

INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

1. NEURČITÝ INTEGRÁL



Průvodce studiem



V kapitole Diferenciální počet funkcí jedné proměnné jste se seznámili s derivováním funkcí. Jestliže znáte derivace elementárních funkcí a pravidla pro derivování, jste schopni derivovat libovolnou funkci. Možná Vás napadne, zda je možno z derivované funkce nějakým způsobem získat původní funkci. Opačnou operací k derivování je integrace (anglické texty používají termín antiderivace). V této kapitole se seznámíte s pojmem primitivní funkce. Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci nazveme neurčitým integrálem. Seznámíte se základními metodami integrace (substituční metoda a metoda per partes). V závěru se budeme věnovat způsobům integrace některých vybraných druhů funkcí.

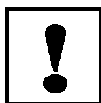
1.1. Primitivní funkce a neurčitý integrál



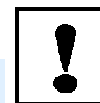
Cíle



Seznámíte se s pojmem primitivní funkce a neurčitý integrál funkce jedné proměnné.



Předpokládané znalosti



Předpokládáme, že umíte dobře derivovat funkce jedné proměnné, že znáte tabulku derivací elementárních funkcí. Předpokládá se i základní znalost pojmu diferenciál funkce.



Výklad



V kapitole Diferenciální počet funkcí jedné proměnné jste se seznámili s derivováním funkcí. Pro danou funkci $f(x)$ dovedeme nalézt její derivaci $f'(x) = g(x)$. Věnujme se nyní opačné úloze. Hledáme takovou funkci $F(x)$, aby daná funkce $f(x)$ byla její derivací, tj. aby platilo $F'(x) = f(x)$. Tato funkce, pokud ovšem existuje, se nejen v matematice hledá velmi často a jmenuje se primitivní funkce. Postup hledání primitivní funkce se nazývá integrování (opačná operace k derivování).

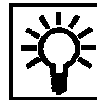
Příklad 1.1.1. Pro funkci $f(x) = 3x^2 \xrightarrow{\text{derivování}} f'(x) = 6x = g(x)$

Opačná úloha $F(x) = x^3 \xleftarrow{\text{integrování}} f(x) = 3x^2$, protože platí

$$F'(x) = [x^3]' = 3x^2 = f(x).$$

Definice 1.1.1.

Říkáme, že funkce $F(x)$ je v intervalu (a, b) **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$, platí-li pro všechna $x \in (a, b)$ vztah $F'(x) = f(x)$.

**Řešené úlohy**

Příklad 1.1.2. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x$ v intervalu $(-1, 1)$.

Řešení:

Hledáme funkci $F(x)$, jejíž derivace se na intervalu $(-1, 1)$ rovná x . Je zřejmé, že to bude nějaký násobek funkce x^2 . Po krátkém experimentování zjistíme, že je to funkce

$$F(x) = \frac{x^2}{2}, \text{ neboť } F'(x) = \left[\frac{x^2}{2} \right]' = \frac{2x}{2} = x = f(x). \text{ Podle věty 1.1.1 budou i funkce, které}$$

se liší konstantou, primitivní k dané funkci.

Příklad 1.1.3. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení:

Jelikož všechny úvahy v řešení příkladu 1.1.2 platí pro libovolné reálné $x \in (-\infty, \infty)$, je

$$\text{řešením stejná funkce } F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Příklad 1.1.4. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení:

Podobnými úvahami dojdeme k tomu, že primitivní funkce má tvar $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$

$$\text{pro všechna } x \in (-\infty, \infty), \text{ protože } F'(x) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n = f(x).$$

Příklad 1.1.5. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ v intervalu $(0, \infty)$.

Řešení:

Vidíme, že vztah uvedený v příkladu 1.1.4 nelze použít pro $n = -1$. Snažíme se najít

funkci, jejíž derivací je $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Z přehledu derivací elementárních funkcí víme,

že touto funkcí je funkce $F(x) = \ln x$, neboť $F'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} = f(x)$ pro $x \in (0, \infty)$.

Příklad 1.1.6. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ v intervalu $(-\infty, 0)$.

Řešení:

Podobnými úvahami jako v předcházející části zjistíme, že primitivní funkcí k funkci

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ pro } x \in (-\infty, 0) \text{ je funkce } F(x) = \ln|x| = \ln(-x).$$

Funkce $F(x) = \ln|x|$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Avšak také funkce $F(x) = \ln|x| + 5$ bude primitivní funkcí k dané funkci, neboť platí

$$F'(x) = [\ln|x| + 5]' = \frac{1}{x} = f(x), \text{ protože derivace konstanty je rovna nule. Je zřejmé, že}$$

tvrzení platí nejen pro konstantu 5, ale i pro libovolnou jinou konstantu C .

Věta 1.1.1.

Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) , pak také funkce $F(x) + C$, kde C je libovolná reálná konstanta, je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) .

Důkaz: Jelikož na intervalu (a, b) platí $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$ dostaneme podle definice 1.1.1 uvedené tvrzení.

Poznámka

K dané funkci existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se liší konstantou.

Definice 1.1.2.

Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu (a, b) se nazývá neurčitý integrál této funkce. Píšeme:

$$\int f(x) dx = F(x) + C .$$

Poznámka

- \int se nazývá integrační znak,
- $f(x)$ je integrovaná funkce (integrand),
- dx je diferenciál integrační proměnné,
- C je integrační konstanta.

Příklady 1.1.5 a 1.1.6 bychom mohli v souladu s definicí 1.1.2 formulovat: Integrujte funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na daném intervalu. Zápis: $\int \frac{1}{x} dx$. Výsledek, který jsme získali (množina všech primitivních funkcí $F(x) = \ln|x| + C$), zapíšeme: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$. Tento vztah platí pro všechna x , pro něž jsou příslušné funkce ($\frac{1}{x}$ a $\ln|x|$) definovány, tj. pro všechna $x \neq 0$. V takových případech často vynecháváme interval, ve kterém pracujeme.

1.2. Základní neurčité integrály

Operace integrování (tj. operace určování primitivní funkce) a derivování jsou navzájem inverzní. Z tabulky derivací elementárních funkcí hned dostaneme tabulku neurčitých integrálů (tab. 1.2.1). O správnosti uvedených vztahů se podle definice 1.1.1 snadno přesvědčíme derivováním.

Tabulka 1.2.1. Tabulka základních integrálů

[1.]	$\int 0 dx = C$	
[2.]	$\int 1 dx = x + C$	
[3.]	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	pro $x > 0$, $n \neq -1$
[4.]	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	pro $x \neq 0$
[5.]	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	
[6.]	$\int \cos x dx = \sin x + C$	
[7.]	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
[8.]	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$	pro $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
[9.]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	pro $x \in (-1,1)$
[10.]	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$	
[11.]	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	pro $a > 0$, $a \neq 1$

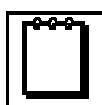
$$[12.] \int e^x dx = e^x + C$$

$$[13.] \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$[14.] \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad \text{pro } a > 0$$

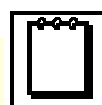
$$[15.] \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \text{pro } x \in (-a, a), a > 0$$

$$[16.] \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad \text{pro } a \neq 0$$



Poznámka

Existují rozsáhlé tabulky, ve kterých lze nalézt množství dalších neurčitých integrálů. K výsledkům můžeme dospět použitím pravidel a metod integrace, které budou uvedeny v následující části. Dnes však tyto tabulky ztrácejí význam, neboť jsou dostupné matematické programy, které zvládnou integraci složitých funkcí (např. Derive, Maple, Mathematica). Na Internetu lze nalézt řadu online kalkulačtorů (např. <http://integrals.wolfram.com/index.jsp>, <http://www.webmath.com/integrate.html> a další). Po zadání integrované funkce je nalezena primitivní funkce.



Neurčité integrály z dalších funkcí lze získat různými integračními metodami.

Z pravidel pro derivování funkcí $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(cf)' = cf'$, $c = \text{konst.}$ a z vlastnosti primitivní funkce okamžitě plyne:

Věta 1.2.1.

Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu (a, b) primitivní funkce, pak platí:

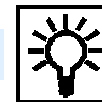
$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, \quad c = \text{konst.}$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$



Řešené úlohy (úpravou integrandu)



Příklad 1.2.1. Vypočtěte integrál $\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x} dx = \int x dx + \frac{4}{3} \int x^0 dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \ln|x| + C.$$

Příklad 1.2.2. Vypočtěte integrál $\int (1 - \sqrt{x})^2 dx$.**Řešení:**

$$\int (1 - \sqrt{x})^2 dx = \int (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = \int dx - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x dx = x - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C =$$

$$x - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2} + C.$$

Příklad 1.2.3. Vypočtěte integrál $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.**Řešení:**

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Příklad 1.2.4. Vypočtěte integrál $\int \operatorname{cotg} x dx$.**Řešení:**

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C.$$

(Použili jsme vztah [13] z tabulky 1.2.1)

Příklad 1.2.5. Vypočtěte integrál $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$.**Řešení:**

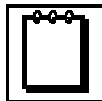
$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C.$$

Při úpravě čitatele zlomku jsme použili vztah $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.**Příklad 1.2.6.** Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - 6x - 9x^2}}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(6x+9x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(1+3x)^2+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(3x+1)^2}} =$$

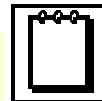
$$\frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x+1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{3} + C \quad \text{Použili jsme vztah [16] z tabulky 1.2.1.}$$

**Poznámka**

I když všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$ mají až na konstantu stejný tvar, může se stát, že při použití různých integračních metod dostaneme pokaždé „trochu jiný“ výsledek. V tomto případě je vždy možno převést jeden tvar výsledku na druhý. Například první metodou dostaneme

$$\int \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos^2 x} + C. \quad \text{Jinou metodou nám vyjde } \int \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = 1 + \operatorname{tg}^2 x + C. \quad \text{Oba výsledky}$$

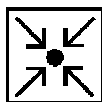
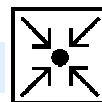
jsou správné, neboť $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

**Kontrolní otázky**

1. Kolik primitivních funkcí existuje k funkci e^{2x} ? Uveďte některé z nich.
2. Ke které funkci je funkce $F(x) = x(\ln x - 1)$ primitivní?
3. Je funkce $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$ primitivní funkce k funkci $\cos^3 x$?
4. Je funkce $\frac{1}{4+x^2}$ primitivní funkce k funkci $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$?
5. Lze při výpočtu následujícího integrálu použít naznačený postup?

$$\int (2^{x+2} + \frac{1}{3x}) dx = 4 \int 2^x dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx$$

6. Platí $\int 3e^x \sin 2x dx = 3 \int e^x dx \int \sin 2x dx$?

**Úlohy k samostatnému řešení**

1. a) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ b) $\int \frac{(\sqrt[3]{x} - x)^2}{x^2} dx$ c) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x^3}\sqrt{x}} dx$
d) $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$ e) $\int \frac{x^4 + 8x}{x + 2} dx$ f) $\int \frac{x^2 + 2}{1 + x^2} dx$

2. a) $\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x} dx$ b) $\int (1 + \cos^2 x - \sin^2 x) dx$ c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$
 d) $\int \sin x \cos x dx$ e) $\int \cotg^2 x dx$ f) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$
3. a) $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$ b) $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$ c) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$
 d) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3}$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{11}{4} - x - x^2}}$
4. a) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arccos x}$ c) $\int \frac{3x dx}{x^2 + 3}$
 d) $\int \left(\sin 2x + e^{\frac{x}{2}} \right) dx$ e) $\int \operatorname{tg} 2x dx$ f) $\int \frac{e^x}{e^x + 2} dx$
5. a) $\int \left(10^{-x} + 5 \cos x - \sqrt{3x^5} + \frac{3}{x^2 + 4} \right) dx$ b) $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx$
 c) $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^4}} dx$ d) $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} dx$ e) $\int \frac{3 - 2 \cotg^2 x}{\cos^2 x} dx$



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C$; b) $-3x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + x + C$; c) $\frac{12}{23}x^{\frac{23}{12}} + C$; d) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$;
 e) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + C$ f) $x + \operatorname{arctg} x + C$. 2. a) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln \frac{3}{2}} - 2x + C$;
 b) $x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$; c) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$; d) $-\frac{1}{4} \cos 2x + C$; e) $-\operatorname{cotg} x - x + C$;
 f) $2x - \operatorname{tg} x + C$. 3. a) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$;
 d) $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C$; e) $\arcsin \frac{x-2}{2} + C$; f) $\arcsin \frac{2x+1}{6} + C$. 4. a) $\ln |\ln x| + C$;
 b) $-\ln |\arccos x| + C$; c) $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) + C$; d) $-\frac{1}{2} \cos 2x + 2e^{\frac{x}{2}} + C$; e) $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$;

- f) $\ln(e^x + 2) + C$. 5. a) $-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + 5 \sin x - \frac{2\sqrt{3}}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; b) $-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C$;
 c) $\arcsin x + C$; d) $x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$; e) $3 \operatorname{tg} x - 5x + C$.



Kontrolní test



- Ke které funkci je funkce $F(x) = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln(1+x^2)$ primitivní?
 - $\frac{x^3}{3+3x^2} + x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1-x}{3(1+x^2)}$,
 - $x^2 \operatorname{arctg} x$,
 - $x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{x}{3} + \frac{x}{3(1+x^2)}$,
 - $\frac{x^3 - x}{3(1+x^2)}$.
- Ke které funkci je funkce $F(x) = \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}}$ primitivní?
 - $\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \frac{e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$,
 - $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} + \frac{e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$,
 - $\frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}$,
 - $\frac{1+e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.
- Ke které funkci je funkce $F(x) = x^2 - \frac{1}{3} \sqrt{(4-x^2)^3}$ primitivní?
 - $2x - \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2}$,
 - $x(2 + \sqrt{4-x^2})$,
 - $x(2 - \sqrt{4-x^2})$,
 - $2x(1 + \sqrt{4-x^2})$.
- Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.
 - $\frac{9}{7} \sqrt[3]{x^7} + 6\sqrt[3]{x} + C$,
 - $x^3 + 2x + 3\sqrt[3]{x} + C$,
 - $9\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + C$,
 - $\frac{9}{7} \sqrt[3]{x^7} + 2\sqrt[3]{x} + C$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x} dx$.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2x + \left(\frac{3}{2}\right)^x + C$,

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln \frac{2}{3} - 2x + \left(\frac{3}{2}\right)^x \ln \frac{3}{2} + C$,

c) $\frac{2^x 3^{-x} - 3^x 2^{-x}}{\ln 2 - \ln 3} - 2x + C$,

d) $\frac{2^x 3^{-x} + 3^x 2^{-x}}{\ln 2 - \ln 3} - 2x + C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{x^4 + 2 + x^{-4}}}{x^3} dx$.

a) $\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$,

b) $-\frac{1}{x} - \frac{1}{5x^5} + C$,

c) $\ln|x| - \frac{5}{x^6} + C$,

d) $\ln|x| - \frac{\sqrt{2}}{2x^2} - \frac{1}{4x^4} + C$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$.

a) $-\frac{1}{2} \cotg^2 x + \frac{1}{2} x + C$,

b) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C$,

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cotg x + C$,

d) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + x + C$.

8. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \cotg^2 x dx$.

a) $\cotg x - x + C$,

b) $\operatorname{tg} x - x + C$,

c) $-\cotg x - x + C$,

d) $-\frac{1}{\sin x} - x + C$.

9. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{8 - x^3}{x - 2} dx$.

a) $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + C$,

b) $-\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + C$,

c) $8 \ln|x - 2| - \frac{x^4}{4} + C$,

d) $-\frac{x^3}{3} - x^2 - 4x + C$.

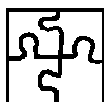
10. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

a) $\arccos \frac{x+2}{3} + C$,

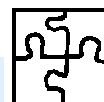
b) $\arcsin \frac{x-2}{3} + C$,

c) $\arcsin \frac{x+2}{3} + C$,

d) $\arccos \frac{x-2}{3} + C$.



Výsledky testu



1. b); 2. c); 3. b); 4. a); 5. c); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. c).

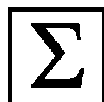


Průvodce studiem

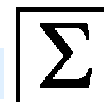


Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.1 a 1.2 znovu.



Shrnutí lekce



V prvních dvou kapitolách jste se seznámili s pojmy primitivní funkce a neurčitý integrál. Operace integrování (tj. operace určování primitivní funkce) a derivování jsou navzájem inverzní. Tabulka 1.2.1 obsahuje přehled základních integrálů. Doporučujeme vytisknout si tuto tabulku, neboť bude využívána v dalších kapitolách při integraci složitějších funkcí. Všechny příklady a cvičení v kapitole 1.1.2 vyřešíme tak, že integrovanou funkci upravujeme, až dostaneme základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1.