v bodě $[1, 0]$

c) $z = \ln \arctan \frac{x}{y - x}$ v bodě $[1, 2]$

Řešení

Video **Teorie: 37, 38** **Řešené příklady: 111, 112, 113** 

Tahák

1. $(c)' = 0$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(e^x)' = e^x$

4. $(a^x)' = a^x \ln a$

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

$u = u(x) \quad v = v(x)$

15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$

16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$

17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$

18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

219 - Parciální derivace

Zadání Nalezněte parciální derivace druhého řádu:

a) $z = \cot(x + 2y)$

b) $z = xe^{(y+1)}$

c) $z = x^y$

Řešení

Video **Teorie:** 37, 38 **Řešené příklady:** 111, 112, 113 

Tahák

1. $(c)' = 0$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(e^x)' = e^x$

4. $(a^x)' = a^x \ln a$

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$u = u(x) \quad v = v(x)$

15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$

16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$

17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$

18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

220 - Parciální derivace

Zadání Nalezněte parciální derivace druhého řádu:

a) $z = x^2 \ln y$ v bodě $[3, 1]$

b) $z = ye^{-xy^2}$ v bodě $[-1, 1]$

Řešení

Video **Teorie:** [37](#), [38](#) **Řešené příklady:** [111](#), [112](#), [113](#) 

Tahák

1. $(c)' = 0$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(e^x)' = e^x$

4. $(a^x)' = a^x \ln a$

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$u = u(x) \quad v = v(x)$

15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$

16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$

17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$

18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

221 - Parciální derivace

Zadání Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ funkce $z = \ln(2x + y)$.

Řešení

Video **Teorie:** 37, 38 **Řešené příklady:** 111, 112, 113 

Tahák

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $u = u(x) \quad v = v(x)$
15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

222 - Diferenciál funkce

Zadání Vypočítejte diferenciál funkce:

a) $z = \tan(x^2 + y^2)$

b) $z = \frac{\sqrt{x}}{\log(x + 2y)}$

c) $z = (x^3 + y^3) \sin(xy)$

Řešení

Video **Teorie:** [39](#), [40](#) **Řešené příklady:** [114](#), [115](#) 

Tahák

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

při známých přírůstcích dx, dy

$$dz(A)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}$$

Diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy)$$

223 - Diferenciál funkce

Zadání Vypočítejte diferenciál funkce:

a) $z = e^{x^2y^2-4}$ v bodě $[-1, 2]$

b) $z = \arcsin \frac{y}{x+1}$ v bodě $[1, 1]$

Řešení

Video **Teorie: 39, 40** **Řešené příklady: 114, 115** 

Tahák

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

při známých přírůstcích dx, dy

$$dz(A)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}$$

Diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy)$$

224 - Diferenciál funkce

Zadání Určete přibližně hodnotu funkce $z = \sqrt{xy}$ v bodě $[2,08; 1,99]$.

Řešení [Video](#) **Teorie:** [39](#), [40](#) **Řešené příklady:** [114](#), [115](#) 

Tahák

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

při známých přírůstcích dx, dy

$$dz(A)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}$$

Diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy)$$

225 - Diferenciál funkce

Zadání Vypočítejte diferenciál druhého řádu funkce:

a) $z = \frac{xy}{x+y}$

b) $z = \sin(5x + 2y)$

Řešení

Video **Teorie: 39, 40** **Řešené příklady: 114, 115** 

Tahák

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

při známých přírůstcích dx, dy

$$dz(A)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}$$

Diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy)$$

226 - Tečná rovina, normála

Zadání Nalezněte tečnou rovinu τ a normálu n ke grafu funkce $z = \ln(x^2 - 3y)$ v bodě $A = [2, 1, ?]$.

Řešení Video Teorie: 41 Řešené příklady: 116 

Tahák

Tečná rovina τ ke grafu funkce $z = f(x, y)$
v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$, $A = [x_0, y_0]$

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0)$$

Normála n grafu funkce $z = f(x, y)$
v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$, $A = [x_0, y_0]$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(A)t \\ n : \quad y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$z = z_0 - t$$

227 - Tečná rovina, normála

Zadání Nalezněte tečnou rovinu τ a normálu n ke grafu funkce $z = \sqrt{x^2 + xy + 1}$ v bodě $A = [0, 4, ?]$.

Řešení [Video](#) **Teorie: 41** **Řešené příklady: 116** 

Tahák

Tečná rovina τ ke grafu funkce $z = f(x, y)$
v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$, $A = [x_0, y_0]$

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0)$$

Normála n grafu funkce $z = f(x, y)$
v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$, $A = [x_0, y_0]$

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(A)t \\n : \quad y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)t, \quad t \in \mathbb{R} \\z &= z_0 - t\end{aligned}$$

228 - Taylorův polynom

Zadání Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = 3x^2y + 4xy^2 + x^3$ v bodě $A = [2, -1]$.

Řešení

Video **Teorie: 41** **Řešené příklady: 117** 

Tahák

Taylorův polynom m -tého řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$T_m(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \dots + \frac{d^m f(A)}{m!}$$

Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$T_2(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!}$$

resp.

$$\begin{aligned} T_2(A) = & f(A) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0) \right) \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y - y_0)^2 \right) \end{aligned}$$

229 - Taylorův polynom

Zadání Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = \ln \frac{1}{xy}$ v bodě $A = [-2, -3]$.

Řešení

Video **Teorie: 41** **Řešené příklady: 117** 

Tahák

Taylorův polynom m -tého řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$T_m(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \dots + \frac{d^m f(A)}{m!}$$

Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$T_2(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!}$$

resp.

$$\begin{aligned} T_2(A) = f(A) + \frac{1}{1!} & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0) \right) \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y - y_0)^2 \right) \end{aligned}$$

230 - Derivace implicitní funkce

Zadání Oběma způsoby nalezněte derivaci implicitní funkce dané rovnicí $x^2 + y^2 + y^3 - xy = 2$.

Řešení

Video **Teorie: 42, 43** **Řešené příklady: 118** 

Tahák

Derivace implicitní funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Derivace implicitní funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(A)}{\frac{\partial F}{\partial y}(A)}$$

Alternativní způsob výpočtu:

- v rovnici $F(x, y) = 0$ předpokládáme závislost y na x , $y = y(x)$,
- rovnice $F(x, y) = 0$ přejde na rovnici $F(x, y(x)) = G(x) = 0$,
- derivujeme funkci jedné proměnné G podle x ,
- vyjádříme y' .

231 - Derivace implicitní funkce

Zadání Oběma způsoby nalezněte derivaci implicitní funkce dané rovnicí $\cot(3y) = x^2y$.

Řešení

Video **Teorie:** 42, 43 **Řešené příklady:** 118 

Tahák

Derivace implicitní funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Derivace implicitní funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(A)}{\frac{\partial F}{\partial y}(A)}$$

Alternativní způsob výpočtu:

- v rovnici $F(x, y) = 0$ předpokládáme závislost y na x , $y = y(x)$,
- rovnice $F(x, y) = 0$ přejde na rovnici $F(x, y(x)) = G(x) = 0$,
- derivujeme funkci jedné proměnné G podle x ,
- vyjádříme y' .

232 - Derivace implicitní funkce

Zadání Oběma způsoby nalezněte derivaci implicitní funkce dané rovnicí $2^{xy} - 3^{x+y} = -7$ v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení

Video **Teorie: 42, 43** **Řešené příklady: 118** 

Tahák

Derivace implicitní funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Derivace implicitní funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(A)}{\frac{\partial F}{\partial y}(A)}$$

Alternativní způsob výpočtu:

- v rovnici $F(x, y) = 0$ předpokládáme závislost y na x , $y = y(x)$,
- rovnice $F(x, y) = 0$ přejde na rovnici $F(x, y(x)) = G(x) = 0$,
- derivujeme funkci jedné proměnné G podle x ,
- vyjádříme y' .

233 - Tečna a normála k implicitní funkci

Zadání Nalezněte tečnu a normálu k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $\frac{x+y}{x-y} = 2$ v bodě $A = [3, 1]$.

Řešení Video Teorie: 42, 43 Řešené příklady: 119 

Tahák

Tečna k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$t : \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)(y - y_0) = 0$$

Normála k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$n : \frac{\partial F}{\partial y}(A)(x - x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(A)(y - y_0) = 0$$

234 - Tečna a normála k implicitní funkci

Zadání Nalezněte tečnu a normálu k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $3^{xy} - 1 = y \ln 3 + x \ln 3$ v bodě $A = [0, 0]$.

Řešení Video Teorie: 42, 43 Řešené příklady: 119 

Tahák

Tečna k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$t : \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)(y - y_0) = 0$$

Normála k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$n : \frac{\partial F}{\partial y}(A)(x - x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(A)(y - y_0) = 0$$

235 - Lokální extrémy

Zadání Nalezněte lokální extrémy funkce $z = x^2 + 6x + 3y^2 - 12y + 11$.

Řešení

Video Teorie: [44](#), [45](#) Řešené příklady: [120](#), [122](#) 

Tahák

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme parciální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ parciálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

236 - Lokální extrémy

Zadání Nalezněte lokální extrémy funkce $z = 3xy - x + 2y$.

Řešení

Video Teorie: [44](#), [45](#) Řešené příklady: [120](#), [122](#) 

Tahák

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme parciální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ parciálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

237 - Lokální extrémy

Zadání Nalezněte lokální extrémy funkce $z = x^2 - xy + 3x + y + 3$.

Řešení

Video **Teorie:** 44, 45 **Řešené příklady:** 120, 122 

Tahák

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme parciální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ parciálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

238 - Lokální extrémy

Zadání Nalezněte lokální extrémy funkce $z = (x^2 + 4x)y + y^2$.

Řešení

Video Teorie: [44](#), [45](#) Řešené příklady: [120](#), [122](#) 

Tahák

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme parciální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ parciálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

239 - Vázané extrémy

Zadání Nalezněte vázané extrémy funkce $z = f(x, y)$ vzhledem k zadané podmínce $g(x, y) = 0$:

a) $z = 4x + 2y + 1, \quad y = x^2 + x + \frac{1}{4}$

b) $z = 12x + y - 3, \quad y = -x^3 + 3$

Řešení

Video Teorie: **46** Řešené příklady: **124, 125** 

Tahák

V případě, že lze jednoznačně z rovnice vazby vyjádřit buď x nebo y budeme postupovat při hledání vázaných extrémů takto:

- vyjádříme buď $y = \varphi(x)$ nebo $x = \psi(y)$
- vázané extrémy hledáme jako lokální extrémy funkce jedné proměnné buď $z = f(x, \varphi(x))$ nebo $z = f(\psi(y), y)$

240 - Vázané extrémy

Zadání Nalezněte vázané extrémy funkce $z = 4x + 3y - 4$ vzhledem k zadané podmínce $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Řešení

Video **Teorie: 46** **Řešené příklady: 124, 125** 

Tahák

V případě, že nelze jednoznačně z rovnice vazby $g(x, y) = 0$ vyjádřit buď x nebo y budeme postupovat při hledání vázaných extrémů takto:

- sestavíme Lagrangeovu funkci $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
- hledáme lokální extrémy funkce Φ
- má-li funkce Φ ve svém stacionárním bodě lokální extrém, má i funkce $z = f(x, y)$ v tomto bodě lokální extrém vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$, tzv. vázaný extrém

241 - Globální extrémy

Zadání Nalezněte globální extrémy funkce $z = x^2 - y$ na čtverci s vrcholy v bodech $[1, 1]$, $[3, 1]$, $[1, 3]$ a $[3, 3]$.

Řešení

Video **Teorie: 47** **Řešené příklady: 126** 

Tahák

Budeme postupovat takto:

- určíme definiční obor D_f funkce $z = f(x, y)$
- nalezneme lokální extrémy této funkce Φ na množině D_f , ze které vyloučíme hranici $g(x, y) = 0$
- určíme vázané extrémy této funkce vzhledem k podmínce $g(x, y) = 0$
- porovnáme funkční hodnoty všech extrémů, extrém s největší funkční hodnotou bude globálním maximem, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude globálním minimem

242 - Globální extrémy

Zadání Nalezněte globální extrémy funkce $z = x^2 + y^2$ na trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[2, 0]$ a $[0, 1]$.

Řešení

Video **Teorie: 47** **Řešené příklady: 126** 

Tahák

Budeme postupovat takto:

- určíme definiční obor D_f funkce $z = f(x, y)$
- nalezneme lokální extrémy této funkce Φ na množině D_f , ze které vyloučíme hranici $g(x, y) = 0$
- určíme vázané extrémy této funkce vzhledem k podmínce $g(x, y) = 0$
- porovnáme funkční hodnoty všech extrémů, extrém s největší funkční hodnotou bude globálním maximem, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude globálním minimem

243 - Globální extrémy

Zadání Nalezněte globální extrémy funkce $z = -x^2 - y^2 + 2y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 16$.

Řešení

Video **Teorie: 47** **Řešené příklady: 126** 

Tahák

Budeme postupovat takto:

- určíme definiční obor D_f funkce $z = f(x, y)$
- nalezneme lokální extrémy této funkce Φ na množině D_f , ze které vyloučíme hranici $g(x, y) = 0$
- určíme vázané extrémy této funkce vzhledem k podmínce $g(x, y) = 0$
- porovnáme funkční hodnoty všech extrémů, extrém s největší funkční hodnotou bude globálním maximem, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude globálním minimem

Příklady – Obyčejné diferenciální rovnice

245 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' \tan x - y = 3$

b) $xy' + y = y^2$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [51](#) **Řešené příklady:** [129-133](#) 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obečné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

246 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' = 10^{x+y}$

b) $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

Řešení

Video **Teorie: 50, 51** **Řešené příklady: 129-133** 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obečné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

247 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$

b) $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [51](#) **Řešené příklady:** [129-133](#) 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obečné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

248 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $1 + y^2 + xyy' = 0$

b) $(1 + e^x)yy' = e^y$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [51](#) **Řešené příklady:** [129-133](#) 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obečné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

249 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

b) $\sqrt{1 - y^2}dx = y\sqrt{1 - x^2}dy$

Řešení

Video **Teorie: 50, 51** **Řešené příklady: 129-133** 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obečné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

250 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $e^{-y} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 1$

b) $\frac{x^3 dx}{\sin y} + \frac{y dy}{x} = 0$

Řešení

Video **Teorie:** 50, 51 **Řešené příklady:** 129-133 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obečné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

251 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte Cauchyho úlohu:

a) $2(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 0$

b) $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

Řešení

Video **Teorie: 50, 51** **Řešené příklady: 129-133** 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obečné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

252 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte Cauchyho úlohu:

a) $\sin x \sin y y' = \cos x \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

b) $(1 + e^x) \frac{y'}{y} + e^x = 0, \quad y(0) = 1$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [51](#) **Řešené příklady:** [129-133](#) 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

253 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte Cauchyho úlohu:

a) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(0) = 1$

b) $y - xy' = 5(1+x^2y'), \quad y(1) = 1$

Řešení

Video **Teorie: 50, 51** **Řešené příklady: 129-133** 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

254 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' \sqrt{1+x+y} = x+y-1$

b) $y' = 3x - 2y + 5$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [51](#) **Řešené příklady:** [134](#), [135](#) 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = f(ax + by + c)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$u = ax + by + c$, kde $u = u(x)$,

odtud

$$u' = a + by' \implies y' = \frac{u' - a}{b}$$

pro $b \neq 0$

255 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' = \sin^2(x - y)$

b) $y' = (x + y)^2$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [51](#) **Řešené příklady:** [134](#), [135](#) 

Tahák

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = f(ax + by + c)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$u = ax + by + c$, kde $u = u(x)$,

odtud

$$u' = a + by' \implies y' = \frac{u' - a}{b}$$

pro $b \neq 0$

256 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

b) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [52](#) **Řešené příklady:** [136](#), [137](#), [138](#), [139](#) 

Tahák

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze
upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce
 $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

257 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

b) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [52](#) **Řešené příklady:** [136](#), [137](#), [138](#), [139](#) 

Tahák

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze
upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce
 $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

258 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

b) $y^2 + x^2 y' = x y y'$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [52](#) **Řešené příklady:** [136](#), [137](#), [138](#), [139](#) 

Tahák

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze
upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce

$z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

259 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

b) $xy' = y(\ln y - \ln x)$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [52](#) **Řešené příklady:** [136](#), [137](#), [138](#), [139](#) 

Tahák

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze
upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce
 $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

260 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $xy' - y = x \tan \frac{y}{x}$

b) $x^3y' = y(y^2 + x^2)$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [52](#) **Řešené příklady:** [136](#), [137](#), [138](#), [139](#) 

Tahák

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze
upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce

$z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

261 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $xdy - ydx = ydy$

b) $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [52](#) **Řešené příklady:** [136](#), [137](#), [138](#), [139](#) 

Tahák

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze
upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce

$z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

262 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$

b) $(8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [52](#) **Řešené příklady:** [136](#), [137](#), [138](#), [139](#) 

Tahák

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze
upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce
 $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

263 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte Cauchyho úlohu:

a) $(xy' - y) \arctan \frac{y}{x} = x, \quad y(1) = 0$

b) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, \quad y(0) = 1$

Řešení

Video **Teorie:** [50](#), [52](#) **Řešené příklady:** [136](#), [137](#), [138](#), [139](#) 

Tahák

*Separovatelná diferenciální rovnice
typu homogenní rovnice*

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze
upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace
 $y' = \frac{dy}{dx}$

Substituce

$z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

264 - Exaktní diferenciální rovnice

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $(e^y + ye^x + 3) dx + (e^x + xe^y - 2) dy = 0$

b) $(1 + x \cos 2y) dx - x^2 \sin 2y dy = 0$

Řešení

Video **Teorie:** [53](#), [54](#) **Řešené příklady:** [140](#) 

Tahák

Exaktní diferenciální rovnice

Postup řešení

- ověříme, zda platí podmínka exaktnosti $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$
- vypočítáme kmenovou funkci $F(x, y)$
- určíme obecné řešení rovnice ve tvaru $F(x, y) = C$

265 - Exaktní diferenciální rovnice

Zadání Řešte Cauchyho úlohu:

a) $(2x + ye^{xy}) dx + (1 + xe^x y) dy = 0, \quad y(0) = 1$

b) $\left(\frac{\ln x}{y^2} - y\right) y' = \frac{1}{xy}, \quad y(1) = 2$

Řešení

Video **Teorie: 53, 54** **Řešené příklady: 140** 

Tahák

Exaktní diferenciální rovnice

Postup řešení

- ověříme, zda platí podmínka exaktnosti $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$
- vypočítáme kmenovou funkci $F(x, y)$
- určíme obecné řešení rovnice ve tvaru $F(x, y) = C$

266 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' + 2y = 4x$

b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Řešení

Video Teorie: **55, 56, 57** Řešené příklady: **141-145** 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*

$C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka:* odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek:*

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

267 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

b) $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$

Řešení

Video Teorie: [55](#), [56](#), [57](#) Řešené příklady: [141-145](#) 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*

$C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka:* odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek:*

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

268 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

$$\text{a) } y' = \frac{2x \ln x - y + x}{x}$$

$$\text{b) } y' = e^{2x} - e^x y$$

Řešení

Video Teorie: **55, 56, 57** Řešené příklady: **141-145** 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*

$C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka:* odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek:*

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

269 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$

b) $y' = 2y - x^2$

Řešení

Video Teorie: **55, 56, 57** Řešené příklady: **141-145** 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*

$C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka:* odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek:*

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

270 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

b) $x(x^2 + 1)y' + y = x(1 + x^2)^2$

Řešení

Video Teorie: [55](#), [56](#), [57](#) Řešené příklady: [141-145](#) 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*

$C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka:* odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek:*

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

271 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $x^2 dy + (3 - 2xy)dx = 0$

b) $xdy = (x^3 - y)dx$

Řešení**Video** Teorie: **55, 56, 57** Řešené příklady: **141-145** **Tahák***Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)*

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace
$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*

$C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka:* odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek:*

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

272 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $\frac{dy}{dx} = y \cos x + \sin 2x$

b) $2xdy + (x^2 - 6y)dx = 0$

Řešení

Video Teorie: **55, 56, 57** Řešené příklady: **141-145** 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*

$C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka:* odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek:*

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

273 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Řešte Cauchyho úlohu:

a) $xy' - \frac{y}{x+1} = x, \quad y(1) = 0$

b) $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0$

Řešení

Video Teorie: **55, 56, 57** Řešené příklady: **141-145** 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*

$C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka:* odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek:*

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

274 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x - 4$

b) $y'' - 4y' = 4 \sin x - \cos x$

Řešení

Video **Teorie: 58-63** **Řešené příklady: 146-150** 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu

1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice

2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice

3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

- podle pravé strany LDR druhého řádu

$$b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x)),$$

a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál

$$v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x)),$$

kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty

- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$$

275 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y'' - 5y' + 4y = e^x \sin x$

b) $y'' - 3y' - 10y = 2(7x + 1)e^{5x}$

Řešení

Video **Teorie: 58-63** **Řešené příklady: 146-150** 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu

1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice

2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice

3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

- podle pravé strany LDR druhého řádu

$$b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x)),$$

a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál

$$v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x)),$$

kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty

- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$$

276 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y'' - 6y' + 9y = (x + 2)e^{3x}$

b) $y'' - 2y' + 10y = 12e^x \cos 3x$

Řešení

Video **Teorie: 58-63** **Řešené příklady: 146-150** 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu

1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice

2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice

3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

- podle pravé strany LDR druhého řádu

$$b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x)),$$

a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál

$$v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x)),$$

kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty

- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$$

277 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Řešte diferenciální rovnice:

a) $y'' - 2y' + 2y = (5x - 11) \sin 2x$

b) $y'' + 16y = 8 \sin 4x$

Řešení

Video **Teorie: 58-63** **Řešené příklady: 146-150** 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu

1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice

2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice

3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

- podle pravé strany LDR druhého řádu

$$b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x)),$$

a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál

$$v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x)),$$

kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty

- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$$

278 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Řešte Cauchyho úlohu:

a) $y'' - 4y' + 3y = xe^{4x},$
 $y(0) = 1, y'(0) = 4$

b) $y'' - 5y' + 6y = (2x + 1)e^{2x},$
 $y(0) = 4, y'(0) = 2$

Řešení

Video Teorie: **58-63** Řešené příklady: **146-150** 

Tahák

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici
 $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$
- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu
 1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice
 2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice
 3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice
- podle pravé strany LDR druhého řádu
 $b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x))$,
 a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál
 $v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x))$,
 kde $M = \max\{m, n\}$
- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty
- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu
 $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$

Matematika II: Aplikované úlohy

Zuzana Morávková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

280 - Rosettská deska I

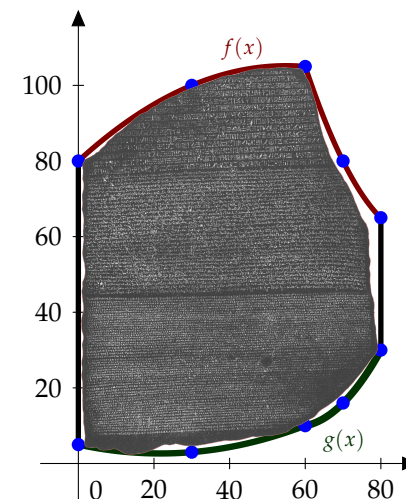


Zadání Rosettská deska je tradiční označení černé žulové stély, na níž je ve 166 znacích zaznamenán text ve třech shodných verzích: dvou egyptských (v hieroglyfickém a démotickém písmu) a jednom řeckém překladu. Konfrontace řeckého překladu s do té doby nečitelným hieroglyfickým textem umožnila rozluštění hieroglyfů. Rosettská deska byla objevena 15. července 1799 v Egyptě u města Rosetta při ústí Nilu.

Funkce $f(x)$ je po částech kvadratická funkce určená body $[0, 80]$, $[30, 100]$, $[60, 105]$, $[70, 80]$, $[80, 65]$.

Funkce $g(x)$ je po částech kvadratická funkce určená body $[0, 5]$, $[30, 3]$, $[60, 10]$, $[70, 16]$, $[80, 30]$.

Najděte předpisy funkcí popisující tvar desky.



Řešení

Funkce f je po částech kvadratická funkce, tedy má na intervalu $\langle 0, 60 \rangle$ předpis kvadratické funkce určené body $[0, 80]$, $[30, 100]$, $[60, 105]$, a na intervalu $\langle 60, 80 \rangle$ jiný předpis kvadratické funkce určené body $[60, 105]$, $[70, 80]$, $[80, 65]$.

Body $[0, 80]$, $[30, 100]$, $[60, 105]$ dosadíme do předpisu kvadratické funkce:

$$y = ax^2 + bx + c$$

a dostaneme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 900 & 20 & 1 \\ 3600 & 60 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 105 \end{pmatrix}$$

Řešení je $a = -\frac{1}{120}$, $b = \frac{11}{12}$, $c = 80$. Funkce má předpis:

$$f(x) = -\frac{1}{120}x^2 + \frac{11}{12}x + 80 \quad x \in \langle 0, 60 \rangle$$

Obdobně spočítáme předpis funkce f na intervalu $\langle 60, 80 \rangle$, která je určena body

$$\begin{pmatrix} 3600 & 60 & 1 \\ 4900 & 70 & 1 \\ 6400 & 80 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 80 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Řešení je $a = \frac{1}{20}$, $b = -9$, $c = 465$. Stejným způsobem spočítáme předpisy funkce g .

Výsledné funkce jsou:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{120}x^2 + \frac{11}{12}x + 80 & x \in \langle 0, 60 \rangle \\ \frac{1}{20}x^2 - 9x + 465 & x \in \langle 60, 80 \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{200}x^2 - \frac{13}{60}x + 5 & x \in \langle 0, 60 \rangle \\ \frac{1}{25}x^2 - \frac{23}{5}x + 142 & x \in \langle 60, 80 \rangle \end{cases}$$

281 - Rosettská deska II



Zadání Rosettská deska je z černého čediče ($\rho = 2900 \text{ kg/m}^3$) a její tloušťka je 28 cm.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{120}x^2 + \frac{11}{12}x + 80 & x \in \langle 0, 60 \rangle \\ \frac{1}{20}x^2 - 9x + 465 & x \in \langle 60, 80 \rangle \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{200}x^2 - \frac{13}{60}x + 5 & x \in \langle 0, 60 \rangle \\ \frac{1}{25}x^2 - \frac{23}{5}x + 142 & x \in \langle 60, 80 \rangle \end{cases}$$

Lze desku přenést jeřábem s nosností 800 kg?

Do kterého místa umístíme hák?



Řešení

Nejprve spočítáme plošnou hustotu:

$$\sigma = 2900 \text{ kg m}^3 \cdot 28 \text{ cm} = 0.0029 \text{ kg cm}^3 \cdot 28 \text{ cm} = 8.12 \text{ kg cm}^2$$

Hmotnost desky je rovna součinu plošné hustoty a obsahu:

$$\begin{aligned} m &= \sigma \int_0^{80} f(x) - g(x) dx = \\ &= \sigma \int_0^{60} \left(-\frac{1}{120}x^2 + \frac{11}{12}x + 80 - \left(\frac{1}{200}x^2 - \frac{13}{60}x + 5 \right) \right) dx + \\ &\quad + \sigma \int_{60}^{80} \left(\frac{1}{20}x^2 - 9x + 465 - \left(\frac{1}{25}x^2 - \frac{23}{5}x + 142 \right) \right) dx = \\ &= \sigma(5580 + 1286.\bar{6}) = \sigma 6866.\bar{6} = 8.12 \cdot 6866.\bar{6} \doteq 557 \text{ kg} \end{aligned}$$

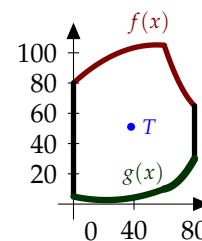
Pro výpočet těžiště spočítáme statické momenty:

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma \frac{1}{2} \int_0^{80} f^2(x) - g^2(x) dx = \\ &= \sigma \frac{1}{2} \int_0^{60} \left(\left(-\frac{1}{120}x^2 + \frac{11}{12}x + 80 \right)^2 - \left(\frac{1}{200}x^2 - \frac{13}{60}x + 5 \right)^2 \right) dx + \\ &\quad + \sigma \frac{1}{2} \int_{60}^{80} \left(\left(\frac{1}{20}x^2 - 9x + 465 \right)^2 - \left(\frac{1}{25}x^2 - \frac{23}{5}x + 142 \right)^2 \right) dx = \\ &= \sigma(286176 + 64698) = \sigma 350874 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= \sigma \int_0^{80} x (f(x) - g(x)) dx = \\ &= \sigma \int_0^{60} x \left(-\frac{1}{120}x^2 + \frac{11}{12}x + 80 - \left(\frac{1}{200}x^2 - \frac{13}{60}x + 5 \right) \right) dx + \\ &\quad + \sigma \int_{60}^{80} x \left(\frac{1}{20}x^2 - 9x + 465 - \left(\frac{1}{25}x^2 - \frac{23}{5}x + 142 \right) \right) dx = \\ &= \sigma(173400 + 88066.\bar{6}) = \sigma 261466.\bar{6} \end{aligned}$$

Těžiště je v bodě:

$$T = \left[\frac{S_y}{m}; \frac{S_x}{m} \right] = \left[\frac{\sigma 261466.\bar{6}}{\sigma 6866.\bar{6}}; \frac{\sigma 350874}{\sigma 6866.\bar{6}} \right] \doteq [38.07; 51.09]$$



282 - Gateway Arch I



Zadání Známý památník Gateway Arch je symbolem Saint Louis (stát Missouri, USA). Památník navrhl finsko-americký architekt Eero Saarinen a německo-americký stavební inženýr Hannskarl Bandel v roce 1947. Stavba začala v roce 1963 a byla dokončena v roce 1965, celkové náklady byly 13 milionů dolarů.

Gateway Arch má tvar řetězovky, která má stejnou šířku při zemi a výšku 630 stop.

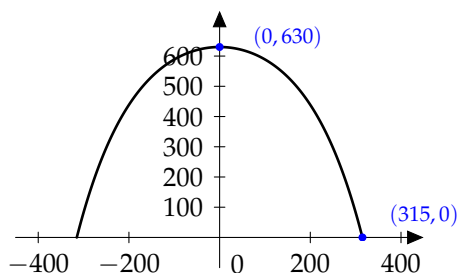
Jaký je předpis křivky popisující památník?

Nápověda: $y = -a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b$



Řešení

Osu x umístíme na zem a osa y je totožná s osou symetrie památníku.



Hledanou křivkou je řetězovka:

$$y = -a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b \quad (*)$$

Na křivce leží body $[0; 630]$ a $[315; 0]$, které dosadíme do vztahu $(*)$ a dostaneme dvě rovnice:

$$630 = -a \cdot \cosh\left(\frac{0}{a}\right) + b$$

$$0 = -a \cdot \cosh\left(\frac{315}{a}\right) + b$$

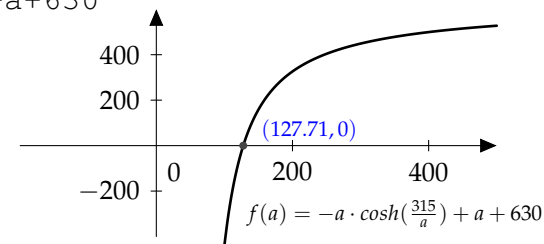
Z první rovnice vyjádříme b a dosadíme do druhé rovnice:

$$-a \cdot \cosh\left(\frac{315}{a}\right) + a + 630 = 0 \quad (**)$$

Rovnici $(**)$ lze vyřešit numericky nebo použitím vhodného matematického programu. GeoGebra má k dispozici příkaz NuloveBody

$f(a) = -a \cdot \cosh(315/a) + a + 630$

`NuloveBody[f, 100]`



Řešení je $a = 127.7$, $b = 757.7$ a řetězovka má předpis:

$$y = -127.7 \cdot \cosh\left(\frac{x}{127.7}\right) + 757.7$$

kde $x \in \langle -315 \text{ stop}; 315 \text{ stop} \rangle$.

283 - Gateway Arch II



Zadání Památník Gateway Arch má tvar řetězovky:

$$y = -127.7 \cdot \cosh\left(\frac{x}{127.7}\right) + 757.7$$

kde $x \in \langle -315 \text{ stop}; 315 \text{ stop} \rangle$.

Hlemýžď se pohybuje rychlostí 1 metr za 1 hodinu. Dostane se na vrchol památníku za týden?

Nápověda: 1 stopa = 0.3048 m



Řešení

Vypočítáme derivaci:

$$\begin{aligned} y' &= -127.7 \cdot \cosh\left(\frac{x}{127.7}\right) + 757.7 = \\ &= -127.7 \cdot \sinh\left(\frac{x}{127.7}\right) \cdot \frac{1}{127.7} = -\sinh\left(\frac{x}{127.7}\right) \end{aligned}$$

Délka křivky se spočítá:

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-315}^{315} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{127.7}\right)} dx = \\ &= \int_{-315}^{315} \cosh\left(\frac{x}{127.7}\right) dx = 127.7 \cdot \left[\sinh\left(\frac{x}{127.7}\right)\right]_{-315}^{315} = \\ &= 1493.94 \text{ stop} \end{aligned}$$

Ukážeme i výpočet bez použití hyperbolických funkcí. Hyperbolický kosinus vyjádříme podle definice a spočítáme derivaci:

$$\begin{aligned} y &= -127.7 \cdot \cosh\left(\frac{x}{127.7}\right) + 757.7 = \\ &= -127.7 \cdot \frac{e^{\frac{x}{127.7}} + e^{-\frac{x}{127.7}}}{2} + 757.7 \\ y' &= -\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{127.7}} - e^{-\frac{x}{127.7}}\right) \end{aligned}$$

Délka křivky se spočítá:

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-315}^{315} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{127.7}} - e^{-\frac{x}{127.7}}\right)\right)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-315}^{315} \left(e^{\frac{x}{127.7}} + e^{-\frac{x}{127.7}}\right) dx = \\ &= \frac{127.7}{2} \left[e^{\frac{x}{127.7}}\right]_{-315}^{315} - \frac{127.7}{2} \left[e^{-\frac{x}{127.7}}\right]_{-315}^{315} = \\ &= 127.7 \left(e^{\frac{315}{127.7}} - e^{-\frac{315}{127.7}}\right) = 1493.94 \text{ stop} = 455.35 \text{ m} = 0.45535 \text{ km} \end{aligned}$$

Rychlost je $v = 1 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1} = 0.001 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Vypočítáme čas, kdy se hlemýžď dostane na vrchol památníku, tj. do poloviny délky:

$$t = \frac{0.5 \cdot s}{v} = \frac{0.5 \cdot 0.45535}{0.001} = 227.675 \text{ hodin} = \frac{227.675}{24} \text{ dní} = 9.4865 \text{ dní}$$

284 - Chladicí věž Ledvice I



Zadání Chladicí věže jsou nezbytnou součástí elektráren. Slouží ke chlazení vody, která se používá při výrobním procesu elektrické energie ve strojně. Nová věž s přirozeným tahem pro elektrárnu Ledvice je po chladicích věžích na jaderné elektrárně Temelín druhá nejvyšší v ČR.

Je přesně 144.80 m vysoká a její průměr na patě bude 102.91 m a v koruně 71.23 m. Nejužší místo věže je ve výšce 111.5 m.

Chladicí věž má tvar rotačního hyperboloidu.

Jaký je předpis křivky, popisující tvar věže?



Řešení

Osu x umístíme do nejužšího místa věže a osa y je totožná s osou symetrie věže.

Hledanou křivkou je hyperbola se středem v počátku souřadnic:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (*)$$

Na hyperbole leží body $[35.615; 33.3]$ a $[51.455; -111.5]$, které dosadíme do rovnice $(*)$ a dostaneme:

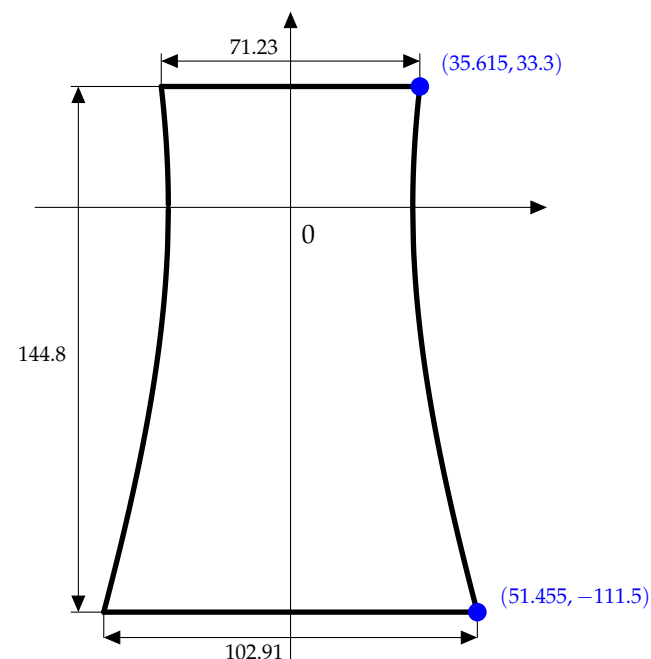
$$\begin{aligned} \frac{35.615^2}{a^2} - \frac{33.3^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{51.455^2}{a^2} - \frac{(-111.5)^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

Řešení: $a = 33.66$, $b = 96.46$.

Výsledná křivka je dána předpisem:

$$\frac{x^2}{33.66^2} - \frac{y^2}{96.46^2} = 1,$$

kde $y \in \langle -111.5; 33.3 \rangle$.



285 - Chladicí věž Ledvice II



Zadání Chladicí věž má tvar rotačního hyperboloidu. Hyperbola je dána:

$$\frac{x^2}{33.66^2} - \frac{y^2}{96.46^2} = 1.$$

kde $y \in \langle -111.5 \text{ m}; 33.3 \text{ m} \rangle$.

Jaký je objem a povrch věže?

Nápověda: $\int \sqrt{k^2 + x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{k^2 + x^2} + \frac{k^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{k^2 + x^2}}{k} \right)$



Řešení

Hyperboloid vznikne rotací části hyperboly kolem osy y a proto explicitně vyjádříme x :

$$x = 33.66 \sqrt{1 + \frac{y^2}{96.46^2}}$$

Objem rotačního tělesa se spočítá:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_{-111.5}^{33.3} 33.66^2 \left(1 + \frac{y^2}{96.46^2} \right) dy = \\ &= \pi \cdot 33.66^2 \left([y]_{-111.5}^{33.3} + \frac{1}{96.46^2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-111.5}^{33.3} \right) = \\ &= \pi \cdot 33.66^2 \left(33.3 + 111.5 + \frac{1}{96.46^2} \left(\frac{33.3^3}{3} + \frac{111.5^3}{3} \right) \right) \\ &= 696872.49 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Vypočítáme derivaci:

$$x' = \frac{33.66}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{96.46^2}}} \frac{2y}{96.46^2} = \frac{33.66 y}{96.46 \sqrt{96.46^2 + y^2}}$$

Povrch rotačního tělesa se spočítá:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (x')^2} dy = \\ &= 2\pi \int_a^b 33.66 \sqrt{1 + \frac{y^2}{96.46^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{33.66 y}{96.46 \sqrt{96.46^2 + y^2}} \right)^2} dy = \\ &= 2\pi \frac{33.66 \sqrt{96.46^2 + 33.66^2}}{96.46^2} \int_{-111.5}^{33.3} \sqrt{\frac{96.46^4}{96.46^2 + 33.66^2} + y^2} dy = \\ &= 2\pi \frac{33.66}{k} \int_{-111.5}^{33.3} \sqrt{k^2 + y^2} dy \\ &\text{kde } k = \sqrt{\frac{96.46^4}{96.46^2 + 33.66^2}} = 91.0743 \end{aligned}$$

$$P = 535768.36 \text{ m}^2$$

286 - Teplota v pokoji I



Zadání V místnosti o rozměrech $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ je v jihovýchodním rohu a v polovině jižní stěny teplota 19°C , v jihozápadním rohu 14°C , v polovině západní stěny 18.5°C , v severozápadním rohu 13°C a v severovýchodním rohu je 8°C .

Najděte kvadratickou plochu popisující teplotu.

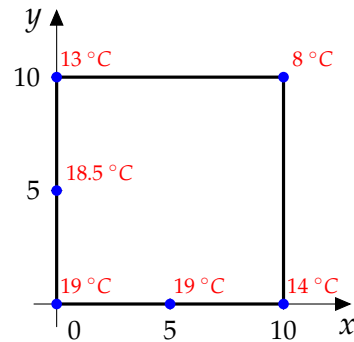


Řešení

Kvadratická funkce má předpis:

$$f(x, y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6$$

Funkce je určena body $f(0, 0) = 19$, $f(5, 0) = 19$, $f(10, 0) = 14$, $f(0, 5) = 18.5$, $f(0, 10) = 13$, $f(10, 10) = 8$.

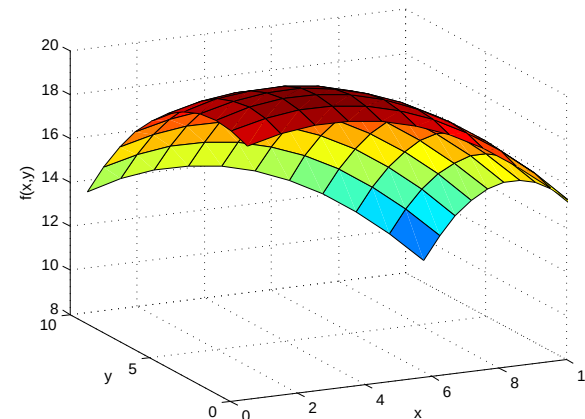


Dosadíme body do předpisu funkce $f(x, y)$ a dostaneme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 25 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 100 & 0 & 0 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 10 & 1 \\ 100 & 100 & 100 & 10 & 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 19 \\ 14 \\ 18.5 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Řešení soustavy je $a_1 = -0.1$, $a_2 = -0.1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0.5$, $a_5 = 0.4$, $a_6 = 19$ a funkce má předpis:

$$f(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 0.5x + 0.4y + 19, \quad x, y \in \langle 0, 10 \rangle$$



287 - Teplota v pokoji II



Zadání V místnosti o rozměrech $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ je teplota popsána funkcí:

$$f(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 0.5x + 0.4y + 19, \quad x, y \in \langle 0, 10 \rangle$$

V kterém místě bude nejtepleji?

Bude tam tepleji než 20 °C ?



Řešení

Pro nalezení lokálního extrému je potřeba najít stacionární body:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -0.2x + 0.5 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -0.2y + 0.4 \end{aligned}$$

Stacionární bod je $A = [2.5; 2]$. Spočítáme druhé parciální derivace:

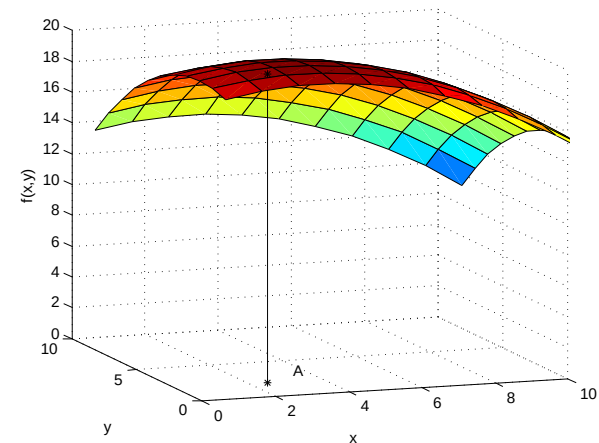
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -0.2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -0.2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Určíme hodnoty Hessiánu:

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2 = 0.04 > 0$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -0.2 < 0$$

V bodě $A = [2.5; 2]$ je ostré lokální maximum $f(2.5, 2) = 20.02\text{ °C}$.



288 - Teplota v pokoji III



Zadání V místnosti o rozměrech $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ je teplota popsána funkcí:

$$f(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 0.5x + 0.4y + 19, \quad x, y \in \langle 0, 10 \rangle$$

Půjdeme z jihovýchodního do severozápadního rohu.

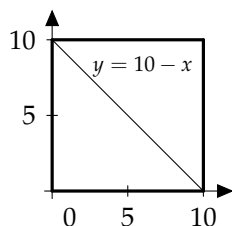
V kterém místě této cesty bude nejtepleji?

Jaká je průměrná teplota na této cestě?



Řešení

Hledáme vázaný extrém funkce $f(x, y)$ vzhledem k podmínce $y = 10 - x$.



Podmínku dosadíme do předpisu funkce f :

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.1x^2 - 0.1(10 - x)^2 + 0.5x + 0.4(10 - x) + 19 \\ &= -0.2x^2 + 2.1x + 13 \end{aligned}$$

Najdeme lokální maximum funkce $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -0.4x + 2.1 = 0 \Rightarrow x = 5.25$$

$$f''(x) = -0.4 < 0 \Rightarrow x = 5.25 \text{ je maximum}$$

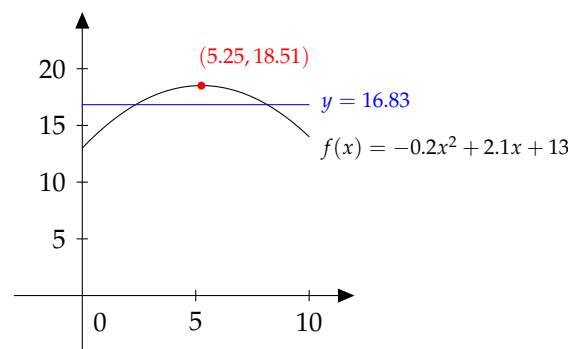
Dopočítáme druhou souřadnici $y = 10 - 5.25 = 4.75$.

V bodě $[5.25; 4.75]$ je největší teplota $f(5.25, 4.75) = 18.51\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Průměrná hodnota funkce je dána:

$$\begin{aligned} f_{\text{prům}} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{10-0} \int_0^{10} -0.2x^2 + 2.1x + 13 dx = \\ &= \frac{1}{10} \left[\frac{-0.2}{3}x^3 + \frac{2.1}{2}x^2 + 13x \right]_0^{10} = 16.83 \end{aligned}$$

Průměrná teplota na cestě je $16.83\text{ }^{\circ}\text{C}$.



289 - Teplota v pokoji IV



Zadání V místnosti o rozměrech $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ je teplota popsána funkcí:

$$f(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 0.5x + 0.4y + 19, \quad x, y \in \langle 0, 10 \rangle$$

Projdeme se pokojem po největší možné kružnici.

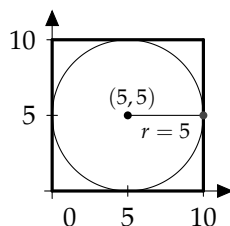
V kterém místě této cesty bude nejtepleji?

Bude tam tepleji než 20°C ?



Řešení

Hledáme vázaný extrém funkce $f(x, y)$ vzhledem k podmínce $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 - 25 = 0$.



Sestavíme Lagrangeovu funkci:

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = -0.1x^2 - 0.1y^2 + 0.5x + 0.4y + 19 + \lambda \left((x - 5)^2 + (y - 5)^2 - 25 \right)$$

Najdeme stacionární body funkce Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \Rightarrow -0.2x + 0.5 + 2\lambda(x - 5) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow -0.2y + 0.4 + 2\lambda(y - 5) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 5)^2 - 25 = 0$$

Z první rovnice vyjádříme $\lambda = \frac{2x-5}{20(x-5)}$ dosadíme do druhé a vyjádříme $y = \frac{1}{5}(6x - 5)$, dosadíme do poslední rovnice a získáme kvadratickou rovnici: $61x^2 - 610x + 900 = 0$

Máme dva stacionární body:

$$A_1 : \quad x_1 = 1.7991, \quad y_1 = 1.1589, \quad \lambda_1 = 0.0219$$

$$A_2 : \quad x_2 = 8.2009, \quad y_2 = 8.8411, \quad \lambda_2 = 0.1781$$

Určíme druhé partiální derivace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -0.2 + 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -0.2 + 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

V obou bodech A_1, A_2 bude extrém, neboť $D_2 = (-0.2 + 2\lambda)^2 > 0$, určíme o jaký extrém se jedná:

$$D_1(A_1) = -0.2 + 2 \cdot 0.0219 = -0.1562 < 0 \quad \text{v } A_1 \text{ je maximum}$$

$$D_1(A_2) = -0.2 + 2 \cdot 0.1781 = 0.1562 > 0 \quad \text{v } A_2 \text{ je minimum}$$

Tedy v bodě $[1.7991, 1.1589]$ je největší teplota 19.9051°C .

Matematika II: Testy

Petra Schreiberová

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

291 - Test 1

1. Je funkce $\ln x - 2x$ primitivní funkcí k funkci $\frac{2}{x}$?

- (a) ano
- (b) ne

2. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$?

- (a) $\sin x = t$
- (b) $\cos x = t$
- (c) $\sin^3 x = t$

3. Kolik konstant bude potřeba určit při rozkladu funkce $R(x) = \frac{x^2 - 3}{2x^4 + 3x + 1}$ na parciální zlomky?

- (a) 4
- (b) 2
- (c) 3

4. Chceme vypočítat délku paraboly $y = x^2$ na intervalu $x \in \langle -2, 2 \rangle$. Jaký vztah pro výpočet je správný?

(a) $\int_{-2}^2 \sqrt{1 + x^4} dx$

(b) $2 \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx$

(c) $\int_0^2 \sqrt{1 + 2x^2} dx$

5. Potřebujeme určit definiční obor funkce $z = \log(x - y) + \arctan 2x$. Které omezující podmínky jsou správně?

- (a) $x - y \geq 0$
- (b) $x - y > 0$
- (c) $x - y \geq 0 \wedge -1 \leq 2x \leq 1$

6. Je-li funkce v bodě spojitá A , pak je v tomto bodě diferencovatelná. Platí toto tvrzení?

- (a) ano
- (b) ne

7. Může existovat lokální extrém i v bodě, který není stacionárním bodem funkce, tj. některá z parciálních derivací v něm neexistuje?

- (a) ano
- (b) ne

8. Máme rovnici $y^{(4)} + y'' = x^2 + y^3$. Kterého řádu je daná diferenciální rovnice?

- (a) druhého řádu
- (b) čtvrtého řádu
- (c) prvního řádu

9. Mějme rovnici $x^2 y' = y^2 + xy$. O jaký typ diferenciální rovnice se jedná?

- (a) lineární
- (b) homogenní
- (c) exaktní

10. Která z rovnic je charakteristickou rovnicí k diferenciální rovnici $y'' - 3y = 0$?

- (a) $r^2 - 3r = 0$
- (b) $r^2 - 3 = 0$
- (c) $r - 3 = 0$

11. Mějme rovnici $y'' - 3y = e^{4x} \cos x$. Jedná se o speciální pravou stranu a lze tedy k řešení využít metodu neurčitých koeficientů?

- (a) ano
- (b) ne

292 - Test 2

1. Platí následující?

$$\int 3x \cos x dx = 3 \int x dx \int \cos x dx$$

- (a) ano
(b) ne

2. Jakou funkci zvolíte v metodě per partes za u při výpočtu integrálu $\int \sin 2x(x^2 - 3)dx$?

- (a) $x^2 - 3$
(b) $\sin 2x$

3. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{2}{4 \sin x + 2} dx$?

- (a) $\sin x = t$
(b) $\cos x = t$
(c) univerzální

4. Jaký je správný vztah pro určení obsahu útvaru ohraničeného dvěma funkcemi, kde $f(x) \leq g(x)$, a přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$)?

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

(b) $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$

5. Zkuste odhadnout, co bude grafem funkce $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

- (a) horní polorovina kulové plochy se středem v $[0,0,0]$ a poloměrem 3
(b) kulová plocha se středem v $[0,0,0]$ a poloměrem 3
(c) dolní polorovina kulové plochy se středem v $[0,0,0]$ a poloměrem 9

6. Je funkce $z = x^2 - 2xy - y^2$ diferencovatelná v bodě $A = [1, 1]$?

- (a) ano
(b) ne

7. Platí následující tvrzení? Existují-li v bodě nulové parciální derivace prvního řádu, pak je v bodě lokální extrém.

- (a) ano
(b) ne

8. Kolik funkcí vyhovuje rovnici $y' - 3 \sin x = 0$?

- (a) jedna
(b) nekonečně mnoho
(c) žádná

9. Nalezli jsme obecné řešení homogenní lineární DR ve tvaru $y = cxe^x$ a po aplikaci metody variace konstanty funkci $c(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + c$. Jak bude vypadat obecné řešení dané lineární rovnice v úplném tvaru?

- (a) $y = (-xe^{-x} - e^{-x})xe^x + c$
(b) $y = -xe^{-x} - x + c$
(c) $y = (-xe^{-x} - e^{-x} + c)xe^x$

10. Charakteristická rovnice má kořeny $r_{1,2} = \pm 4i$. Jak vypadá fundamentální systém řešení?

- (a) $y_1 = \cos 4ix$, $y_2 = \sin 4ix$
(b) $y_1 = \cos 4x$, $y_2 = \sin 4x$
(c) $y_1 = e^x \cos 4x$, $y_2 = e^x \sin 4x$

11. Jakou metodu zvolíte při řešení rovnice $y'' + 2y' - 3y = 3 \cos^2 x$?

- (a) metodu neurčitých koeficientů
(b) metodu variace konstant

293 - Test 3

1. Kolik primitivních funkcí existuje k funkci $\sin 4x$?

- (a) 1
(b) ∞

2. Lze integrál $\int e^x \cos x dx$ řešit substituční metodou?

- (a) ano
(b) ne

3. Jaký první krok zvolíte při výpočtu integrálu $\int \cos^4 x dx$?

- (a) $\sin x = t$
(b) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
(c) $\cos x = t$

4. Platí pro lichou funkci následující tvrzení?

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

- (a) ne
(b) ano

5. Chceme určit objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = \arcsin x$, $y = 0$ na intervalu $x \in$

$\langle 0, 1 \rangle$ kolem osy x . Jaký vztah pro výpočet je správný?

- (a) $\int_0^1 \arcsin^2 x dx$
(b) $\pi \int_0^1 \arcsin^2 x dx$
(c) $\pi \int_0^1 \arcsin x dx$

6. Které označení je správné pro parciální derivaci 3. řádu, která vznikne derivací smíšené parciální derivace 2. řádu $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ podle y ?

- (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x \partial y}$
(b) $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$
(c) $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$

7. Platí následující tvrzení? Funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v bodě právě tehdy, když je v tomto bodě diferencovatelná.

- (a) ano
(b) ne

8. Nalezli jsme obecné řešení rovnice ve tvaru $y = 3x^2 + 2x + c$. Chceme najít partikulární řešení pro počáteční podmínku $y(1) = 0$. Jaká je hodnota konstanty c ?

- (a) $c = 1$
(b) $c = 5$
(c) $c = -5$

9. Mějme rovnici $(x^3 + 1)y' = 2xy + x^2$. O jaký typ diferenciální rovnice se jedná?

- (a) lineární
(b) homogenní
(c) exaktní

10. Určete charakteristickou rovnici k diferenciální rovnici $-8y'' + 5y' = 0$.

- (a) $-8r^2 + 5r = 0$
(b) $r^2 + 5r = 0$
(c) $-8r^2 + 5 = 0$

11. Jak vypadá tvar partikulárního řešení pro rovnici $y'' - 4y = (x^2 + 2)e^{2x}$?

- (a) $(Ax^2 + B)e^{2x}$
(b) $(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$
(c) $(Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{2x}$

294 - Test 4

1. Existuje k funkci $\frac{1}{x^3}$ na intervalu $(-2, 2)$ funkce primitivní?

- (a) ne
(b) ano

2. Jakou metodu zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$?

- (a) substituční
(b) per partes

3. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \sin^5 x dx$?

- (a) $\sin x = t$
(b) univerzální
(c) $\cos x = t$

4. Platí následující rovnost?

$$\int_1^4 (3x - e^{2x}) dx = 3 \int_1^4 x dx - \int_1^4 e^{2x} dx$$

- (a) ne
(b) ano

5. Který vzorec je správný pro výpočet obsahu kruhu se středem v $[0, 0]$ a poloměrem r ?

(a) $\int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 t dt$
(b) $\int_0^{2\pi} r^2 \sin t \cos t dt$

6. Kolikrát budete derivovat podle proměnné x , pokud víte, že $\frac{\partial^8 f}{\partial^3 x \partial y \partial^3 x \partial y}$?

- (a) 3-krát
(b) 6-krát
(c) 1-krát

7. Určete směrový vektor normály ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě A .

(a) $\vec{s}_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), 1 \right)$
(b) $\vec{s}_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1 \right)$
(c) $\vec{s}_n = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial x}(A), 1 \right)$

8. Mějme rovnici $y' - 3 \sin y = x$. Jedná se o separovatelnou diferenciální rovnici?

- (a) ano
(b) ne

9. Mějme zadanou nehomogenní lineární diferenciální rovnici $xy' = 4y + 2$. Jaký tvar je správný pro příslušnou homogenní lineární rovnici?

- (a) $xy' = 0$
(b) $y' - 4y = 0$
(c) $xy' = 4y$

10. Jak vypadá tvar partikulárního řešení pro rovnici $y'' - 4y = 3 \cos 2x$?

- (a) $A \cos 2x$
(b) $A \cos 2x + B \sin 2x$
(c) $Ax \cos 2x$

11. Vypočítejte wronskián fundamentálního systému řešení $y_1 = e^{3x} \cos 2x$, $y_2 = e^{3x} \sin 2x$.

- (a) $W = 2e^{3x} \cos 2x \sin 2x$
(b) $W = e^{6x} \cos 2x$
(c) $W = 2e^{6x}$

295 - Test 5

1. Platí následující rovnost?

$$\int (3e^x - 4 \ln x) dx = 3 \int e^x dx - 4 \int \ln x dx$$

- (a) ne
(b) ano

2. Chceme vypočítat integrál $\int x^2 \sqrt{x^3 + 2} dx$.
Je substituce $x^3 + 2 = t$ správně zvolená?

- (a) ano
(b) ne

3. Zjistěte výpočtem zda platí:

$$\int_{-4}^1 |3x| dx = \left| 3 \int_{-4}^1 x dx \right|$$

- (a) platí
(b) neplatí

4. Jaký je správný vztah pro určení objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $f(x) \leq g(x)$ kolem osy x pro $x \in \langle a; b \rangle$?

- (a) $\pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx$
(b) $\pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$

(c) $\pi \int_a^b (g(x) - f(x))^2 dx$

5. Jakou hodnotu má $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ funkce $f(x, y) = 3xy - \frac{y}{x}$ v bodě $[1, 0]$?

- (a) 2
(b) 0
(c) 6

6. Mějme sestavenou matici z druhých parciálních derivací v bodě (x_0, y_0) . Pokud má funkce v bodě (x_0, y_0) lokální maximum, která kombinace musí platit.

- (a) determinant matice je větší než nula ($D_2 > 0$) a $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
(b) determinant matice je větší než nula ($D_2 > 0$) a $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
(c) determinant matice je menší než nula ($D_2 < 0$) a $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$

7. Potřebujeme určit definiční obor funkce $z = \frac{\sin 2x}{1-x} + \sqrt{\ln(-x+2)}$. Které omezující podmínky jsou správně?

- (a) $1-x \neq 0 \wedge -x+2 > 0$
(b) $1-x \neq 0 \wedge -x+2 > 0 \wedge \ln(-x+2) \geq 0$

(c) $1-x > 0 \wedge \ln(-x+2) \geq 0$

8. Mějme zadanou diferenciální rovnici $xy' = 4y + 2$. Jaký tvar je správný po separaci proměnných?

- (a) $\frac{dy}{4y+2} = \frac{dx}{x}$
(b) $x dx = (4y+2) dy$
(c) $\frac{dy}{4y} = 2x dx$

9. Mějme rovnici $x^2 y dx + (2x + y) dy = 0$. Jedná se o homogenní diferenciální rovnici?

- (a) ano
(b) ne

10. Charakteristická rovnice má kořeny $r_{1,2} = 5$. Jak vypadá obecné řešení dané homogenní diferenciální rovnice?

- (a) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{5x}$
(b) $y = C e^{5x}$
(c) $y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$

11. Jakou metodu zvolíte při řešení rovnice $y'' - 4y = 2x \sin x$?

- (a) metodu neurčitých koeficientů
(b) metodu variace konstant

296 - Test 6

1. Ke které funkci je funkce $F(x) = \frac{4x^3}{3} \cos x - 2 \ln(1-x)$ primitivní?

(a) $f(x) = 2x^2 \left(2 \cos x - \frac{2}{3}x \sin x + \frac{1}{x^2(1-x)} \right)$

(b) $f(x) = 4x^2 \cos x + \frac{4}{3}x^3 \sin x - \frac{2}{1-x}$

2. Lze řešit integrál $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ substituční metodou?

(a) ano

(b) ne

3. Je integrál $\int_0^{2\pi} -2 \sin x dx$ roven 0 (zkuste vyjít z grafu funkce a obsahu plochy)?

(a) ano

(b) ne

4. Který integrál je správně po aplikaci substituční metody při výpočtu $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$?

(a) $-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-t^2}{t^3} dt$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-t^2}{t^3} dt$

(c) $-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1-t^2}{t^3} dt$

5. Chceme určit obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky dané parametrickými rovnicemi pro $x = t + 2$, $y = 3 - t$ kolem osy x . Jaký vztah pro výpočet je správný?

(a) $2\pi \int_0^3 (3-t) dt$

(b) $2\sqrt{2}\pi \int_0^3 (3-t) dt$

(c) $2\sqrt{2}\pi \int_0^3 (t+2) dt$

6. Který vztah je správný pro výpočet tečné roviny ke grafu funkce v bodě $A = [a, b, c]$?

(a) $z = c - f'_x(a, b)(x - a) - f'_y(a, b)(y - b)$

(b) $z = c + f'_x(a, b)(y - b) + f'_y(a, b)(x - a)$

(c) $z = c + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$

7. Mějme funkci $f(x, y) = x^2 + y^3$, která má v počátku stacionární bod. Jedná se o extrém?

(a) ano

(b) ne

8. Máme rovnici $y' = 3x - 2$. O jaký typ diferenciální rovnice jde?

(a) separovatelná

(b) homogenní

(c) lineární

9. Mějme rovnici $x - 2 + y + y' = 0$. Jak vypadá zkrácený tvar této lineární rovnice?

(a) $y + y' = 0$

(b) $y' = 2 - x$

(c) $y' = -x + 2 - y$

10. Máme obecné řešení zkrácené rovnice $y_0 = C_1 + C_2 e^x$ a nalezené funkce při použití metody variace konstant $C_1(x) = \cos x + c_1$ a $C_2(x) = x + 1 + c_2$. Jak bude vypadat obecné řešení úplné rovnice?

(a) $y = c_1 + c_2 e^x + \cos x + x + 1$

(b) $y = c_1 \cos x + c_2 e^x + x + 1$

(c) $y = c_1 + c_2 e^x + \cos x + (x + 1)e^x$

297 - Test 7

1. Lze při výpočtu integrálu použít naznačený postup?

$$\int (3^x - 2 \sin x) dx = \int 3^x dx - 2 \int \sin x dx$$

- (a) ano
(b) ne

2. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int \frac{x^2}{e^x} dx$?

- (a) $u' = x^2, v = e^x$
(b) $u' = e^x, v = x^2$
(c) $u' = e^{-x}, v = x^2$

3. Je integrál $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ roven 0 (zkuste vyjít z grafu funkce a obsahu plochy)?

- (a) ano
(b) ne

4. Který integrál je správně po aplikaci substituční metody při výpočtu $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$?

- (a) $\int_1^e t dt$
(b) $\int_0^1 t dt$

(c) $\int_1^e \frac{1}{t} dt$

5. Chceme určit objem koule o poloměru $r > 0$. Jaký vztah pro výpočet je správný?

- (a) $\pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$
(b) $\pi \int_{-r}^r (r^2 + x^2) dx$
(c) $\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$

6. Kolikrát budete derivovat podle proměnné y , pokud víte, že $\frac{\partial^7 f}{\partial x^2 \partial y^2 \partial x^2 \partial y}$?

- (a) 2-krát
(b) 4-krát
(c) 3-krát

7. Určete normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě A .

- (a) $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), 1 \right)$
(b) $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1 \right)$
(c) $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial x}(A), 1 \right)$

8. Mějme rovnici $yy' - 3 \sin y = x$. Jedná se o separovatelnou diferenciální rovnici?

- (a) ano
(b) ne

9. Mějme zadanou nehomogenní lineární diferenciální rovnici $x + y' = 4y + 2$. Jaký tvar je správný pro příslušnou homogenní lineární rovnici?

- (a) $x + y' = 0$
(b) $x + y' - 4y = 0$
(c) $y' - 4y = 0$

10. Jak vypadá tvar partikulárního řešení pro rovnici $2y'' + 8y' = 2x^2 - 3$?

- (a) $Ax^2 - B$
(b) $Ax^3 + Bx^2 + Cx$
(c) $Ax^2 + Bx + C$

11. Vypočítejte wronskián fundamentálního systému řešení $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-x}$.

- (a) $W = -e^x$
(b) $W = e^{2x}$
(c) $W = -3e^x$

298 - Test 8

1. Ke které funkci je funkce $F(x) = \arcsin 2x - \ln(-x)$ primitivní?

(a) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{-x}$

(c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{-x}$

2. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int \frac{2}{x\sqrt{\ln^3 x}} dx$?

(a) $\ln^3 x = t$

(b) $\ln x = t$

(c) $\sqrt{\ln^3 x} = t$

3. Platí následující vlastnost?

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

(a) ano

(b) ne

4. Který integrál je správně po aplikaci metody per partes při výpočtu $\int_0^\pi x \sin x dx$?

(a) $[x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x dx$

(b) $-[x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx$

(c) $-[x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x dx$

5. Chceme vypočítat délku paraboly $y = -2x^2$ na intervalu $x \in \langle -3, 3 \rangle$. Jaký vztah pro výpočet je správný?

(a) $2\pi \int_0^3 \sqrt{1-16x^2} dx$

(b) $2\pi \int_0^3 \sqrt{1+16x^2} dx$

(c) $\pi \int_{-3}^3 \sqrt{1-16x^2} dx$

6. Které označení je správné pro parciální derivaci 3.řádu, která vznikne derivací smíšené parciální derivace 2.řádu $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ podle x ?

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x \partial x}$

(b) $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$

(c) $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$

7. Nalezli jsme obecné řešení rovnice ve tvaru $y = -x^2 - 2 + c$. Chceme najít partikulární řešení pro počáteční podmínku $y(2) = 4$. Jaká je hodnota konstanty c ?

(a) $c = 10$

(b) $c = 20$

(c) $c = -8$

8. Mějme rovnici $x \ln y - y' = 2x$. O jaký typ diferenciální rovnice se jedná?

(a) lineární

(b) homogenní

(c) separovatelná

9. Určete charakteristickou rovnici k diferenciální rovnici $2y'' + 5y = 0$.

(a) $r^2 + 5 = 0$

(b) $2r^2 + 5 = 0$

(c) $2r^2 + 5r = 0$

10. Jak vypadá tvar partikulárního řešení pro rovnici $y'' + 2y' = (x+2) \sin x$?

(a) $(Ax+B) \sin x + (Cx+D) \cos x$

(b) $(Ax+B) \sin x + C \cos x$

(c) $(Ax+B) \sin x$

299 - Test 9

1. Ke které funkci je funkce $F(x) = x^2 - 4x + \cos x$ primitivní?

- (a) $f(x) = 2x - 4x^2 + \sin x$
- (b) $f(x) = 2x - 4 - \sin x$
- (c) $f(x) = x + 4 - \sin x$

2. Lze řešit integrál $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 1} dx$ substituční metodou?

- (a) ano
- (b) ne

3. Platí následující rovnost?

$$\int_2^3 (2x^2 - \ln 2x) dx = 2 \int_2^3 x^2 dx - 2 \int_2^3 \ln x dx$$

- (a) ano
- (b) ne

4. Kolik konstant bude potřeba určit při rozkladu funkce $R(x) = \frac{4x}{-x^5 + 4x}$ na parciální zlomky?

- (a) 4

- (b) 2
- (c) 5

5. Jaký je správný vztah pro určení objemu útvaru ohraničeného dvěma funkcemi, kde $f(x) \geq g(x)$, a přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$), který rotuje kolem osy x ?

- (a) $\int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dt$
- (b) $\int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dt$
- (c) $\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dt$

6. Platí následující tvrzení? Existují-li v bodě nulové parciální derivace prvního řádu, pak není v bodě lokální extrém.

- (a) ano
- (b) ne

7. Kolik funkcí vyhovuje rovnici $2y' + 4 \ln x = y$?

- (a) jedna

- (b) nekonečně mnoho
- (c) žádná

8. Nalezli jsme obecné řešení homogenní lineární DR ve tvaru $y = ce^{2x}$ a po aplikaci metody variace konstanty funkci $c(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$. Jak bude vypadat obecné řešení dané lineární rovnice v úplném tvaru?

- (a) $y = -\frac{1}{2} + c$
- (b) $y = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$
- (c) $y = -\frac{1}{2}$

9. Charakteristická rovnice má kořeny $r_{1,2} = 2$. Jak vypadá fundamentální systém řešení?

- (a) $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$
- (b) $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{2x}$
- (c) $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$

10. Jakou metodu zvolíte při řešení rovnice $-y'' + 4y' = 2x \cos 2x$?

- (a) metodu neurčitých koeficientů
- (b) metodu variace konstant

300 - Test 10

1. Kolik primitivních funkcí existuje k funkci $f(x) = e^{-2x+1}$?

- (a) ∞
- (b) 1
- (c) 0

2. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int \ln^2 x dx$?

- (a) $u' = \ln^2 x$, $v = 1$
- (b) $u' = 1$, $v = \ln^2 x$
- (c) $u' = \ln x$, $v = \ln x$

3. Platí pro sudou funkci následující tvrzení?

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

- (a) ano
- (b) ne

4. Kolik konstant bude potřeba určit při rozkladu funkce $R(x) = \frac{4x}{-3x^2 + 4x + 1}$ na parciální zlomky ?

- (a) 3
- (b) 2
- (c) 4

5. Jaký je správný vztah pro určení obsahu útvaru ohraničeného dvěma funkcemi, kde $f(x) \geq g(x)$, a přímkami $x = a$, $x = b$ ($a < b$)?

- (a) $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$
- (b) $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$
- (c) $\int_b^a (g(x) - f(x)) dx$

6. Máme rovnici $y^{(3)} + y' = x \ln y$. Kterého řádu je daná diferenciální rovnice?

- (a) třetího řádu
- (b) čtvrtého řádu

(c) prvního řádu

7. Mějme rovnici $x^2 + yy' = x$. O jaký typ diferenciální rovnice se jedná?

- (a) lineární
- (b) homogenní
- (c) exaktní

8. Která z rovnic je charakteristickou rovnicí k diferenciální rovnici $2y'' - 3y' = 0$?

- (a) $2r^2 - 3 = 0$
- (b) $2r^2 - 3r = 0$
- (c) $2r - 3 = 0$

9. Mějme rovnici $-4y'' + y = \sin 2x \cos x$. Jedná se o speciální pravou stranu a lze tedy k řešení využít metodu neurčitých koeficientů?

- (a) ano
- (b) ne

Literatura

- [1] AKSOY, Asuman G a Mohamed A KHAMSI. *A problem book in real analysis*. 1st ed. New York: Springer, c2010, 254 p. ISBN 978-1-4419-1295-4.
- [2] BURDA, Pavel, Radim HAVELEK, Radoslava HRADECKÁ a Pavel KREML. *Matematika I*. 1. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006, 338 s. ISBN 80-248-1199-5.
- [3] CALLAHAN, James. *Advanced calculus: a geometric view*. New York: Springer, c2010, xvi, 526 p. Undergraduate texts in mathematics. ISBN 14-419-7331-1, 978-1-4419-7331-3.
- [4] *GeoGebra* [online]. 2013 [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: <http://www.geogebra.org/cms/cs/>
- [5] GERGELITSOVÁ, Šárka. *Počítač ve výuce nejen geometrie: průvodce Geogebrou*. 1. vyd. Praha: Generation Europe, 2011, 247 s. ISBN 978-809-0497-436.
- [6] *Gnuplot* [online]. 2013 [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: <http://www.gnuplot.info/>
- [7] HOHENWARTER, Judith a Markus HOHENWARTER. *Introduction to GeoGebra* [online]. 2013 [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: <http://www.geogebra.org/book/intro-en.pdf>
- [8] Manuály a návody k programu GeoGebra v českém jazyce. [online]. [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: <http://wiki.geogebra.org/cs/>
- [9] KREML, Pavel, Jaroslav VLČEK, Petr VOLNÝ, Jiří KRČEK a Jiří POLÁČEK. *Matematika II*. 1. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2007, 424 s. ISBN 978-80-248-1316-5.
- [10] Pracovní listy a studijní materiály do Matematiky II. [online]. [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: <http://mdg.vsb.cz/wiki/index.php/MatematikaII>
- [11] REKTORYS, Karel. *Co je a k čemu je vyšší matematika*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2001, 156 s. ISBN 80-200-0883-7.
- [12] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky I*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2009, xxxii, 720 s. ISBN 978-80-7196-180-21.
- [13] *Studijní opory* [online]. [cit. 2013-12-09]. Dostupné z: <http://www.studopory.vsb.cz/>
- [14] VLČEK, Jaroslav a Jiří VRBICKÝ. *Diferenciální rovnice: matematika IV*. 1. vyd. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 1997, 131 s. ISBN 80-707-8438-5.
- [15] VRBENSKÁ, Helena a Jana BĚLOHLÁVKOVÁ. *Základy matematiky pro bakaláře I*. 3. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009, 89 s. ISBN 978-80-248-2093-4.
- [16] VRBENSKÁ, Helena a Jana BĚLOHLÁVKOVÁ. *Základy matematiky pro bakaláře II*. 3. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009, 103 s. ISBN 978-80-248-1957-0.