Obyčejné diferenciální rovnice

Petra Schreiberová, Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, FS
Katedra matematiky, FAST
Vysoká škola báňská – Technická Univerzita Ostrava

Ostrava 2019

OBSAH

KAPITOLA

1

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE N-TÉHO ŘÁDU

Za diferenciální rovnici označujeme rovnici, v níž je neznámou funkce a daná rovnice obsahuje derivace neznámé funkce. Rovnice vyjadřuje vztah mezi neznámou funkcí a jejími derivacemi.

Definice 1.1 Rovnice tvaru

$$F(x, y, y', , \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

se nazývá **obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu** pro neznámou funkci $y = y(x)$.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace neznámé funkce $y(x)$, který se v rovnici vyskytuje.

Řešením (integrálem) diferenciální rovnice na intervalu I je každá funkce $y(x)$, která má spojité derivace až do řádu n včetně a dané diferenciální rovnici vyhovuje.

Rozlišujeme následující typy řešení:

- **obecné řešení** rovnice n-tého řádu představuje množinu funkcí tvaru

  $$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \quad \text{příp.} \quad y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

  tj. množina funkcí obsahující n konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$,

- **partikulární řešení** y_p je konkrétní řešení, které získáme z obecného řešení volbou, nebo výpočtem konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$,

- **výjimečné (singulární) řešení** je řešení, které nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Příklad 1.1 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y''' = 6x - 6$.

Řešení:
V zadání diferenciální rovnice se nachází neznámá funkce y pouze ve své třetí derivaci, proto k nalezení obecného řešení použijeme přímou integraci. Integrací y''' dostaneme druhou derivaci funkce y.

$$y'' = \int y''' dx = \int (6x - 6)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y'' = 3x^2 - 6x + C_1.$$

Stejným způsobem budeme snižovat řád diferenciální rovnice, dokud nedostaneme neznámou funkci y. Tedy

$$y' = \int y''\mathrm{d}x = \int (3x^2 - 6x + C_1)\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad y' = x^3 - 3x^2 + C_1 x + C_2,$$
$$y = \int y' dx = \int (x^3 - 3x^2 + C_1 x + C_2)\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{x^4}{4} - x^3 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

V obecném řešení diferenciální rovnice 3. řádu se vyskytují právě 3 integrační konstanty $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Partikulárním řešením rozumíme konkrétní křivku (jediné řešení). Tu získáme libovolnou volbou konstant C_1, C_2 a C_3, např. pro $C_1 = 2$, $C_2 = 3$ a $C_3 = 5$ dostaneme partikulární řešení

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 3x + 5.$$

KAPITOLA

2

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

Diferenciální rovnici ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{nebo} \quad y' = f(x, y)$$

nazýváme **diferenciální rovnicí prvního řádu**. Funkce $f(x, y)$ je funkce dvou proměnných.

Poznámka

Řešení diferenciální rovnice prvního řádu $F(x, y, y') = 0$ se také nazývá *integrál diferenciální rovnice* a jeho graf v rovině xy *integrální křivka*. Integrální křivky mohou být dány i implicitně.

Geometrická interpretace ODR 1. řádu $y' = f(x, y)$

Uvažujme x, y jako souřadnice bodu (x, y) v rovině xy. Každému bodu (x, y) je přiřazena hodnota $f(x, y)$, která je spojena s derivací y'. Derivace geometricky udává směr $\Rightarrow$ definujeme **směrové pole** $\{(x, y, f(x, y))\}$.

Uspořádaným trojicím $(x, y, f(x, y))$ říkáme **lineární elementy** a znázorňujeme je pomocí krátkých úseček se středem v bodě (x, y) a směrnicí $f(x, y)$.

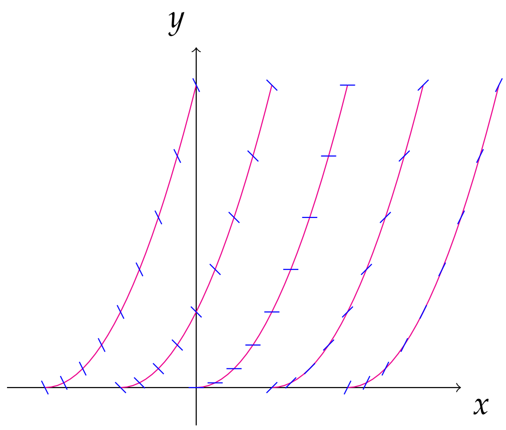
Integrální křivky rovnice $y' = f(x, y)$ mají v každém bodě tečnu orientovanou shodně se směrovým polem. Křivky, ve kterých je derivace konstantní ($y' = k, k \in \mathbb{R}$), nazýváme **izokliny**. Směrové pole je tedy systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám.

Příklad 2.2 Pomocí izoklin znázorněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = x - \sqrt{y}$.

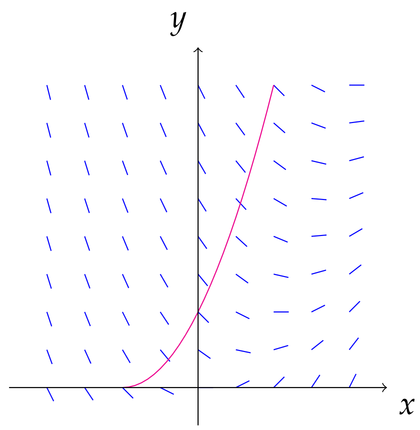
Řešení:
Funkce $f(x,y) = x - \sqrt{y}$ je definovaná pro $\forall x \in R$ a $y \geq 0$.
Izokliny nalezneme tak, že funkci položíme rovnu konstantě a vyjádříme y.

$$x - \sqrt{y} = k \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = x - k \quad \Rightarrow \quad y = (x-k)^2;\ k \in R, x \geq k.$$

Jedná se o pravou polovinu paraboly s vrcholem v $[k, 0]$.



Izokliny rovnice $y' = x - \sqrt{y}$.



Směrové pole rovnice $y' = x - \sqrt{y}$.

Cauchyova úloha

K jednoznačné předpovědi budoucího stavu je nutné znát i stav současný. V praktických úlohách nás proto často nezajímají všechna řešení dané úlohy, ale pouze taková, která splňují určité podmínky. Jednou z možných podmínek je tzv. **počáteční podmínka**. Je-li k dané diferenciální rovnici zadána současně i počáteční podmínka, jedná se o tzv. **Cauchyovu úlohu**. Jde o základní úlohu teorie diferenciálních rovnic.

Definice 2.2 Cauchyovou úlohou (počáteční úlohou) pro diferenciální rovnici $F(x, y, y') = 0$ označujeme úlohu

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Řešením Cauchyho úlohy je takové řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice, které je definováno na nějakém intervalu I a splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ (kde $x_0 \in I$).

Příklad 2.3 Určete řešení diferenciální rovnice $y'(y - x) = (y - x)\sin x$, za podmínky $y(0) = 2$.

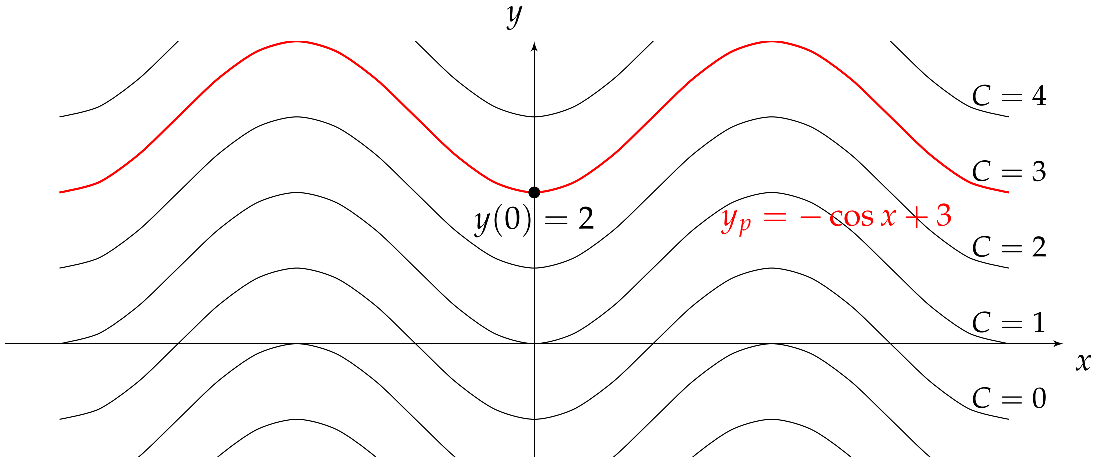
Řešení:
Zadanou rovnice upravíme do tvaru $y' = f(x,y)$, rovnici vydělíme výrazem $(y - x)$ za předpokladu $y \neq x$. Dostáváme rovnici ve tvaru $y' = f(x)$, což vede k úloze nalezení primitivní funkce

$$y' = \sin x \quad \Rightarrow \quad y = \int \sin x \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y = -\cos x + C, \quad C \in R.$$

Určili jsme obecné řešení. Počáteční podmínku $y(0) = 2$ dosadíme do obecného řešení a určíme c.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = -\cos 0 + C \quad \Rightarrow 2 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 3$$

$$y_p = -\cos x + 3 \text{ je hledaným partikulárním řešením.}$$



Partikulární řešení y_p

2.1 Metoda separace proměnných

Metoda se používá pro řešení separovatelných diferenciálních rovnic.

Definice 2.3 **Diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými** rozumíme každou rovnici, kterou lze zapsat ve tvaru

$$Q(y)y' = P(x), \quad \text{tj.} \quad Q(y)dy = P(x)\mathrm{d}x,$$

pokud nahradíme derivaci y' podílem $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Okamžitě je vidět, že v rovnici jsou proměnné separovány (odděleny) na jednotlivé strany rovnice a je možné celou rovnici integrovat, což přímo vede k řešení

$$\int Q(y)\mathrm{d}y = \int P(x)\mathrm{d}x + C.$$

Po integraci na obou stranách rovnice vyskočí integrační konstanty, tyto se ale spojují do jedné a bývá obvyklé tuto integrační konstantu uvádět u výrazu s nezávislou proměnnou.

V praxi se můžeme setkat s řadou úloh, které lze pomoci jednoduchých manipulací převést na diferenciální rovnici separovanou. Takové rovnice se nazývají **separovatelné**. Rozlišujeme následující typy separovatelných rovnic:

- $y' = f(x)g(y)$,
- $y' = f(ax + by + c)$,
- $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ - homogenní diferenciální rovnice.

2.1.1 Řešení rovnice typu $y' = f(x)g(y)$

Rovnici typu $y' = f(x)g(y)$ lze za předpokladu $g(y) \neq 0$ a užitím identity $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ upravit na tvar:

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x,$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Její obecné řešení lze zapsat ve tvaru

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C.$$

Poznámka

Tvar obecného řešení je vhodné v některých případech upravit, hlavně v případech, když po integraci na levé straně rovnice dostaneme logaritmickou funkci. Pravou stranu řešení převedeme také na logaritmickou funkci užitím vztahu $A = \ln \mathrm{e}^A$.
Předpokládejme, že obecné řešení nějaké diferenciální rovnice má tvar $\ln m(y) = n(x) + C$. Na pravé straně zavedeme logaritmickou funkci

$$\ln m(y) = \ln \mathrm{e}^{n(x)+C} \quad \Rightarrow \quad \ln m(y) = \ln\left(\mathrm{e}^{n(x)}\mathrm{e}^{C}\right).$$

Z rovnosti logaritmů plyne

$$m(y) = \mathrm{e}^{n(x)}\mathrm{e}^{C}.$$

Bez újmy na obecnosti bývá zvykem novou konstantu e^C označit stejně jako původní integrační konstantu, tedy „$\mathrm{e}^C = C$“. Dostáváme tedy upravený tvar obecného řešení

$$m(y) = C \cdot \mathrm{e}^{n(x)}.$$

Příklad 2.4 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x - \mathrm{e}^{-x}}{y + \mathrm{e}^y}$.

Řešení:
$y' = (x - \mathrm{e}^{-x}) \cdot \dfrac{1}{y + \mathrm{e}^y} \quad \Rightarrow$ rovnice je ve tvaru $y' = f(x)g(y)$, budeme ji řešit metodou separace proměnných.

Rovnici zapíšeme v separovaném tvaru, tzn. rovnici vynásobíme výrazem $(y + \mathrm{e}^y)$ a derivaci y' nahradíme podílem diferenciálů $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

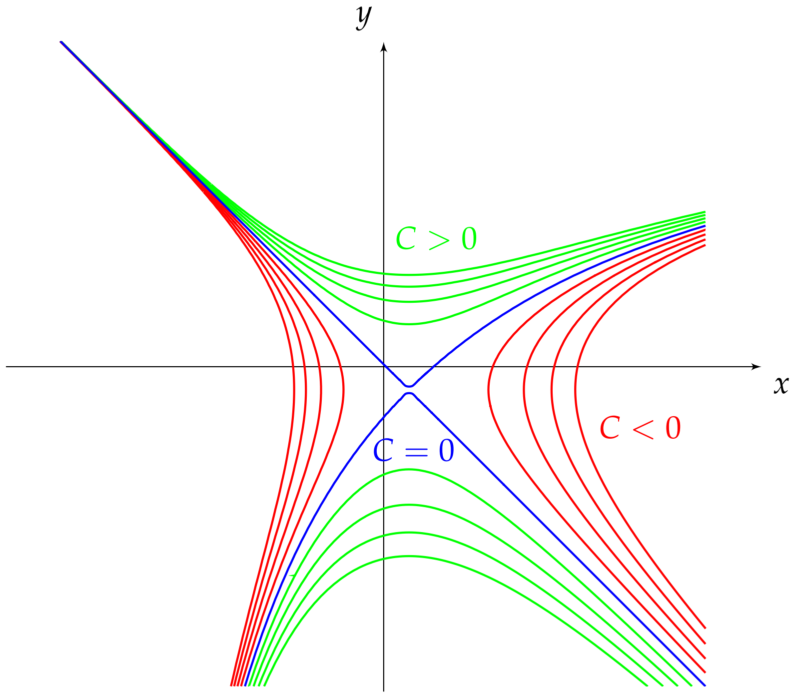
$$(y + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y = \left(x - \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

Integrací obou stran rovnice dostaneme

$$\int (y + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y = \int \left(x - \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x + C \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} + \mathrm{e}^y = \frac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{-x} + C.$$

Obecné řešení obdržíme ve tvaru

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + e^y - e^{-x} = C.$$



Obecné řešení y

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' \tan x - y = 3$

b) $xy' + y = y^2$

c) $y' = 10^{x+y}$

d) $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

e) $y' + \sin\dfrac{x+y}{2} = \sin\dfrac{x-y}{2}$

f) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$

g) $1 + y^2 + xyy' = 0$

h) $(1+e^x)yy' = e^y$

i) $(xy^2 + x)\mathrm{d}x + (y - x^2 y)\mathrm{d}y = 0$

j) $\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x = y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y$

k) $e^{-y}\left(1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 1$

l) $\dfrac{x^3\mathrm{d}x}{\sin y} + \dfrac{y\mathrm{d}y}{x} = 0$

Příklad 2.5 Řešte Cauchyho úlohu $\frac{y'}{y} = -2\sin x,\, y(\pi) = 1.$

Řešení:
Jedná se o separovanou rovnici. Derivaci y' nahradíme podílem diferenciálů $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a upravíme:

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = -2\sin x \mathrm{d}x.$$

Po integraci dostaneme

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -2\int \sin x \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2\cos x + C.$$

Obecné řešení upravíme

$$\ln|y| = 2\cos x + C \quad \Rightarrow \quad y = C\mathrm{e}^{2\cos x}.$$

Dosazením počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty C

$$1 = C\mathrm{e}^{2\cos\pi} \quad \Rightarrow \quad C = \mathrm{e}^2.$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$y_p = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{2\cos x} \quad \Rightarrow \quad y_p = \mathrm{e}^{2\cos x + 2}.$$

Příklad 2.6 Řešte Cauchyho úlohu $(8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y)\, y' = 5x,\, y\left(\frac{4}{5}\right) = 1.$

Řešení:
Jedná se o separovanou rovnici. Derivaci y' nahradíme podílem diferenciálů $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a upravíme:

$$\left(8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y\right)\mathrm{d}y = 5x\mathrm{d}x.$$

Nyní obě strany rovnice integrujeme

$$\int \left(8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y\right)\mathrm{d}y = \int 5x\mathrm{d}x.$$

Obecné řešení má tvar

$$y^8 + y^6 + y^4 + y^2 = \frac{5}{2}x^2 + C, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty c

$$1^8 + 1^6 + 1^4 + 1^2 = \frac{5}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{12}{5}.$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$y^8 + y^6 + y^4 + y^2 = \frac{5}{2}x^2 + \frac{12}{5}.$$

Příklad 2.7 Za jakou dobu klesne teplota tělesa zahřátého na 90 °C na 50 °C, jestliže teplota okolí je rovna 25 °C a za prvních 10 minut se těleso ochladilo na 73 °C.

Řešení:
Rychlost ochlazování tělesa představuje pokles teploty τ za jednotku času t a je vyjádřena derivací $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}$. Podle Newtonova zákona vedení tepla je rychlost ochlazování tělesa přímo úměrná rozdílu teplot tělesa a okolního prostředí. Za předpokladu, že se teplota okolí nemění, bude mít diferenciální rovnice ochlazování tělesa tvar

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -k(\tau - \tau_0),$$

kde τ je teplota tělesa, τ_0 je teplota okolí a $k > 0$ je koeficient úměrnosti.
Rovnici řešíme separací proměnných:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - \tau_0} = -k\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln|\tau - \tau_0| = -kt + c$$

Obecné řešení upravíme a dostáváme

$$\tau = \tau_0 + c_1 \mathrm{e}^{-kt}.$$

Dosadíme počáteční podmínku, v čase $t_0 = 0$ je $\tau = 90$ a $\tau_0 = 25$.

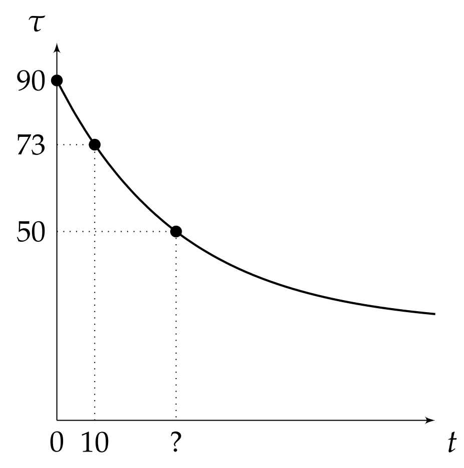
$$90 = 25 + c_1 \mathrm{e}^{-k\cdot 0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 65.$$

Víme, že v čase $t = 10$ je $\tau = 73$ a $\tau_0 = 25$. Po dosazení do vztahu pro τ platí:

$$73 = 25 + 65\mathrm{e}^{-k\cdot 10} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-k\cdot 10} = \frac{48}{65} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^{10} = \frac{48}{65} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-k} = \left(\frac{48}{65}\right)^{\frac{1}{10}},$$

a tedy

$$\tau = 25 + 65 \cdot \left(\frac{48}{65}\right)^{\frac{t}{10}}.$$



Křivka chladnutí tělesa

Určíme hledaný čas pro $\tau = 50$:

$$50 = 25 + 65 \cdot \left(\frac{48}{65}\right)^{\frac{t}{10}} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{13} = \left(\frac{48}{65}\right)^{\frac{t}{10}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5}{13}\right)^{10} = \left(\frac{48}{65}\right)^{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{10 \ln \frac{5}{13}}{\ln \frac{48}{65}}.$$

Těleso bude mít teplotu 50 °C po 31 minutách a 30 sekundách.

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte Cauchyho úlohu:

a) $2(1+\mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x,\ y(0) = 0$

b) $y' \sin x = y \ln y,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}$

c) $\sin x \sin y\, y' = \cos x \cos y,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

d) $(1+\mathrm{e}^x)\dfrac{y'}{y} + \mathrm{e}^x = 0,\ y(0) = 1$

e) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2},\ y(0) = 1$

f) $y - xy' = 5(1 + x^2 y'),\ y(1) = 1$

2.1.2 Řešení rovnice typu $y' = f(ax + by + c)$

Diferenciální rovnici tvaru $y' = f(ax + by + c)$, kde $b \neq 0$, lze převést substitucí $u(x) = ax + by + c$ na rovnici se separovanými proměnnými s novou neznámou funkcí $u(x)$. Ze substitučního vztahu určíme vztah pro nahrazení derivace y'.
Rovnost $u(x) = ax + by + c$ derivujeme podle proměnné x a z nalezené derivace vyjádříme y'.

$$u' = a + by' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u' - a}{b}.$$

Dosazením do původní diferenciální rovnice dostáváme separovatelnou rovnici typu $u' = f(x)g(u)$, kterou již řešit umíme,

$$\frac{u' - a}{b} = f(u) \quad \Rightarrow \quad u' = a + bf(u).$$

Pro $a + bf(u) \neq 0$ dostaneme rovnici

$$\frac{1}{a + bf(u)} u' = 1.$$

Její obecné řešení lze zapsat ve tvaru

$$\int \frac{du}{a + bf(u)} = x + C.$$

Příklad 2.8 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 3x - 2y + 5$.

Řešení:
Jedná se o separovatelnou rovnici typu $y' = f(ax + by + c)$, kde $a = 3, b = -2, c = 5$. Použijeme substitucí,

$$u = 3x - 2y + 5 \quad \Rightarrow \quad u' = 3 - 2y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3 - u'}{2}$$

Dosadíme do původní diferenciální rovnice:

$$\frac{3 - u'}{2} = u.$$

Víme, že nová diferenciální rovnice s neznámou funkcí u je separovatelná typu $u' = f(x)g(u)$,

$$u' = 3 - 2u \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3 - 2u \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{3 - 2u} = \mathrm{d}x$$

Nyní obě strany rovnice budeme integrovat

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{3 - 2u} = \int \mathrm{d}x + C \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \ln|3 - 2u| = x + C \quad \Rightarrow \quad \ln|3 - 2u| = -2x + C.$$

Nalezené obecné řešení pro neznámou u upravíme,

$$3 - 2u = \mathrm{C}e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad u = \mathrm{C}e^{-2x} + \frac{3}{2}$$

a vrátíme substituci:

$$3x - 2y + 5 = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}.$$

Obecné řešení pro neznámou y je tedy ve tvaru $y = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.

Příklad 2.9 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \cos(x - y)$.

Řešení:
Jedná se o rovnici typu $y' = f(ax + by + c)$, kde $a = 1, b = -1, c = 0$. Budeme řešit substitucí,

$$u = x - y \quad \Rightarrow \quad u' = 1 - y' \quad \Rightarrow \quad y' = 1 - u'.$$

Dosadíme do původní diferenciální rovnice

$$1 - u' = \cos u \quad \Rightarrow \quad u' = 1 - \cos u.$$

V rovnici nahradíme derivaci u' podílem diferenciálů $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ a upravíme ji na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 - \cos u \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}u}{1 - \cos u} = \int \mathrm{d}x + C.$$

Integrál na levé straně rovnice si spočítáme zvlášť

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1 - \cos u} = \left| \begin{array}{l} \tan \frac{u}{2} = t \\ \cos u = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \mathrm{d}u = \frac{2}{1 + t^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{1 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \frac{2}{1 + t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\tan \frac{u}{2}} = -\cot \frac{u}{2}.$$

Obecné řešení pro neznámou funkci u:

$$-\cot \frac{u}{2} = x + C.$$

Vrátíme substituci a dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$-x - \cot \frac{x - y}{2} = C \qquad \Rightarrow \qquad x + \cot \frac{x - y}{2} = C.$$

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' = (x + y)^2$

b) $y'\sqrt{1 + x + y} = x + y + 1$

c) $y' - 3y = 4x + 1$

d) $y' = \sin^2(x - y)$

2.1.3 Řešení rovnice typu $y' = f(\frac{y}{x})$

Definice 2.4 Diferenciální rovnice $F(x, y, y') = 0$ se nazývá **homogenní**, pokud ji lze pro $x \neq 0$ upravit na tvar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Homogenní diferenciální rovnici převedeme substitucí

$$y = zx,$$

kde $z = z(x)$, na diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro novou neznámou funkci $z(x)$. Ze substituce $y = zx$, tj. $z = \dfrac{y}{x}$, plyne po derivování vztah pro nahrazení derivace

$$y' = z'x + z.$$

Dosazením substituce do původní rovnice a úpravách dostaneme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro funkci $z = z(x)$, za podmínky $f(z) - z \neq 0$.

$$\begin{aligned}
z'x + z &= f(z) \\
z'x &= f(z) - z \\
z' &= \frac{1}{x}(f(z) - z) \\
\frac{1}{f(z) - z}\mathrm{d}z &= \frac{1}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Její obecné řešení lze zapsat ve tvaru

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \ln|x| + C.$$

Poznámka

Připomeňme si, kdy se funkce $f(x, y)$ na oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$ nazývá **homogenní stupně** k a ukážme si, jak tento pojem souvisí s homogenní diferenciální rovnicí.

Funkce $f(x, y)$ se nazývá **homogenní funkce stupně** k ($k \in \mathbb{N}$) na oblasti Ω právě tehdy, když v každém bodě $[x, y] \in \Omega$ pro libovolné $t \neq 0$ platí

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Budeme-li předpokládat, že funkce $P(x, y), Q(x, y)$ jsou homogenní stejného stupně k, potom rovnice $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ je homogenní diferenciální rovnicí.

Tedy

$$P(tx, ty) = t^k P(x, y) \quad \wedge \quad Q(tx, ty) = t^k Q(x, y)$$

$$\frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)} = \frac{t^k P(x, y)}{t^k Q(x, y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Rovnici $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ lze pro $Q(x,y)\neq 0$ upravit na tvar

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{P(tx,ty)}{Q(tx,ty)}$$

a z této rovnice pro $t=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ dostaneme

$$y' = -\frac{P(1,\frac{y}{x})}{Q(1,\frac{y}{x})} \quad \Rightarrow \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

což je homogenní diferenciální rovnice.

Příklad 2.10 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $xy'-y=2\sqrt{xy}$.

Řešení:

$$xy' = 2\sqrt{xy}+y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2\sqrt{xy}+y}{x} = 2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$$

Jedná se o homogenní diferenciální rovnici $y'=f(\frac{y}{x})$.

Zavedeme substituci:

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} &= z\\ y' &= z'x+z,\end{aligned}$$

kde $z=z(x)$.

Dosadíme do rovnice $y'=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$ a nalezneme řešení $z(x)$.

$$z'x+z=2\sqrt{z}+z \quad \Rightarrow \quad z'x=2\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{x}\cdot\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z=\frac{2}{x}\mathrm{d}x.$$

Nyní obě strany rovnice budeme integrovat

$$\int\frac{1}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z=\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x+C \Rightarrow \int z^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}z=\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x+C \Rightarrow \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2\ln|x|+C \Rightarrow \sqrt{z}=\ln|x|+C.$$

Nalezené obecné řešení pro neznámou $z(x)$ upravíme

$$z=(\ln|x|+C)^2,$$

vrátíme substituci a dostaneme obecné řešení pro neznámou $y(x)$

$$\frac{y}{x}=(\ln|x|+C)^2 \quad \Rightarrow \quad y=x(\ln|x|+C)^2.$$

Příklad 2.11 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{3y-2x}{x+y}$.

Řešení:
Ověříme, že se jedná o homogenní diferenciální rovnici.

$$y' = \frac{3y-2x}{x+y} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x(3\frac{y}{x}-2)}{x(1+\frac{y}{x})} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3\frac{y}{x}-2}{1+\frac{y}{x}}$$

Zavedeme substituci:

$$\frac{y}{x} = z$$
$$y' = z'x + z,$$

kde $z = z(x)$.

Dosadíme do rovnice $y' = \dfrac{3\frac{y}{x}-2}{1+\frac{y}{x}}$.

$$\begin{aligned} z'x + z &= \frac{3z-2}{1+z} \\ z'x &= \frac{3z-2}{1+z} - z \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{x} \cdot \frac{z^2-2z+2}{1+z} \\ \frac{1+z}{z^2-2z+2}\mathrm{d}z &= -\frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nyní budeme integrovat obě strany rovnice a nalezneme řešení pro funkci $z(x)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1+z}{z^2-2z+2}\mathrm{d}z &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C \\ 2\int \frac{1}{(z-1)^2+1}\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int \frac{(2z-2)}{z^2-2z+2}\mathrm{d}z &= -\ln|x| + C \\ 2\arctan(z-1) + \frac{1}{2}\ln|z^2-2z+2| &= -\ln|x| + C \\ 4\arctan(z-1) + \ln|z^2-2z+2| &= -2\ln|x| + C \end{aligned}$$

Vrátíme substituci $z = \frac{y}{x}$ a dostaneme obecné řešení pro funkci $y(x)$:

$$4\arctan\left(\frac{y}{x}-1\right) + \ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x} + 2\right| = -2\ln|x| + C.$$

Příklad 2.12 Určete řešení Cauchyovy úlohy: $xy' - y = \sqrt{y^2-x^2}, \quad y(1) = 2.$

Řešení:
Ověříme, že se jedná o homogenní diferenciální rovnici.

$$y' = \frac{\sqrt{y^2-x^2}}{x} + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}}{x} + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} + \frac{y}{x}$$

Zavedeme substituci:

$$
\begin{aligned}
\frac{y}{x} &= z \\
y' &= z'x + z,
\end{aligned}
$$

kde $z = z(x)$.

Dosadíme do rovnice $y' = \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} + \frac{y}{x}$.

$$
\begin{aligned}
z'x + z &= \sqrt{z^2 - 1} + z \\
z'x &= \sqrt{z^2 - 1} \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x} \cdot \sqrt{z^2 - 1} \\
\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \mathrm{d}z &= \frac{1}{x} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Nyní budeme integrovat obě strany rovnice.

$$
\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C
$$

Integrál na levé straně rovnice si spočítáme zvlášť

$$
\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2 - 1}} = \left| \begin{aligned} t &= \sqrt{z^2 - 1} + z \\ \mathrm{d}t &= \left(\frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{z^2 - 1}} + 1 \right) \mathrm{d}z \\ \frac{\mathrm{d}t}{t} &= \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2 - 1}} \end{aligned} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln\left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right|.
$$

Po integraci obou stran dostaneme řešení pro funkci $z(x)$.

$$
\ln\left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right| = \ln|x| + C.
$$

Vrátíme substituci $z = \frac{y}{x}$ a dostaneme obecné řešení pro funkci $y(x)$.

$$
\ln\left| \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} \right| = \ln|x| + C
$$

Obecné řešení upravíme

$$
\ln\left| \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} \right| = \ln|Cx| \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Cx
$$

Do nalezeného obecného řešení dosadíme počáteční podmínku $y(1) = 2$ a určíme hodnotu konstanty C,

$$
\frac{2}{1} + \sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^2 - 1} = C \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad C = 2 + \sqrt{3}.
$$

Řešení Cauchyovy úlohy je ve tvaru:

$$
\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = (2 + \sqrt{3})x \quad \Rightarrow \quad y + \sqrt{y^2 - x^2} = (2 + \sqrt{3})x^2.
$$

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$

b) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

c) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

d) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

e) $y' = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$

f) $y^2 + x^2 y' = xyy'$

g) $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

h) $xy' = y(\ln y - \ln x)$

i) $xy' - y = x \tan \dfrac{y}{x}$

j) $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$

k) $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = y\mathrm{d}y$

l) $(3y^2 + 3xy + x^2)\mathrm{d}x = (x^2 + 2xy)\mathrm{d}y$

m) $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + x\cos\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y = 0$

n) $(8y + 10x)\mathrm{d}x + (5y + 7x)\mathrm{d}y = 0$

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte Cauchyho úlohu:

a) $(xy' - y)\arctan\dfrac{y}{x} = x,\ y(1) = 0$

b) $(y^2 - 3x^2)\mathrm{d}y + 2xy\mathrm{d}x = 0,\ y(0) = 1$

2.2 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Lineární diferenciální rovnice jsou takové rovnice, které jsou lineární vzhledem k neznámé funkci a jejím derivacím. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu jsou velmi důležité - vede na ně řada praktických problémů, a také na ně lze transformovat některé jiné typy rovnic.

Definice 2.5 **Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu** (zkráceně LDR) nazýváme každou rovnici tvaru

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité funkce na určitém intervalu $\langle a, b\rangle$. Dále

1. je-li $q(x) = 0$, hovoříme o **zkrácené (homogenní) LDR**,
2. je-li $q(x) \neq 0$, hovoříme o **nezkrácené (úplné, nehomogenní) LDR**.

Poznámka

Příklady lineárních rovnic:

- $xy' - y = x$
- $y' - \ln x^2 \cdot y = \sin x$
- $2xy' - \dfrac{y}{x} - 2 = 0$

Příklady rovnic, které nejsou lineární:

- $xy'y = x$
- $y' - xy^2 = \sin x$
- $2xy' - \dfrac{x}{y} - 2\sin y = 0$

Homogenní LDR $y' + p(x) \cdot y = 0$ je zároveň separovatelnou rovnicí $y' = -p(x) \cdot y$, kterou řešit umíme. Ke každé úplné LDR $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ existuje příslušný zkrácený tvar $y' + p(x) \cdot y = 0$.

Věta 2.1 Homogenní LDR $y' + yp(x) = 0$ má na intervalu $\langle a, b\rangle$ obecné řešení tvaru

$$\hat{y} = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Věta 2.2 Obecné řešení úplné lineární diferenciální rovnice má tvar

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x),$$

kde $\hat{y}(x)$ je obecné řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné partikulární řešení úplné lineární diferenciální rovnice.

Funkce $v(x)$ se také nazývá **partikulární integrál úplné lineární diferenciální rovnice.**

2.2.1 Metoda variace konstanty

K nalezení řešení nehomogenní rovnice (rovnice s pravou stranou) se nejčastěji užívá **metoda variace konstanty**, integrační kosntantu C zaměníme za nějakou funkci proměnné x, $C = C(x)$:

1. Nalezneme řešení (separací proměnných) příslušné homogenní rovnice (zkrácený tvar)

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$
$$\hat{y} = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x},\ C \in \mathbb{R}.$$

2. Obecné řešení úplné rovnice je ve stejném tvaru jako je řešení příslušné zkrácené rovnice s tím rozdílem, že C není konstantou, ale funkcí $C(x)$ takovou, že funkce $y = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ vyhovuje zadané rovnici.

Postup nalezení $C(x)$:

Určíme derivaci odhadovaného řešení

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$
$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}p(x).$$

Funkci y a její derivaci y' dosadíme do úplné LDR 1. řádu a dostaneme rovnici pro neznámou funkci $C'(x)$.

$$\underbrace{C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)}_{y'} + p(x) \cdot \underbrace{C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{y} = q(x).$$

Na levé straně rovnice se vždy musí odečíst dva členy obsahující funkci $C(x)$. Po úpravě dostáváme diferenciální rovnici pro neznámou funkci $C(x)$.

$$C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x) \quad \Rightarrow \quad C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

Integrací nalezneme funkci $C(x)$ s integrační konstantou C:

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C,$$

kterou dosadíme do odhadovaného řešení $y = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ a dostaneme obecné řešení rovnice

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = \underbrace{Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{v(x)}.$$

Příklad 2.13 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' - y = e^{2x}$.

Řešení:
Příslušná zkrácená LDR má tvar $y' - y = 0$. Jedná se o rovnici separovatelnou, jejíž obecné řešení je

$$\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx + C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x + C \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = Ce^x.$$

Provedeme variaci konstanty. Předpokládejme, že $C = C(x)$, potom

$$y = C(x)e^x$$

a její derivace je

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x.$$

Po dosazení do původní rovnice se nám odečtou dva členy

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^{2x},$$

$$C'(x)e^x = e^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad C'(x) = e^x$$

Odtud přímou integraci

$$C(x) = \int e^x dx = e^x + C.$$

Po dosazení do $y = C(x)e^x$ obdržíme obecné řešení

$$y = (e^x + C)\, e^x = Ce^x + e^{2x} = \hat{y} + v.$$

Příklad 2.14 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $x^2y' + xy = \ln x$

Řešení:
Rovnici si nejprve upravíme na tvar

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{\ln x}{x^2}$$

a vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + C.$$

Řešení zkrácené rovnice: $\hat{y} = \dfrac{C}{x}$.

Provedeme variaci konstanty. Předpokládejme, že $C = C(x)$, potom

$$y = \frac{C(x)}{x}, \quad y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

Po dosazení do původní rovnice dostáváme

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x}\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{C'(x)}{x} = \frac{\ln x}{x^2} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Odtud přímou integraci

$$C(x) = \int \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

Po dosazení obdržíme obecné řešení

$$y = \left(\frac{1}{2}\ln^2 x + C\right)\frac{1}{x} = \frac{C}{x} + \frac{1}{2x}\ln^2 x = \hat{y} + v.$$

Příklad 2.15 Určete řešení Cauchyovy úlohy $y' - \dfrac{7y}{x^2+3x-10} = \sqrt{x-2}$, $y(3) = 1$.

Řešení:
Vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' - \frac{7y}{x^2+3x-10} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{7}{x^2+3x-10} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{7}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{7}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x + C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{x-2}{x+5} + \ln C \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = C\frac{x-2}{x+5}.$$

Provedeme variaci konstanty, $C = C(x)$.

$$\begin{aligned} y &= C(x)\frac{x-2}{x+5} \\ y' &= C'(x)\frac{x-2}{x+5} + C(x)\frac{7}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

Dosadíme do původní rovnice:

$$\begin{aligned} C'(x)\frac{x-2}{x+5} + C(x)\frac{7}{(x+5)^2} - \frac{7C(x)\frac{x-2}{x+5}}{(x-2)(x+5)} &= \sqrt{x-2} \\ C'(x)\frac{x-2}{x+5} &= \sqrt{x-2} \\ C'(x) &= \frac{(x+5)\sqrt{x-2}}{x-2}. \end{aligned}$$

Odtud

$$C(x) = \int \frac{x+5}{\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} x-2 &= t^2 \\ x &= t^2+2 \\ \mathrm{d}x &= 2t\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \int \frac{t^2+7}{t} 2t\mathrm{d}t$$

$$= \int (2t^2+14)\mathrm{d}t = \frac{2t^3}{3} + 14t + C = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 + 14\sqrt{x-2} + C.$$

Po dosazení a úpravě obdržíme obecné řešení

$$y = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x-2}(x+19) + C\right)\frac{x-2}{x+5}.$$

Do nalezeného obecného řešení dosadíme počáteční podmínku $y(3) = 1$ a určíme C.

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3-2}(3+19) + C\right)\frac{3-2}{3+5} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{44}{3} + C\right)\frac{1}{8} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{20}{3}$$

Řešení Cauchyovy úlohy je ve tvaru:

$$y = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x-2}(x+19) - \frac{20}{3}\right)\frac{x-2}{x+5}.$$

Příklad 2.16 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y\sin x = \sin^3 x$.

Řešení:
Nejprve vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' + y\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \sin x\mathrm{d}x + C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \cos x + C$$

Řešení zkrácené rovnice: $\hat{y} = C\mathrm{e}^{\cos x}$.

Provedeme variaci konstanty $C = C(x)$.

$$\begin{aligned} y &= C(x)\mathrm{e}^{\cos x} \\ y' &= C'(x)\mathrm{e}^{\cos x} + C(x)\mathrm{e}^{\cos x}(-\sin x) \end{aligned}$$

Dosadíme do původní rovnice:

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{\cos x} + C(x)\mathrm{e}^{\cos x}(-\sin x) + C(x)\mathrm{e}^{\cos x}\sin x &= \sin^3 x \\ C'(x)\mathrm{e}^{\cos x} &= \sin^3 x \\ C'(x) &= \mathrm{e}^{-\cos x}\sin^3 x. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \mathrm{e}^{-\cos x}\sin^3 x\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-\cos x}(1-\cos^2 x)\sin x\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = \\ &= -\int \mathrm{e}^{-t}(1-t^2)\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll} u = 1-t^2 & v' = \mathrm{e}^{-t} \\ u' = -2t & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right| = (1-t^2)\mathrm{e}^{-t} + \int 2t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \\ &= \left|\begin{array}{ll} u = 2t & v' = \mathrm{e}^{-t} \\ u' = 2 & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right| = (1-t^2)\mathrm{e}^{-t} - 2t\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t} = -(t^2+2t+1)\mathrm{e}^{-t} = \\ &= -(\cos x + 1)^2\mathrm{e}^{-\cos x} + C. \end{aligned}$$

Dosadíme do předpokládaného tvaru obecného řešení

$$y = \left(-(\cos x + 1)^2 \mathrm{e}^{-\cos x} + C\right) \mathrm{e}^{\cos x}$$

a po úpravě dostaneme

$$y = -(\cos x + 1)^2 + C\mathrm{e}^{\cos x}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2.17 Řešte Cauchyho úlohu $y' - y \cot x = \mathrm{e}^x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Řešení:
Nejprve vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' - y \cot x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cot x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \cot x \mathrm{d}x + C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\sin x| + C$$

Řešení zkrácené rovnice: $\hat{y} = C \sin x$.

Provedeme variaci konstanty $C = C(x)$.

$$\begin{aligned} y &= C(x) \sin x \\ y' &= C'(x) \sin x + C(x) \cos x \end{aligned}$$

Dosadíme do původní rovnice:

$$\begin{aligned} C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \sin x \cot x &= \mathrm{e}^x \sin x \\ C'(x) \sin x &= \mathrm{e}^x \sin x \\ C'(x) &= \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Odtud

$$C(x) = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$$

Dosadíme do předpokládaného tvaru obecného řešení

$$y = (\mathrm{e}^x + C) \sin x.$$

Dosazením počáteční podmínky $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ určíme hodnotu konstanty C

$$0 = \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + C\right) \sin \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad C = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Hledané řešení je tedy

$$y = \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right) \sin x.$$

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' + 2y = 4x$

b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

c) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$

d) $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$

e) $y' = \dfrac{2x \ln x - y + x}{x}$

f) $y' = e^{2x} - e^x y$

g) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$

h) $y' = 2y - x^2$

i) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

j) $x(x^2 + 1)y' + y = x(1 + x^2)^2$

k) $x^2 dy + (3 - 2xy)dx = 0$

l) $x dy = (x^3 - y)dx$

m) $\dfrac{dy}{dx} = y \cos x + \sin 2x$

n) $2x dy + (x^2 - 6y)dx = 0$

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte Cauchyho úlohu:

a) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x,\ y(1) = 0$

b) $y' - y \tan x = \dfrac{1}{\cos x},\ y(0) = 0$

KAPITOLA

3

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Řešíme-li konkrétní problémy z praxe, které jsou popsány diferenciálními rovnicemi, často zjišťujeme, že jednotlivé parametry (hmotnost, hustota, frekvence, atd.), které vystupují jako koeficienty diferenciálních rovnic, jsou konstanty. Takovéto úlohy tvoří základní skupinu mezi LDR druhého řádu.

Definice 3.6 Lineární diferenciální rovnice (LDR) druhého řádu s konstantními koeficienty má tvar

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x),$$

kde $a_2 \neq 0, a_1, a_0$ jsou reálné konstanty a funkci $b(x)$ nazveme pravou stranou rovnice. Dále

1. je-li $b(x) = 0$, hovoříme o **zkrácené (homogenní) LDR**,
2. je-li $b(x) \neq 0$, hovoříme o **nezkrácené (úplné, nehomogenní) LDR**.

Poznámka

$y'' + 3y' = 2 - x$ . . . nehomogenní LDR
$y'' + 3y' = 0$ . . . příslušná homogenní LDR

3.1 Řešení homogenní LDR

Definice 3.7 Dvojici funkcí $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ nazýváme **fundamentální systém řešení** rovnice $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$, pokud y_1, y_2 jsou dvě netriviální lineárně nezávislá řešení dané rovnice.

O lineární nezávislosti funkcí y_1, y_2, které jsou definované na I a mají zde spojitou první derivaci, rozhodneme pomocí Wronského determinantu (Wronskiánu).

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Pokud v nějakém bodě $x \in I$ platí, že $W \neq 0$, pak jsou funkce y_1, y_2 lineárně nezávislé na I.

Příklad 3.18 Ukažte, že funkce $y_1 = \mathrm{e}^{3x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{3x}$ jsou lineárně nezávislé na $\mathbb{R}$.

Řešení:
Určíme hodnotu Wronského determinantu:

$$W = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{3x} & x\mathrm{e}^{3x} \\ 3\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{3x} + 3x\mathrm{e}^{3x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{3x} + 3x\mathrm{e}^{3x}) - 3x\mathrm{e}^{6x} = \mathrm{e}^{6x}$$

Protože $\mathrm{e}^{6x} \neq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, jsou funkce $y_1 = \mathrm{e}^{3x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{3x}$ lineárně nezávislé na $\mathbb{R}$.

Mějme zkrácenou rovnici $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$. Ukážeme, že všechna řešení takovéto rovnice dokážeme najít bez použití integrace a dokážeme je vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Podívejme se na řešení homogenní lineární rovnice prvního řádu s konstantním koeficientem:

$$\begin{aligned} y' + ay &= 0 \\ y' &= -ay \\ \frac{1}{y}dy &= -adx \\ \hat{y} &= C\mathrm{e}^{-ax} \end{aligned}$$

Řešením je například funkce ve tvaru $y = \mathrm{e}^{rx}$, kde $r \in \mathbb{R}$. Pro rovnici druhého řádu hledejme řešení také ve tvaru $y = \mathrm{e}^{rx}$ a určeme, jaké jsou požadavky pro r. Odhadované řešení $y = \mathrm{e}^{rx}$ a jeho první a druhou derivaci, $y' = r\mathrm{e}^{rx}$, $y'' = r^2\mathrm{e}^{rx}$ dosadíme do rovnice $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ a upravíme.

$$\begin{aligned} a_2y'' + a_1y' + a_0y &= 0 \\ a_2r^2\mathrm{e}^{rx} + a_1r\mathrm{e}^{rx} + a_0\mathrm{e}^{rx} &= 0 \\ \mathrm{e}^{rx}(a_2r^2 + a_1r + a_0) &= 0 \end{aligned}$$

Jelikož funkce $\mathrm{e}^{rx} \neq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, platí, že $y = \mathrm{e}^{rx}$ je řešením, pokud r je řešením tzv. **charakteristické rovnice** (kvadratická rovnice pro neznámou r)

$$a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0.$$

Charakteristickou rovnici odvodíme snadno ze zadané homogenní LDR, kde místo y'' dosadíme r^2, místo y' dosadíme r a místo y dosadíme 1.

3.1.1 Nalezení fundamentálního systému řešení homogenní LDR

Mějme rovnici $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ a její charakteristickou rovnici $a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0$. Řešení zkrácené rovnice závisí na tom, jaké jsou kořeny charakteristické rovnice:

- má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, potom fundamentální systém řešení je $y_1 = \mathrm{e}^{r_1x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{r_2x}$ a obecné řešení je ve tvaru
$$\hat{y} = C_1\mathrm{e}^{r_1x} + C_2\mathrm{e}^{r_2x},$$
kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,
- má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen r, potom fundamentální systém řešení je $y_1 = \mathrm{e}^{rx}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$ a její obecné řešení je
$$\hat{y} = C_1\mathrm{e}^{rx} + C_2x\mathrm{e}^{rx},$$
kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,
- má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, potom fundamentální systém řešení je $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ a obecné řešení je
$$\hat{y} = C_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + C_2\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$
kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.19 Řešte diferenciální rovnici $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Řešení:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= 0 \\ r^2 - 3r + 2 &= 0 \quad \ldots \text{příslušná charakteristická rovnice} \\ r_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 1 \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice má 2 různé reálné kořeny $r_1 = 2,\ r_2 = 1$, tedy řešení rovnice je ve tvaru:
$$\hat{y} = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x}.$$

Příklad 3.20 Řešte Cauchyho úlohu $y'' - 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Řešení:

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= 0 \\ r^2 - 4 &= 0 \quad \ldots \text{příslušná charakteristická rovnice} \\ r_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice má dva reálné kořeny $r_1 = 2, r_2 = -2$, tedy obecné řešení rovnice je ve tvaru:

$$\hat{y} = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}.$$

Dosazením počátečních podmínek $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ do obecného řešení a jeho derivace určíme konstanty C_1, C_2.

$$\begin{array}{l}
y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} \\
y' = 2C_1\mathrm{e}^{2x} - 2C_2\mathrm{e}^{-2x} \\
\hline
1 = C_1\mathrm{e}^{0} + C_2\mathrm{e}^{0} \ \Rightarrow C_1 = 1 - C_2 \\
2 = 2C_1\mathrm{e}^{0} - 2C_2\mathrm{e}^{0} \\
\hline
2 = 2 - 4C_2 \ \Rightarrow \ C_2 = 0 \\
C_1 = 1 - 0 = 1
\end{array}$$

Hledané řešení je ve tvaru:

$$\hat{y} = \mathrm{e}^{2x}.$$

Příklad 3.21 Řešte diferenciální rovnici $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Řešení:

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$r^2 - 4r + 5 = 0 \ \ldots \text{příslušná charakteristická rovnice}$$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}$$

Charakteristická rovnice má 2 komplexně sdružené kořeny, přičemž $\alpha = 2$, $\beta = 1$, tedy řešení rovnice je ve tvaru:

$$\hat{y} = C_1 \mathrm{e}^{2x} \cos x + C_2 \mathrm{e}^{2x} \sin x.$$

Příklad 3.22 Řetěz o délce 3 metry klouže z hladkého horizontálního stolu. Přesně před tím, než došlo k pohybu řetězu ze stolu, visela ze stolu část řetězu o délce 30 cm. Za jakou dobu řetěz ze stolu spadne?

Řešení:

Pohyb řetězu ze stolu způsobuje tíhová síla působící na část řetězu visící ze stolu, její velikost je

$$F = \frac{m}{l} y g,$$

kde l je délka řetězu, m hmotnost řetězu a y je velikost části řetězu, již visící ze stolu, $g = 9{,}81\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

Víme, že podle 2. Newtonova zákonu je $F = m\ddot{y}$, po dosazení a úpravách dostáváme diferenciální rovnici 2. řádu pro neznámou funkci $y(t)$

$$m\ddot{y} = \frac{m}{l} y g \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} - \frac{g}{l} y = 0.$$

$$
\begin{aligned}
r^2 - \frac{g}{l} &= 0 \ \ldots \text{příslušná charakteristická rovnice} \\
r_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{g}{l}}
\end{aligned}
$$

Obecné řešení rovnice je ve tvaru:

$$\hat{y} = y = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}.$$

Dosadíme počáteční podmínky v čase $t = 0$, $y(0) = 0,3$ a $\dot{y}(0) = 0$,

$$
\begin{aligned}
y &= C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} \\
\dot{y} &= C_1 \sqrt{\frac{g}{l}} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} - C_2 \sqrt{\frac{g}{l}} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} \\
\hline
0,3 &= C_1 e^0 + C_2 e^0 \\
0 &= \sqrt{\frac{9,81}{3}} C_1 e^0 - \sqrt{\frac{9,81}{3}} C_2 e^0 \qquad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 \\
\hline
0,3 &= C_1 + C_1 \ \Rightarrow \ C_1 = C_2 = 0,15
\end{aligned}
$$

a dostaneme řešení ve tvaru

$$y = 0,15\left(e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right).$$

Úkolem je určit čas, za který řetěz spadne ze stolu, tudíž je potřeba z řešení vyjádřit t. Rovnici vynásobíme $\frac{1}{0,15} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}$ a dostaneme kvadratickou rovnici proměnné $e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}$

$$\left(e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right)^2 - \frac{1}{0,15} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} = \frac{1}{0,3} y \pm \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 0,15^2} y^2 - 1}.$$

Čas musí být nezáporný, proto má smysl pouze řešení $e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} = \frac{1}{0,3} y + \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 0,15^2} y^2 - 1}$, do kterého dosadíme za $y = l$ a vyjádříme t:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln\left(\frac{l}{0,3} + \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 0,15^2} l^2 - 1}\right) = \sqrt{\frac{3}{9,81}} \ln\left(\frac{3}{0,3} + \sqrt{\frac{3^2}{4 \cdot 0,15^2} - 1}\right) = 1,66$$

Řetěz ze stolu spadne za 1,66 sekund.

3.2 Řešení nehomogenní LDR

Mějme nehomogenní LDR

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x),$$

tj. $b(x) \neq 0$.

Obecné řešení úplné rovnice je ve tvaru:

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x),$$

kde $\hat{y}(x)$ je řešení příslušné zkrácené rovnice a $v(x)$ je partikulární řešení úplné rovnice příslušné pravé straně $b(x)$.

Řešení příslušné homogenní rovnice $\hat{y}$ nalézt umíme. Partikulární řešení $v(x)$ lze nalézt pomocí dvou metod:

- Lagrangeova metoda variace konstant - univerzální metoda
- metoda neurčitých koeficientů - metoda použitelná pouze v případě speciálního tvaru pravé strany

Věta 3.3 (Princip superpozice) Nechť v nehomogenní rovnici $a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$ lze funkci $b(x)$ rozložit na součet ve tvaru

$$b(x) = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_k(x)$$

a nechť $v_j(x)$ je partikulární řešení rovnice

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = b_j(x), \quad j = 1, \ldots, k,$$

pak

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x) + \cdots + v_k(x)$$

je partikulární řešení původní rovnice.

3.2.1 Metoda variace konstant

Princip metody je analogický řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

Věta 3.4 (Variace konstant pro LDR 2. řádu) Obecné řešení rovnice

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$$

s konstantními koeficienty a_2, a_1, a_0 lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x) = \hat{y}(x) + y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)}\mathrm{d}x + y_2(x)\int \frac{W_2(x)}{W(x)}\mathrm{d}x,$$

kde $\hat{y}(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ je obecné řešení příslušné zkrácené rovnice, $W(x)$ wronskián jejího fundamentálního systému a $W_1(x)$, $W_2(x)$ jsou determinanty vytvořené z wronskiánu $W(x)$ nahrazením prvého resp. druhého sloupce vektorem pravých stran $(0, b(x)/a_2)$.

Úplnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$$

budeme řešit za předpokladu, že známe řešení zkrácené rovnice $\hat{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

Předpokládejme, že obecné řešení úplné lineární diferenciální rovnice druhého řádu bude mít stejný tvar jako řešení zkrácené rovnice, avšak ve vzorci nahradíme konstanty C_1, C_2 neznámými funkcemi $C_1(x), C_2(x)$. Provedeme tzv. **variaci konstant**. Hledáme tedy řešení ve tvaru

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Určíme derivaci odhadovaného řešení

$$y' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'.$$

Volba nových funkcí $C_1(x), C_2(x)$ umožňuje stanovit vhodnou doplňující podmínku, a tou je požadavek, aby

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0.$$

Dosazením podmínky do první derivace dostáváme

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' \qquad \text{a} \qquad y'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''.$$

Získaný vztah pro funkci $y(x)$ a její derivace dosadíme do úplné rovnice a po úpravě obdržíme

$$C_1(a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + C_2(a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2) + a_2(C_1'y_1' + C_2'y_2') = b(x).$$

Protože y_1, y_2 jsou řešení příslušné zkrácené rovnice, musí být výrazy v závorkách rovny nule a dostaneme $C_1'y_1' + C_2'y_2' = \dfrac{b(x)}{a_2}$. Tím jsme obdrželi druhou podmínku pro derivace neznámých funkcí $C_1(x), C_2(x)$ a můžeme řešit soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= \frac{b(x)}{a_2}. \end{aligned}$$

Determinant soustavy je wronskiánem funkcí y_1, y_2 $\left(W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \right)$, který je různý od nuly, neboť obě funkce jsou podle předpokladu lineárně nezávislé. Soustava má tedy jediné řešení, které nalezneme pomoci **Cramerova pravidla** pro řešení soustav lineárních rovnic

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \qquad C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)},$$

kde $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{b(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}$ a $W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{b(x)}{a_2} \end{vmatrix}$.

Po integraci těchto vztahů dostaneme

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} \mathrm{d}x + C_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} \mathrm{d}x + C_2,$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li do předpokládaného řešení $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ a po roznásobení dostaneme obecné řešení zadané rovnice v požadovaném tvaru

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x) = \underbrace{C_1y_1(x) + C_2y_2(x)}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} \mathrm{d}x + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)} \mathrm{d}x}_{v(x)}.$$

Příklad 3.23 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + y = 5e^{2x}$.

Řešení:
Nalezneme řešení příslušné homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ r^2 + 1 &= 0 \\ r_{1,2} &= \pm i \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice má 2 komplexně sdružené kořeny, přičemž $\alpha = 0$, $\beta = 1$, tedy řešení rovnice je ve tvaru:

$$\hat{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Provedeme variaci konstant $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$:

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Pro určení neznámých funkcí $C_1(x)$ a $C_2(x)$ vypočteme příslušné determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 5e^{2x} & \cos x \end{vmatrix} = -5e^{2x} \sin x, \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 5e^{2x} \end{vmatrix} = 5e^{2x} \cos x.$$

Dále bude

$$C_1' = \frac{W_1(x)}{W(x)} = -5e^{2x} \sin x \quad \Rightarrow \quad C_1 = -5 \int e^{2x} \sin x \mathrm{d}x = e^{2x}(\cos x - 2 \sin x) + C_1,$$

$$C_2' = \frac{W_2(x)}{W(x)} = 5e^{2x} \cos x \quad \Rightarrow \quad C_2 = 5 \int e^{2x} \cos x \mathrm{d}x = e^{2x}(2 \cos x + \sin x) + C_2.$$

Nalezené C_1 a C_2 dosadíme do $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$

$$y = \left(e^{2x}(\cos x - 2 \sin x) + C_1\right) \cos x + \left(e^{2x}(2 \cos x + \sin x) + C_2\right) \sin x,$$

po úpravě dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{2x}.$$

Příklad 3.24 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

Řešení:
Nalezneme řešení příslušné homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= 0 \\ r^2 + 3r + 2 &= 0 \\ r_1 &= -1 \\ r_2 &= -2 \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice má 2 různé reálné kořeny, tedy řešení rovnice je ve tvaru:

$$\hat{y} = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}.$$

Provedeme variaci konstant $C_1 = C_1(x),\ C_2 = C_2(x)$:

$$y = C_1(x)\mathrm{e}^{-x} + C_2(x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

Pro určení neznámých funkcí $C_1(x)$ a $C_2(x)$ vypočteme příslušné determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-2x} \\ -\mathrm{e}^{-x} & -2\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = -2\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{-3x} = -\mathrm{e}^{-3x},$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-2x} \\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} & -2\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^x}, \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-x} & 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} & \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Dále bude

$$C_1' = \frac{W_1(x)}{W(x)} = -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1+\mathrm{e}^x)(-\mathrm{e}^{-3x})} = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \Rightarrow C_1 = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \ln|1+\mathrm{e}^x| + C_1,$$

$$C_2' = \frac{W_2(x)}{W(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^x)(-\mathrm{e}^{-3x})} = -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x} \Rightarrow C_2 = -\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \ln|1+\mathrm{e}^x| - \mathrm{e}^x + C_2.$$

Nalezené C_1 a C_2 dosadíme do $y = C_1(x)\mathrm{e}^{-x} + C_2(x)\mathrm{e}^{-2x}$

$$y = (\ln|1+\mathrm{e}^x| + C_1)\,\mathrm{e}^{-x} + (\ln|1+\mathrm{e}^x| - \mathrm{e}^x + C_2)\,\mathrm{e}^{-2x},$$

po úpravě dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}\ln|1+\mathrm{e}^x| + \mathrm{e}^{-2x}(\ln|1+\mathrm{e}^x| - \mathrm{e}^x).$$

3.2.2 Metoda neurčitých koeficientů

Princip metody je založen na odhadu tvaru partikulárního řešení na základě tvaru pravé strany diferenciální rovnice. Metodu lze využít pouze pro tzv. speciální pravé strany - pravá strana rovnice je polynom, exponenciální funkce nebo funkce sinus či kosinus, případně jejich součiny. Tvar speciální pravé strany je dán následující větou.

Věta 3.5 (Metoda neurčitých koeficientů pro LDR 2. řádu)

Nechť má pravá strana LDR s konstantními koeficienty tvar

$$b(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}(p_m(x)\cos\omega x + q_n(x)\sin\omega x),$$

kde $p_m(x)$, $q_n(x)$ jsou polynomy stupňů m, n a $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$. Je-li číslo $\lambda \pm \mathrm{i}\omega$ k-násobným kořenem její charakteristické rovnice, potom volíme partikulární integrál (řešení) ve tvaru

$$v(x) = x^k\mathrm{e}^{\lambda x}(P_M(x)\cos\omega x + Q_M(x)\sin\omega x),$$

kde $M = \max\{m, n\}$.

Koeficienty polynomů $P_M(x)$ a $Q_M(x)$ určíme srovnávací metodou po dosazení partikulárního integrálu do původní rovnice.

Poznámka

- speciální pravé strany: $\sin x,\ \cos(2x)\frac{x}{e^x},\ 3, e^{-3x}$
- nejsou speciální pravé strany: $\sin x \cos(3x), \ln x, e^{x^2+2}$

Tvar partikulárního řešení odhadneme podle následující tabulky:
- $p_m(x),\ P_m(x),\ Q_m(x)$ jsou polynomy m-tého stupně: $A_m x^m + \cdots + A_1 x + A_0$
- $A, B \in \mathbb{R}$

$b(x)$	kořen charakteristické rovnice	$v(x)$
$p_m(x)$	$r = 0, k$-násobný	$x^k P_m(x)$
	$r \neq 0$	$P_m(x)$
$e^{\lambda x}$	$r = \lambda, k$-násobný	$Ax^k e^{\lambda x}$
	$r \neq \lambda$	$Ae^{\lambda x}$
$\sin \omega x$	$r = \pm i\omega$	$x(A \sin \omega x + B \cos \omega x)$
$\cos \omega x$	$r \neq \pm i\omega$	$A \sin \omega x + B \cos \omega x$
$e^{\lambda x} p_m(x) \sin \omega x$	$r = \lambda \pm i\omega$	$xe^{\lambda x}(Q_m(x) \sin \omega x + P_m(x) \cos \omega x)$
$e^{\lambda x} p_m(x) \cos \omega x$	$r \neq \lambda \pm i\omega$	$e^{\lambda x}(Q_m(x) \sin \omega x + P_m(x) \cos \omega x)$

Příklad 3.25 Odhadněte pro rovnici $y'' + 5y' = b(x)$ tvar partikulárního řešení:

a) $b(x) = 5x^2$

b) $b(x) = \sin(5x)$

c) $b(x) = 3e^{5x}$

d) $b(x) = 3xe^{-5x}$

e) $b(x) = e^{-x} \cos 2x$

f) $b(x) = e^x + 2$

Řešení:
Nalezneme kořeny příslušné charakteristické rovnice:

$$y'' + 5y' = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + 5r = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0,\ r_2 = -5$$

a) $b(x) = 5x^2$ - polynom druhého stupně $\Rightarrow$ tvar partikulárního řešení musí být tedy obecný polynom stejného stupně : $Ax^2 + Bx + C$ (kontrola: po dosazení konkrétních hodnot $A = 5, B = C = 0$ dostaneme tvar pravé strany)

- v případě, že na pravé straně je pouze polynom, kontrolujeme, zda je číslo 0 kořenem charakteristické rovnice: ano, 0 je jedním z kořenů $r_1 = 0$

- partikulární řešení bude ve tvaru : $v(x) = x(Ax^2 + Bx + C)$

b) $b(x) = \sin 5x$ - funkce sinus a konstanta $\Rightarrow$ tvar partikulárního řešení musí tedy obsahovat funkci sinus i kosinus se stejným argumentem: $A \sin 5x + B \cos 5x$ (kontrola: po dosazení konkrétních hodnot $A = 1, B = 0$ dostaneme tvar pravé strany)

   - v případě, že na pravé straně je goniometrická funkce, kontrolujeme, zda je číslo $\pm 5\mathrm{i}$ kořenem charakteristické rovnice: není

   - partikulární řešení bude ve tvaru : $v(x) = A \sin 5x + B \cos 5x$

c) $b(x) = 3\mathrm{e}^{5x}$- exponenciální funkce a konstanta $\Rightarrow$ i tvar partikulárního řešení musí být exponenciální funkce se stejným argumentem: $A\mathrm{e}^{5x}$ (kontrola: po dosazení konkrétních hodnot $A = 3$ dostaneme tvar pravé strany)

   - v případě, že na pravé straně je exponenciální funkce, kontrolujeme, zda je číslo 5 kořenem charakteristické rovnice: není

   - partikulární řešení bude ve tvaru : $v(x) = A\mathrm{e}^{5x}$

d) $b(x) = 3x\mathrm{e}^{-5x}$ - exponenciální funkce a polynom prvního stupně $\Rightarrow$ i tvar partikulárního řešení musí být exponenciální funkce se stejným argumentem a polynom stejného stupně: $(Ax + B)\mathrm{e}^{-5x}$ (kontrola: po dosazení konkrétních hodnot $A = 3, B = 0$ dostaneme tvar pravé strany)

   - v případě, že na pravé straně je exponenciální funkce, kontrolujeme, zda je číslo -5 kořenem charakteristické rovnice: ano, -5 je jedním z kořenů $r_2 = -5$

   - partikulární řešení bude ve tvaru : $v(x) = x(Ax + B)\mathrm{e}^{-5x}$

e) $b(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos 2x$ - exponenciální funkce, konstanta a funkce kosinus $\Rightarrow$ tvar partikulárního řešení musí obsahovat exponenciální funkci se stejným argumentem a obě goniometrické funkce se stejným argumentem: $\mathrm{e}^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$ (kontrola: po dosazení konkrétních hodnot $A = 1, B = 0$ dostaneme tvar pravé strany)

   - v případě, že na pravé straně je exponenciální funkce i goniometrická funkce, kontrolujeme, zda je číslo $-1 \pm 2\mathrm{i}$ kořenem charakteristické rovnice: není

   - partikulární řešení bude ve tvaru : $v(x) = \mathrm{e}^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$

f) $b(x) = \mathrm{e}^x + 2$ - nejedná se o speciální tvar pravé strany (mezi konstantou a exponenciální fuknci není součin), ale je dána jako součet dvou funkcí, z nichž každá má tvar speciální pravé strany, tzn. lze využít principu superpozice a odhad nalezneme ve tvaru

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x),$$

   kde $v_1(x)$ bude odpovídat funkci $b_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $v_2(x)$ funkci $b_2(x) = 2$

   $v_1(x) = A\mathrm{e}^x$ - exponenciální funkce (1 není kořen)
   $v_2(x) = Bx$ - konstanta (0 je kořen $\Rightarrow$ obecnou konstantu násobíme x)

- partikulární řešení bude tedy ve tvaru : $v(x) = Ae^x + Bx$

Nalezení koeficientů

Po správném určení tvaru partikulárního řešení zbývá dopočítat neznámé koeficienty polynomů.

1. odhadovaný tvar řešení $v(x)$ a jeho první a druhou derivaci dosadíme do původní (úplné) rovnice za y, y', y''
2. dostaneme jednu rovnici pro neznámé koeficienty polynomů a tu řešíme známou metodou neurčitých koeficientů, která spočívá v porovnání koeficientů u jednotlivých lineárně nezávislých funkcí na obou stranách rovnice - dostaneme soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme

Příklad 3.26 Řešte diferenciální rovnici $y'' + 4y = -2$.

Řešení:
Nalezneme řešení příslušné homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 0 \\ r^2 + 4 &= 0 \\ r_{1,2} &= \pm 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice má 2 komplexně sdružené kořeny, přičemž $\alpha = 0$, $\beta = 2$, tedy řešení zkrácené rovnice je ve tvaru:

$$\hat{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

$b(x) = -2$ - speciální pravá strana $\Rightarrow$ použijeme metodu neurčitých koeficientů

partikulární řešení je ve tvaru (0 není kořen) : $v(x) = A$

určíme první a druhou derivaci odhadnutého tvaru řešení: $v' = 0$, $v'' = 0$, dosadíme do původní rovnice $y'' + 4y = -2$ a dostaneme:

$$0 + 4A = -2 \;\Rightarrow\; A = -\frac{1}{2}$$

partikulární řešení je :

$$v = -\frac{1}{2}$$

obecné řešení rovnice dostaneme jako $y = \hat{y}(x) + v(x)$:

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{2}$$

Příklad 3.27 Řešte diferenciální rovnici $y'' - 10y' + 24y = (3x-1)\mathrm{e}^{3x}$.

Řešení:
Nalezneme řešení příslušné homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y'' - 10y' + 24y &= 0 \\ r^2 - 10r + 24 &= 0 \\ r_1 &= 4 \\ r_2 &= 6 \end{aligned}$$

řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y} = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{6x}.$$

$b(x) = (3x-1)\mathrm{e}^{3x}$ - speciální pravá strana $\Rightarrow$ použijeme metodu neurčitých koeficientů

partikulární řešení je ve tvaru (3 není kořen) : $v(x) = (Ax+B)\mathrm{e}^{3x}$

příslušné derivace jsou

$$\begin{aligned} v' &= A\mathrm{e}^{3x} + 3(Ax+B)\mathrm{e}^{3x}, \\ v'' &= 6A\mathrm{e}^{3x} + 9\mathrm{e}^{3x}(Ax+B). \end{aligned}$$

odhad řešení a derivace dosadíme do úplné rovnice

$$\underbrace{6A\mathrm{e}^{3x} + 9\mathrm{e}^{3x}(Ax+B)}_{v''} - 10\underbrace{\left(A\mathrm{e}^{3x} + 3(Ax+B)\mathrm{e}^{3x}\right)}_{v'} + 24\underbrace{(Ax+B)\,\mathrm{e}^{3x}}_{v(x)} = (3x-1)\mathrm{e}^{3x}$$

po úpravě dostaneme

$$3Ax\mathrm{e}^{3x} + (-4A+3B)\mathrm{e}^{3x} = 3x\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{3x}.$$

porovnáme koeficienty u výrazů $x\mathrm{e}^{3x}$ a e^{3x} na obou stranách rovnice

$$\left.\begin{array}{lrcrcr} x\mathrm{e}^{3x}: & 3A & & & = & 3 \\ \mathrm{e}^{3x}: & -4A & + & 3B & = & -1 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad A = 1 \text{ a } B = 1.$$

partikulární řešení je

$$v(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{3x}$$

obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{6x} + (x+1)\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Příklad 3.28 Řešte diferenciální rovnici $y'' - 2y' + y = 2x^2 + \mathrm{e}^x - 2$.

Řešení:
Nalezneme řešení příslušné homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= 0 \\ r^2 - 2r + 1 &= 0 \\ r_{1,2} &= 1 \end{aligned}$$

řešení zkrácené LDR druhého řádu je

$$\hat{y} = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x.$$

$b(x) = 2x^2 + \mathrm{e}^x - 2$ - není speciální pravá strana, ale dle principu superpozice lze pravou stranu rozložit na součet funkcí

$$b(x) = b_1(x) + b_2(x) = 2x^2 - 2 + \mathrm{e}^x,$$

kde $b_1(x) = 2x^2 - 2$ a $b_2(x) = \mathrm{e}^x$

partikulární řešení rovnice s pravou stranou $b_1(x)$ $(y'' - 2y' + y = 2x^2 - 2)$ je ve tvaru (0 není kořen) : $v_1(x) = Ax^2 + Bx + C$

příslušné derivace jsou

$$\begin{aligned} v_1' &= 2Ax + B, \\ v_1'' &= 2A. \end{aligned}$$

odhad řešení a derivace dosadíme do rovnice $y'' - 2y' + y = 2x^2 - 2$

$$2A - 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = 2x^2 - 2$$

porovnáme koeficienty u výrazů x^2, x^1 a x^0 na obou stranách rovnice

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & A = 2 \\ x^1: & -4A + B = 0 \\ x^0: & 2A - 2B + C = -2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = 2, B = 8 \text{ a } C = 10.$$

partikulární řešení je

$$v_1(x) = 2x^2 + 8x + 10$$

určíme partikulární řešení rovnice s pravou stranou $b_2(x)$ $(y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x)$ je ve tvaru (1 je dvojnásobný kořen) : $v_2(x) = Ax^2\mathrm{e}^x$

příslušné derivace jsou

$$\begin{aligned} v_2' &= 2Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x, \\ v_2'' &= 2A\mathrm{e}^x + 4Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

odhad řešení a derivace dosadíme do rovnice $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x$

$$2A\mathrm{e}^x + 4Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x - 2(2Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x) + Ax^2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$$

po jednoduchých úpravách a po zkrácení rovnice funkcí e^x dostaneme

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

partikulární řešení rovnice je

$$v_2(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$$

obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + y = 2x^2 + e^x - 2$ má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v_1(x) + v_2(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 + 8x + 10 + \frac{1}{2}x^2 e^x$$

Příklad 3.29 Řešte diferenciální rovnici $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.

Řešení:
Nalezneme řešení příslušné homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= 0 \\ r^2 - 2r + 2 &= 0 \\ r_{1,2} &= 1 \pm \mathrm{i} \end{aligned}$$

řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y}(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$$

$b(x) = e^x \sin x$ - speciální pravá strana $\Rightarrow$ použijeme metodu neurčitých koeficientů

partikulární řešení je ve tvaru ($1 \pm \mathrm{i}$ je kořen) : $v(x) = xe^x\left(A \sin x + B \cos x\right)$

příslušné derivace jsou

$$\begin{aligned} v' &= e^x(A \sin x + B \cos x) + xe^x(A \sin x + B \cos x) + xe^x(A \cos x - B \sin x), \\ v'' &= 2e^x\left((A + B + Bx)\cos x - (A - B + Ax)\sin x\right). \end{aligned}$$

odhad řešení a derivace dosadíme do úplné rovnice

$$\begin{aligned} 2e^x\left((A + B + Bx)\cos x - (A - B + Ax)\sin x\right) - 2e^x(A \sin x + B \cos x + x(A \sin x \\ + B \cos x + A \cos x - B \sin x)) + 2xe^x\left(A \sin x + B \cos x\right) = e^x \sin x \end{aligned}$$

po úpravě dostaneme

$$2B \cos x - 2A \sin x = \sin x.$$

porovnáme koeficienty u výrazů $\cos x$ a $\sin x$ na obou stranách rovnice

$$\left.\begin{array}{lll} \cos x : & 2B & = 0 \\ \sin x : & -2A & = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = -\tfrac{1}{2} \text{ a } B = 0.$$

partikulární řešení je

$$v(x) = -\frac{1}{2}xe^x \sin x$$

obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x - \frac{1}{2}xe^x \sin x.$$

Příklad 3.30 Řešte diferenciální rovnici $y'' - 8y' + 16y = 32x\cos 4x + 4\sin 4x$.

Řešení:
Nalezneme řešení příslušné homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y'' - 8y' + 16y &= 0 \\ r^2 - 8r + 16 &= 0 \\ r_{1,2} &= 4 \end{aligned}$$

řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

$b(x) = 32x\cos 4x + 4\sin 4x$ - speciální pravá strana $\Rightarrow$ použijeme metodu neurčitých koeficientů

partikulární řešení je ve tvaru ($\pm 4i$ není kořen) : $v(x) = (Ax + B)\cos 4x + (Cx + D)\sin 4x$

příslušné derivace jsou

$$\begin{aligned} v' &= (A + 4D)\cos 4x + 4Cx\cos 4x + (-4B + C)\sin 4x - 4Ax\sin 4x, \\ v'' &= (8C - 16B)\cos 4x - 16Ax\cos 4x + (-8A - 16D)\sin 4x - 16Cx\sin 4x. \end{aligned}$$

odhad řešení a derivace dosadíme do úplné rovnice a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} (-8A + 8C - 32D)\cos 4x + (-8A + 32B - 8C)\sin 4x - 32Cx\cos 4x + 32Ax\sin 4x \\ = 32x\cos 4x + 4\sin x. \end{aligned}$$

porovnáme koeficienty u výrazů $\cos 4x$, $x\cos 4x$, $\sin 4x$ a $x\sin 4x$ na obou stranách rovnice

$$\left.\begin{array}{lrcrcrcrl} \cos 4x: & -8A & & & + & 8C & - & 32D & = 0 \\ \sin 4x: & -8A & + & 32B & - & 8C & & & = 4 \\ x\cos 4x: & & & & - & 32C & & & = 32 \\ x\sin 4x: & 32A & & & & & & & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} A = 0, & B = -\frac{1}{8}, \\ C = -1, & D = -\frac{1}{4}. \end{array}$$

partikulární řešení je

$$v(x) = -\frac{1}{8}\cos 4x - x\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 4x$$

obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} - \frac{1}{8}\cos 4x - x\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 4x.$$

Příklad 3.31 Řešte Cauchyho úlohu $y'' + y = x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Pokud to lze, použijte k nalezení obecného řešení obě metody.

Řešení:
Nalezneme řešení příslušné homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ r^2 + 1 &= 0 \\ r_{1,2} &= \pm \mathrm{i} \end{aligned}$$

řešení zkrácené rovnice je

$$\hat{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

1) Metoda neurčitých koeficientů

$b(x) = x^2$ - speciální pravá strana

partikulární řešení je ve tvaru (0 není kořen) : $v(x) = Ax^2 + Bx + C$

příslušné derivace jsou

$$\begin{aligned} v' &= 2Ax + B, \\ v'' &= 2A. \end{aligned}$$

odhad řešení a derivace dosadíme do úplné rovnice

$$\underbrace{2A}_{v''} + \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{v(x)} = x^2$$

porovnáme koeficienty u výrazů x^2, x^1 a x^0 na obou stranách rovnice

$$\left.\begin{array}{lrl} x^2 : & A & = 1 \\ x^1 : & B & = 0 \\ x^0 : & 2 + C & = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = 1, B = 0 \text{ a } C = -2.$$

partikulární řešení je

$$v(x) = x^2 - 2$$

obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2.$$

2) Metoda variace konstant

Provedeme variaci konstant $C_1 = C_1(x),\ C_2 = C_2(x)$:

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Pro určení neznámých funkcí $C_1(x)$ a $C_2(x)$ vypočteme příslušné determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ x^2 & \cos x \end{vmatrix} = -x^2 \sin x, \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \cos x.$$

Dále bude

$$C_1' = \frac{W_1(x)}{W(x)} = -x^2 \sin x \quad \Rightarrow \quad C_1 = \int -x^2 \sin x \mathrm{d}x = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2\cos x + C_1,$$

$$C_2' = \frac{W_2(x)}{W(x)} = x^2 \cos x \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\int x^2 \cos x \mathrm{d}x = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C_2.$$

Nalezené C_1 a C_2 dosadíme do $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$

$$y = \left(x^2 \cos x - 2x \sin x - 2\cos x + C_1\right)\cos x + \left(x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C_2\right)\sin x,$$

po úpravě dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2.$$

Dosazením počátečních podmínek $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ do obecného řešení a jeho derivace určíme konstanty C_1, C_2.

$$\begin{array}{l} y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2 \\ y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x \\ \hline 1 = C_1 - 2 \qquad \Rightarrow\ C_1 = 3 \\ 2 = C_2 \end{array}$$

Hledané řešení je ve tvaru:

$$y = 3\cos x + 2\sin x + x^2 - 2.$$

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte diferenciální rovnice:

a) $y'' - 2y' = x^3 + 2x$

b) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$

c) $y'' + y' - 2y = 2x$

d) $y'' + 2y' = 8\cos 4x$

e) $y'' - 2y' + 10y = 12e^x \cos 3x$

f) $y'' - 5y' + 4y = e^x \sin x$

g) $y'' - 3y' - 10y = 2(7x+1)e^{5x}$

h) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x - 4$

i) $y'' - 4y' = 4\sin x - \cos x$

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte Cauchyho úlohu:

a) $y'' + 9y = 8\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $y'' - 5y' + 6y = (2x+1)e^{2x}, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 2$

c) $y'' - 4y' + 3y = xe^{4x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 4$