1.6. Integrace goniometrických funkcí

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme podrobněji zabývat integrací funkcí, které jsou složené z goniometrických funkcí. Takové integrály se často vyskytují v praktických aplikacích. Budeme se s nimi setkávat hlavně při výpočtu vícenásobných integrálů v Matematice III.

Při výpočtu integrálů tohoto typu je obvykle používána substituční metoda. Některé integrály se také dají vypočítat metodou per partes. Vhodnou substitucí lze dané integrály často převést na integrály z racionálních funkcí, které jsme se naučili integrovat v předcházející kapitole. Pro jednotlivé typy integrálů přehledně uvedeme vhodnou metodu výpočtu.

Cíle

Seznámíte se s postupy, které jsou vhodné při integraci funkcí složených z goniometrických funkcí. Uvedeme základní typy těchto integrálů a nejvhodnější metody integrace těchto funkcí.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1 a umíte vypočítat integrály substituční metodou, metodou per partes a umíte integrovat racionální funkce. Předpokládáme, že znáte základní vlastnosti goniometrických funkcí a důležité vztahy, které pro ně platí.

Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Výklad

Nejprve se budeme zabývat integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, kde m, n jsou celá čísla. Jeden takový integrál jsme již počítali, viz příklad 1.4.2. Integrály tohoto typu budeme velmi často dostávat při výpočtu dvojných a trojných integrálů v předmětu Matematika III. Postup výpočtu závisí na tom, zda jsou čísla m, n sudá nebo lichá. Nejprve uvedeme přehledně postup pro jednotlivé možnosti a pak pro každou možnost vypočítáme příklad, na kterém postup objasníme.

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, kde $m,\ n \in \mathbf{Z}$:

a)	m je liché	substituce $\cos x = t$,
b)	n je liché	substituce $\sin x = t$,
c)	m i n sudé, alespoň jedno záporné	substituce $\operatorname{tg} x = t$,
d)	m i n sudé nezáporné	použijeme vzorce pro dvojnásobný úhel $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.1. Vypočtěte integrál $\int \sin^5 x \cos^2 x\,dx$.

Řešení:

V tomto případě je $m=5$, $n=2$, takže budeme volit substituci $\cos x = t$. Pro diferenciál dostáváme $-\sin x\,dx = dt$. Z integrované funkce si tedy „vypůjčíme“ jeden sinus pro diferenciál a zbývající siny snadno převedeme na funkci kosinus pomocí známého vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dostaneme:

$$\int \sin^5 x \cos^2 x\,dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \cos^2 x \sin x\,dx =$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cos^2 x \sin x\,dx = \left| \begin{array}{c} \text{substituce:} \\ \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = -\int \left(1-t^2\right)^2 t^2 dt =$$

$$= -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = -\frac{t^7}{7} + 2\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

Poznámky

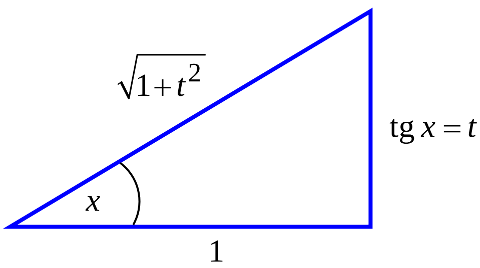
1. Jsou-li lichá m i n, můžeme si vybrat, jakou substituci použijeme, zda a) nebo b). Takovou úlohu jsme již řešili v příkladu 1.4.2.

2. Obecně si stačí pamatovat, že v případě liché mocniny použijeme jednu funkci sinus (resp. kosinus) pro diferenciál a zbývající mocninu (bude sudá) převedeme na druhou funkci (kosinus, resp. sinus) a tu také položíme rovnu nové proměnné.

Příklad 1.5.2. Vypočtěte integrál $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\,dx$.

Řešení:

V tomto případě je $m = 2$, $n = -8$. Jelikož je $n<0$, budeme volit substituci $\operatorname{tg} x = t$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pro hodnoty z uvedeného intervalu je $x = \operatorname{arctg} t$, a tedy diferenciál $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Pro výpočet integrálu ještě potřebujeme vyjádřit funkce $\sin x$ a $\cos x$ pomocí funkce $\operatorname{tg} x$. Potřebné vztahy snadno odvodíme z pravoúhlého trojúhelníka, jehož jeden úhel má velikost *x*. Jestliže přilehlou odvěsnu zvolíme rovnu 1, bude mít protilehlá odvěsna velikost $\operatorname{tg} x = t$. Z Pythagorovy věty vypočteme velikost přepony $\sqrt{1+t^2}$. Z definic funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé, resp. přilehlé odvěsny ku přeponě) dostaneme:



$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} .$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\,dx = \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ \operatorname{tg} x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^8} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^4}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2\left(1+t^2\right)^4}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt =$$

$$= \int t^2\left(1+t^2\right)^2 dt = \int t^2\left(1+2t^2+t^4\right)dt = \int\left(t^2+2t^4+t^6\right)dt = \frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{2}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + C \ .$$

Příklad 1.5.3. Vypočtěte integrál $\int \sin^4 x\,dx$.

Řešení:

Máme $m = 4$ a $n = 0$. Jelikož je $m>0$ a je sudé, snížíme mocninu použitím vzorce pro poloviční úhel.

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2})dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4}\right] + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C \ .$$

Poznámka

Integrál z funkcí $\cos 2x$ *a* $\cos 4x$ *jsme vypočetli podle vzorce* [16] *z tabulky 1.2.1. Prakticky používáme substituci* $2x = t$ *, resp.* $4x = t$.

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Výklad

V další části se budeme zabývat integrály racionálních funkcí, které dostaneme z funkcí $\sin x$, $\cos x$ a reálných čísel pomocí konečného počtu aritmetických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení). Často jsou tyto integrály značeny jako integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$, kde $R(u,v)$ představuje racionální funkci dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$.

Jedná se například o integrály funkcí:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1+\sin x + \cos x}{1-\sin x - \cos x}.$$

Poznámka

Pokud bychom mezi výchozí funkce přidali ještě funkce $\operatorname{tg} x$ *a* $\operatorname{cotg} x$, *nedostaneme nic nového, neboť* $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *a* $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. *Po úpravě dostaneme opět racionální funkci vytvořenou ze sinů a kosinů.*

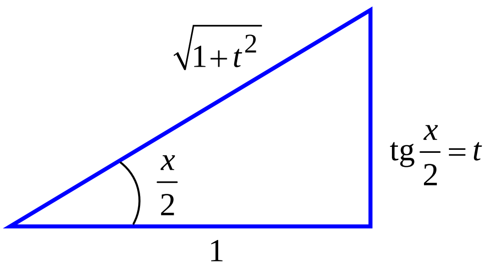
Univerzální substituce

Ukážeme, že integrál typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ můžeme substitucí

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\,, \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

převést na integrál racionální lomené funkce. K tomu musíme nejprve funkce $\sin x$ a $\cos x$ vyjádřit pomocí $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Analogicky jako v příkladu 1.5.2. snadno odvodíme potřebné vztahy pro poloviční úhel $\dfrac{x}{2}$ z pravoúhlého trojúhelníka. Jestliže přilehlou odvěsnu zvolíme rovnu 1, bude mít protilehlá odvěsna velikost $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$.



Z Pythagorovy věty vypočteme velikost přepony $\sqrt{1+t^2}$. Z definic funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé resp. přilehlé odvěsny ku přeponě) dostaneme:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ a } \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

S použitím vzorců pro dvojnásobný úhel

($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$) získáme

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

Podstatné je, že po substituci dostáváme místo funkcí sinus a kosinus racionální funkce.

Ze vztahu $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ pro $x \in (-\pi, \pi)$ dostáváme $\dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, a tedy $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$. Po dosazení dostáváme integrál racionální funkce

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt \ .$$

Shrnutí:

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ můžeme řešit substitucí

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\,, \qquad x \in (-\pi, \pi)\,.$$

Pak vyjádříme

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt\,.$$

Řešené úlohy

Příklad 1.5.4. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\sin x}dx\,, \quad x \in (0, \pi)\,.$

Řešení:

Uvedený integrál jsme již jednou řešili substitucí (příklad 1.4.6). Z výše odvozených vztahů snadno dostaneme:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\,.$$

Příklad 1.5.5. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 3}dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Z výše odvozených vztahů snadno dostaneme:

$$\int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 3}dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\frac{2t}{1+t^2} + 3}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2-4t+3+3t^2}dt =$$

$$= \int \frac{2}{2t^2-4t+4}dt = \int \frac{1}{t^2-2t+2}dt = \int \frac{1}{t^2-2t+1+1}dt = \int \frac{1}{1+(t-1)^2}dt =$$

$$= \operatorname{arctg}(t-1) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1) + C\,.$$

Příklad 1.5.6. Vypočtěte integrál $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\,dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Z výše odvozených vztahů dostaneme:

$$\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\,dx=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int \frac{2+2t}{2t^2-2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=$$

$$=\int \frac{2(t+1)}{(t^2-t)(1+t^2)}\,dt=\int \frac{2(t+1)}{t(t-1)(1+t^2)}\,dt$$

Dostali jsme integrál z racionální funkce ryze lomené. Pro rozklad racionální funkce na parciální zlomky použijeme postup uvedený v kapitole 1.5. Polynom ve jmenovateli má reálné kořeny $t_1=0$, $t_2=1$ a komplexně sdružené kořeny $t_{3,4}=\pm i$. Rozklad na součet parciálních zlomků bude mít tvar:

$$\frac{2(t+1)}{t(t-1)(1+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C2t}{1+t^2}+\frac{D}{1+t^2}\,.$$

Nalezneme neznámé koeficienty *A, B, C, D* rozkladu z rovnice

$$2(t+1)=A(t-1)(1+t^2)+Bt(1+t^2)+C2t^2(t-1)+Dt(t-1)\,.$$

Dostaneme: $A=-2,\ \ B=2,\ \ C=0,\ \ D=-2$.

Integrujeme parciální zlomky:

$$\int \frac{2(t+1)}{t(t-1)(1+t^2)}dt=\int\left(\frac{-2}{t}+\frac{2}{t-1}+\frac{-2}{1+t^2}\right)dt=-2\ln|t|+2\ln|t-1|-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|-2\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C=2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|-x+C\,.$$

Poznámka

Substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ *pro* $x\in(-\pi,\pi)$ *můžeme řešit každý integrál typu* $\int R(\sin x,\cos x)dx$.

Vzniklé racionální funkce však mohou být komplikované a integrace pracná. V některých speciálních případech může k cíli rychleji vést substituce $\sin x=t$, $\cos x=t$, *případně* $\operatorname{tg}x=t$.

Kontrolní otázky

1. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, $m, n \in \mathbf{Z}$, je-li m liché?
2. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, $m, n \in \mathbf{Z}$, je-li n liché?
3. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, $m, n \in \mathbf{Z}$, jsou-li m i n sudé?
4. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$?
5. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx$?
6. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{1}{\sin^3 x}\, dx$?
7. Jaký postup zvolíte při výpočtu integrálu $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$?
8. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx$?
9. Jakou funkci představuje zápis $R(\sin x, \cos x)$?
10. Kdy je vhodná univerzální substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$?
11. Je vhodná univerzální substituce při výpočtu integrálu $\int \frac{1}{2-\cos x}\, dx$?
12. Při výpočtu integrálu $\int \frac{\sin x}{2-\cos x}\, dx$ je vhodnější jiná než univerzální substituce. Jaká?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int \cos^3 x\, dx$ b) $\int \sin^5 x\, dx$ c) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

d) $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$ e) $\int \sin^4 x\, dx$ f) $\int \cos^4 x\, dx$

g) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ h) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx$ i) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx$

j) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$ k) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$ l) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

2. a) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x}\,dx$ b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\,dx$ c) $\int \frac{\sin x}{2+\cos^2 x}\,dx$

d) $\int \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}\,dx$ e) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ f) $\int \sqrt[3]{\sin x}\cos^5 x\,dx$

3. a) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$ c) $\int \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$ e) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ f) $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\,x - 1}{\mathrm{tg}\,x + 1}\,dx$

4. a) $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ b) $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ c) $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{4\sin x - 7\cos x - 7}$ e) $\int \frac{\sin x - 1}{\cos x - 1}\,dx$ f) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$; b) $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$; c) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$;

d) $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C$; e) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$; f) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$;

g) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + C$; h) $\sin x + \frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$; i) $\ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$;

j) $\cos x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right| + C$; k) $-\sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C$; l) $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$.

2. a) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x}{\sin x + 4}\right| + C$; b) $\frac{1}{2}\cos^2 x - 3\cos x + 6\ln|\cos x + 2| + C$; c) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{2}} + C$;

d) $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right) + C$; e) $\frac{5}{2}\sqrt{\cos^5 x} - 2\sqrt{\cos x} + C$;

f) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^4 x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^8 x} + \frac{3}{14}\sqrt[3]{\sin^{14} x} + C$. **3.** a) $\mathrm{tg}\,x - x + C$; b) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x + C$;

c) $\ln|\mathrm{tg}\,x| + C$; d) $\frac{1}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{tg}\,x\right) + C$; e) $\mathrm{tg}\,x - \frac{1}{\mathrm{tg}\,x} + C$; f) $\ln|\mathrm{tg}\,x + 1| - 2x + C$.

4. a) $\ln\left|\frac{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right| + C$; b) $\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$; c) $\frac{2}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}} + C$; d) $\frac{1}{4}\ln\left|4\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 7\right| + C$;

e) $\ln\left|\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C$; f) $\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

Kontrolní test

1. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$?

   a) $\cos x = t$, b) $\sin x = t$,

   c) univerzální, d) $\mathrm{tg}\, x = t$.

2. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int\sin^7 x\, dx$?

   a) $\cos x = t$, b) $\sin x = t$,

   c) univerzální, d) $\mathrm{tg}\, x = t$.

3. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int\frac{dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$?

   a) univerzální, b) $\sin x = t$,

   c) $\mathrm{tg}\, x = t$, d) $\cos x = t$.

4. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\cos^5 x\, dx$.

   a) $\sin x+\frac{2}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$, b) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$,

   c) $\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C$, d) $\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

   a) $-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C$, b) $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$,

   c) $-\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+C$, d) $\frac{3}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\sin^2 x\cos^4 x\, dx$.

   a) $\frac{1}{8}(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin^3 2x)+C$, b) $\frac{1}{6}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x)+C$,

   c) $\frac{1}{8}(\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin^3 x)+C$, d) $\frac{1}{6}(x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin^3 2x)$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x}\,dx$ (lze i bez substituce).

a) $-\operatorname{cotg} x + 2\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$, b) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$,

c) $-\operatorname{cotg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^3 x + C$, d) $-\operatorname{tg} x + 2\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$.

8. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx$.

a) $-\frac{1}{2}\sin^2 x - 2\sin x - 3\ln|\sin x - 2| + C$, b) $\frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x - 3\ln|2-\sin x| + C$,

c) $\frac{1}{2}\sin^2 x - 2\sin x + 3\ln|2-\sin x| + C$, d) $\frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x + 3\ln|\sin x - 2| + C$.

9. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$.

a) $2\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, b) $\ln|1+\operatorname{tg} x| + C$, c) $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$, d) $2\ln|1+\operatorname{tg} x| + C$.

10. Bez použití univerzální substituce vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$.

a) $-\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C$, b) $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C$, c) $\operatorname{cotg} x - \frac{1}{\cos x} + C$, d) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + C$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. c); 4. b); 5. b); 6. c); 7. a); 8. d); 9. c); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.6 znovu a propočítat další úlohy k samostatnému řešení.

Shrnutí lekce

V praktických aplikacích se velmi často vyskytují integrály, které obsahují goniometrické funkce. Při výpočtu integrálů tohoto typu je obvykle užívána substituční metoda. V této kapitole jsou přehledně uvedeny substituce používané pro základní typy integrálů, se kterými se často setkáváme. Často se vyskytují integrály, které je možno řešit několika způsoby. Je dobré zvolit takovou metodu, která povede nejrychleji k cíli. Obvykle postupujeme takto:

- Nejprve uvažíme, zda nelze použít substituci $\sin x = t$ nebo $\cos x = t$,
- pak zkoušíme, zda není vhodná substituce $\operatorname{tg} x = t$,
- nakonec se pokusíme problém vyřešit univerzální substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.