## 1.7. Neelementární integrály

### Výklad

Každá funkce $f(x)$, která je spojitá na otevřeném intervalu $I$, má na tomto intervalu primitivní funkci. V předcházejících kapitolách jsme se zabývali metodami výpočtu primitivních funkcí. Každá primitivní funkce byla vyjádřena konečným výrazem obsahujícím známé elementární funkce (např. $x^3$, $\sqrt[5]{x^3}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, $e^x$, $\ln x$, $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$, ...).

Existují však spojité funkce jedné proměnné, jejichž primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí. Takovými funkcemi jsou např. funkce

$$\sin x^2,\ \cos x^2,\ e^{x^2},\ e^{-x^2},\ \frac{e^x}{x},\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{\cos x}{x},\ \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}.$$

K těmto funkcím sice primitivní funkce existují, ale nelze je vyjádřit elementárními funkcemi v konečném tvaru. V tomto případě integrál takové funkce představuje neelementární funkci, kterou nazýváme **vyšší transcendentní funkce**.

Obecně nelze říci, kdy se nám nedaří nalézt primitivní funkci, protože jsme použili nevhodnou metodu a kdy z toho důvodu, že ji nelze vyjádřit v konečném tvaru (jde o vyšší transcendentní funkci). Tuto otázku dovedeme odpovědět jen u některých integrálů, u nichž víme, že se jedná o vyšší transcendentní funkce:

$\int e^{-x^2}dx$ (Gaussova funkce), $\int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{\ln t}{t}dt$ (integrální logaritmus), $\int \frac{\sin x}{x}dx$ (integrální sinus), $\int \frac{\cos x}{x}dx$ (integrální kosinus), $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$, $|k|<1$ (eliptický integrál prvního druhu), $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ (Fresnelovy integrály).

Integrály tohoto typu se vyskytují v řadě praktických aplikací např. v teorii chyb, pravděpodobnosti a statistice.

Jistou výhodou při počítání integrálů je fakt, že v případě pochybností můžeme správnost výpočtu ověřit zkouškou, neboť z definice primitivní funkce plyne

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)\ .$$

Pokud je náš výpočet správný, zderivováním výsledné funkce dostaneme integrovanou funkci.