INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

1. NEURČITÝ INTEGRÁL

Průvodce studiem

V kapitole Diferenciální počet funkcí jedné proměnné jste se seznámili s derivováním funkcí. Jestliže znáte derivace elementárních funkcí a pravidla pro derivování, jste schopni derivovat libovolnou funkci. Možná Vás napadne, zda je možno z derivované funkce nějakým způsobem získat původní funkci. Opačnou operací k derivování je integrace (anglické texty používají termín antiderivace). V této kapitole se seznámíte s pojmem primitivní funkce. Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci nazveme neurčitým integrálem. Seznámíte se základními metodami integrace (substituční metoda a metoda per partes). V závěru se budeme věnovat způsobům integrace některých vybraných druhů funkcí.

1.1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

Cíle

Seznámíte se s pojmem primitivní funkce a neurčitý integrál funkce jedné proměnné.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že umíte dobře derivovat funkce jedné proměnné, že znáte tabulku derivací elementárních funkcí. Předpokládá se i základní znalost pojmu diferenciál funkce.

Výklad

V kapitole Diferenciální počet funkcí jedné proměnné jste se seznámili s derivováním funkcí. Pro danou funkci $f(x)$ dovedeme nalézt její derivaci $f'(x) = g(x)$. Věnujme se nyní opačné úloze. Hledáme takovou funkci $F(x)$, aby daná funkce $f(x)$ byla její derivací, tj. aby platilo $F'(x) = f(x)$. Tato funkce, pokud ovšem existuje, se nejen v matematice hledá velmi často a jmenuje se primitivní funkce. Postup hledání primitivní funkce se nazývá integrování (opačná operace k derivování).

Příklad 1.1.1. Pro funkci $f(x) = 3x^2 \xrightarrow{\text{derivování}} f'(x) = 6x = g(x)$

Opačná úloha $F(x) = x^3 \xleftarrow{\text{integrování}} f(x) = 3x^2$, protože platí

$$F'(x) = \left[x^3\right]' = 3x^2 = f(x).$$

Definice 1.1.1.

Říkáme, že funkce $F(x)$ je v intervalu (a,b) **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$, platí-li pro všechna $x \in (a,b)$ vztah $F'(x) = f(x)$.

Řešené úlohy

Příklad 1.1.2. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x$ v intervalu $(-1,1)$.

Řešení:

Hledáme funkci $F(x)$, jejíž derivace se na intervalu $(-1,1)$ rovná x. Je zřejmé, že to bude nějaký násobek funkce x^2. Po krátkém experimentování zjistíme, že je to funkce $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$, neboť $F'(x) = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]' = \dfrac{2x}{2} = x = f(x)$. Podle věty 1.1.1 budou i funkce, které se liší konstantou, primitivní k dané funkci.

Příklad 1.1.3. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x$ v intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení:

Jelikož všechny úvahy v řešení příkladu 1.1.2 platí pro libovolné reálné $x \in (-\infty,\infty)$, je řešením stejná funkce $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Příklad 1.1.4. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x^n$, $n \in N$ v intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení:

Podobnými úvahami dojdeme k tomu, že primitivní funkce má tvar $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$ pro všechna $x \in (-\infty,\infty)$, protože $F'(x) = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]' = \dfrac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n = f(x)$.

Příklad 1.1.5. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \dfrac{1}{x}$ v intervalu $(0,\infty)$.

Řešení:

Vidíme, že vztah uvedený v příkladu 1.1.4 nelze použít pro $n = -1$. Snažíme se najít funkci, jejíž derivací je $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$. Z přehledu derivací elementárních funkcí víme, že touto funkcí je funkce $F(x)=\ln x$, neboť $F'(x)=\left[\ln x\right]'=\dfrac{1}{x}=f(x)$ pro $x\in(0,\infty)$.

Příklad 1.1.6. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x)=\dfrac{1}{x}$ v intervalu $(-\infty,0)$.

Řešení:

Podobnými úvahami jako v předcházející části zjistíme, že primitivní funkcí k funkci $f(x)=\dfrac{1}{x}$ pro $x\in(-\infty,0)$ je funkce $F(x)=\ln|x|=\ln(-x)$.

Funkce $F(x)=\ln|x|$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)=\dfrac{1}{x}$ pro $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Avšak také funkce $F(x)=\ln|x|+5$ bude primitivní funkcí k dané funkci, neboť platí $F'(x)=\left[\ln|x|+5\right]'=\dfrac{1}{x}=f(x)$, protože derivace konstanty je rovna nule. Je zřejmé, že tvrzení platí nejen pro konstantu 5, ale i pro libovolnou jinou konstantu *C*.

Věta 1.1.1.

Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a,b), pak také funkce $F(x)+C$, kde *C* je libovolná reálná konstanta, je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a,b).

Důkaz: Jelikož na intervalu (a,b) platí $\left[F(x)+C\right]'=F'(x)=f(x)$ dostaneme podle definice 1.1.1 uvedené tvrzení.

Poznámka

K dané funkci existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se liší konstantou.

Definice 1.1.2.

Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b) se nazývá neurčitý integrál této funkce. Píšeme:

$$\int f(x)dx=F(x)+C\ .$$

Poznámka

- $\int$ *se nazývá integrační znak,*
- $f(x)$ *je integrovaná funkce (integrand),*
- dx *je diferenciál integrační proměnné,*
- C *je integrační konstanta.*

Příklady 1.1.5 a 1.1.6 bychom mohli v souladu s definicí 1.1.2 formulovat: Integrujte funkci $f(x)=\frac{1}{x}$ na daném intervalu. Zápis: $\int \frac{1}{x}dx$. Výsledek, který jsme získali (množina všech primitivních funkcí $F(x)=\ln|x|+C$), zapíšeme: $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$. Tento vztah platí pro všechna *x*, pro něž jsou příslušné funkce ($\frac{1}{x}$ a $\ln|x|$) definovany, tj. pro všechna $x\neq 0$. V takových případech často vynecháváme interval, ve kterém pracujeme.

1.2. Základní neurčité integrály

Operace integrování (tj. operace určování primitivní funkce) a derivování jsou navzájem inverzní. Z tabulky derivací elementárních funkcí hned dostaneme tabulku neurčitých integrálů (tab. 1.2.1). O správnosti uvedených vztahů se podle definice 1.1.1 snadno přesvědčíme derivováním.

Tabulka 1.2.1. Tabulka základních integrálů

[1.]	$\int 0dx=C$	
[2.]	$\int 1dx=x+C$	
[3.]	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	pro $x>0,\ \ n\neq -1$
[4.]	$\int \frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+C$	pro $x\neq 0$
[5.]	$\int \sin x\ dx=-\cos x+C$	
[6.]	$\int \cos x\ dx=\sin x+C$	
[7.]	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+C$	pro $x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k\in \boldsymbol{Z}$
[8.]	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{cotg} x+C$	pro $x\neq k\pi,\quad k\in \boldsymbol{Z}$
[9.]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$	pro $x\in(-1,1)$
[10.]	$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg} x+C$	
[11.]	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	pro $a>0,\ \ a\neq 1$

[12.] $\int e^x dx = e^x + C$

[13.] $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

[14.] $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ pro $a > 0$

[15.] $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ pro $x \in (-a, a)$, $a > 0$

[16.] $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$ pro $a \neq 0$

Poznámka

Existují rozsáhlé tabulky, ve kterých lze nalézt množství dalších neurčitých integrálů. K výsledkům můžeme dospět použitím pravidel a metod integrace, které budou uvedeny v následující části. Dnes však tyto tabulky ztrácejí význam, neboť jsou dostupné matematické programy, které zvládnou integraci složitých funkcí (např. Derive, Maple, Mathematica). Na Internetu lze nalézt řadu online kalkulátorů (např. http://integrals.wolfram.com/index.jsp, http://www.webmath.com/integrate.html *a další). Po zadání integrované funkce je nalezena primitivní funkce.*

Neurčité integrály z dalších funkcí lze získat různými integračními metodami.

Z pravidel pro derivování funkcí $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(cf)' = cf'$, $c = \text{konst.}$ a z vlastnosti primitivní funkce okamžitě plyne:

Věta 1.2.1.

Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu (a,b) primitivní funkce, pak platí:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, \quad c = \text{konst.}$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

Řešené úlohy (úpravou integrandu)

Příklad 1.2.1. Vypočtěte integrál $\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{3x}\,dx = \int x\,dx + \frac{4}{3}\int x^0 dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\ln|x| + C\,.$$

Příklad 1.2.2. Vypočtěte integrál $\int (1-\sqrt{x})^2 dx$.

Řešení:

$$\int (1-\sqrt{x})^2 dx = \int (1-2\sqrt{x}+x)dx = \int dx - 2\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x dx = x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C =$$

$$x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2} + C\,.$$

Příklad 1.2.3. Vypočtěte integrál $\int tg^2 x\; dx$.

Řešení:

$$\int \mathrm{tg}^2\, x\; dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \mathrm{tg}\, x - x + C\,.$$

Příklad 1.2.4. Vypočtěte integrál $\int \mathrm{cotg}\, x\; dx$.

Řešení:

$$\int \mathrm{cotg}\, x\; dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C\,.$$

(Použili jsme vztah [13] z tabulky 1.2.1)

Příklad 1.2.5. Vypočtěte integrál $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx = \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1} dx = \int (e^{2x}-e^x+1) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C\,.$$

Při úpravě čitatele zlomku jsme použili vztah $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Příklad 1.2.6. Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(6x+9x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(1+3x)^2+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(3x+1)^2}} =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x+1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{3}+C$$ Použili jsme vztah [16] z tabulky 1.2.1.

Poznámka

I když všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$ *mají až na konstantu stejný tvar, může se stát, že při použití různých integračních metod dostaneme pokaždé „trochu jiný“ výsledek. V tomto případě je vždy možno převést jeden tvar výsledku na druhý. Například první metodou dostaneme*

$\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos^2 x}+C$. *Jinou metodou nám vyjde* $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}\,dx = 1+\mathrm{tg}^2 x + C$. *Oba výsledky jsou správné, neboť* $1+\mathrm{tg}^2 x = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Kontrolní otázky

1. Kolik primitivních funkcí existuje k funkci e^{2x}? Uveďte některé z nich.
2. Ke které funkci je funkce $F(x) = x(\ln x - 1)$ primitivní?
3. Je funkce $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ primitivní funkce k funkci $\cos^3 x$?
4. Je funkce $\frac{1}{4+x^2}$ primitivní funkce k funkci $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}$?
5. Lze při výpočtu následujícího integrálu použít naznačený postup?

   $$\int (2^{x+2} + \frac{1}{3x})dx = 4\int 2^x dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx$$
6. Platí $\int 3e^x \sin 2x dx = 3\int e^x dx \int \sin 2x dx$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ b) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}-x\right)^2}{x^2}dx$ c) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x^3\sqrt{x}}}\,dx$

d) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx$ e) $\int \frac{x^4+8x}{x+2}dx$ f} $\int \frac{x^2+2}{1+x^2}dx$

2. a) $\displaystyle\int \frac{\left(2^x-3^x\right)^2}{6^x}dx$ b) $\displaystyle\int\left(1+\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

d) $\displaystyle\int \sin x\cos x\, dx$ e) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx$ f} $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\, dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{11}{4}-x-x^2}}$

4. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$ c) $\displaystyle\int \frac{3x\, dx}{x^2+3}$

d) $\displaystyle\int\left(\sin 2x+e^{\frac{x}{2}}\right)dx$ e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} 2x\, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$

5. a) $\displaystyle\int\left(10^{-x}+5\cos x-\sqrt{3x^5}+\frac{3}{x^2+4}\right)dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+2}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{3-2\operatorname{cotg}^2 x}{\cos^2 x}dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$; b) $-3x^{-\frac{1}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+x+C$; c) $\frac{12}{23}x^{\frac{23}{12}}+C$; d) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$;

e) $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2+C$ f) $x+\operatorname{arctg} x+C$. **2.** a) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}-2x+C$;

b) $x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$; c) $\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x+C$; d) $-\frac{1}{4}\cos 2x+C$; e) $-\operatorname{cotg} x-x+C$;

f) $2x-\operatorname{tg} x+C$. **3.** a) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}}+C$;

d) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$; e) $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$; f) $\arcsin\frac{2x+1}{6}+C$. **4.** a) $\ln\left|\ln x\right|+C$;

b) $-\ln\left|\arccos x\right|+C$; c) $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C$; d) $-\frac{1}{2}\cos 2x+2e^{\frac{x}{2}}+C$; e) $-\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right|+C$;

f) $\ln\left(e^x+2\right)+C$. **5.** a) $-\dfrac{10^{-x}}{\ln 10}+5\sin x-\dfrac{2\sqrt{3}}{7}x^{\frac{7}{2}}+\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$; b) $-\dfrac{1}{x}+\operatorname{arctg} x+C$;

c) $\arcsin x+C$; d) $x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$; e) $3\operatorname{tg} x-5x+C$.

Kontrolní test

1. Ke které funkci je funkce $F(x)=\dfrac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)$ primitivní?

   a) $\dfrac{x^3}{3+3x^2}+x^2\operatorname{arctg} x+\dfrac{1-x}{3(1+x^2)}$, b) $x^2\operatorname{arctg} x$,

   c) $x^2\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{3(1+x^2)}$, d) $\dfrac{x^3-x}{3(1+x^2)}$.

2. Ke které funkci je funkce $F(x)=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$ primitivní?

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}-\dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$, b) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}+\dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$,

   c) $\dfrac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, d) $\dfrac{1+e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

3. Ke které funkci je funkce $F(x)=x^2-\dfrac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}$ primitivní?

   a) $2x-\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$, b) $x(2+\sqrt{4-x^2})$,

   c) $x(2-\sqrt{4-x^2})$, d) $2x(1+\sqrt{4-x^2})$.

4. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

   a) $\dfrac{9}{7}\sqrt[3]{x^7}+6\sqrt[3]{x}+C$, b) $x^3+2x+3\sqrt[3]{x}+C$,

   c) $9\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}+C$, d) $\dfrac{9}{7}\sqrt[3]{x^7}+2\sqrt[3]{x}+C$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x} dx$.

a) $(\frac{2}{3})^x - 2x + (\frac{3}{2})^x + C$, b) $(\frac{2}{3})^x \ln\frac{2}{3} - 2x + (\frac{3}{2})^x \ln\frac{3}{2} + C$,

c) $\frac{2^x 3^{-x} - 3^x 2^{-x}}{\ln 2 - \ln 3} - 2x + C$, d) $\frac{2^x 3^{-x} + 3^x 2^{-x}}{\ln 2 - \ln 3} - 2x + C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{x^4 + 2 + x^{-4}}}{x^3} dx$.

a) $\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$, b) $-\frac{1}{x} - \frac{1}{5x^5} + C$,

c) $\ln|x| - \frac{5}{x^6} + C$, d) $\ln|x| - \frac{\sqrt{2}}{2x^2} - \frac{1}{4x^4} + C$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$.

a) $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x + \frac{1}{2}x + C$, b) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$,

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x + C$, d) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + x + C$.

8. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{cotg}^2 x \, dx$.

a) $\operatorname{cotg} x - x + C$, b) $\operatorname{tg} x - x + C$,

c) $-\operatorname{cotg} x - x + C$, d) $-\frac{1}{\sin x} - x + C$.

9. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{8 - x^3}{x - 2} dx$.

a) $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + C$, b) $-\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + C$,

c) $8\ln|x-2| - \frac{x^4}{4} + C$, d) $-\frac{x^3}{3} - x^2 - 4x + C$.

10. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

a) $\arccos\frac{x+2}{3}+C$, b) $\arcsin\frac{x-2}{3}+C$,

c) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$, d) $\arccos\frac{x-2}{3}+C$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. b); 4. a); 5. c); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.1 a 1.2 znovu.

Shrnutí lekce

V prvých dvou kapitolách jste se seznámili s pojmy primitivní funkce a neurčitý integrál. Operace integrování (tj. operace určování primitivní funkce) a derivování jsou navzájem inverzní. Tabulka 1.2.1 obsahuje přehled základních integrálů. Doporučujeme vytisknout si tuto tabulku, neboť bude využívána v dalších kapitolách při integraci složitějších funkcí. Všechny příklady a cvičení v kapitole 1.1.2 vyřešíme tak, že integrovanou funkci upravujeme, až dostaneme základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1.