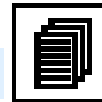




1.7. Neelementární integrály



Výklad

Každá funkce $f(x)$, která je spojitá na otevřeném intervalu I , má na tomto intervalu primitivní funkci. V předcházejících kapitolách jsme se zabývali metodami výpočtu primitivních funkcí. Každá primitivní funkce byla vyjádřena konečným výrazem obsahujícím známé elementární funkce (např. x^3 , $\sqrt[5]{x^3}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\arctg x$, ...).

Existují však spojitě funkce jedné proměnné, jejichž primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí. Takovými funkcemi jsou např. funkce

$$\sin x^2, \cos x^2, e^{x^2}, e^{-x^2}, \frac{e^x}{x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}.$$

K těmto funkcím sice primitivní funkce existují, ale nelze je vyjádřit elementárními funkcemi v konečném tvaru. V tomto případě integrál takové funkce představuje neelementární funkci, kterou nazýváme **vyšší transcendentní funkce**.

Obecně nelze říci, kdy se nám nedaří nalézt primitivní funkci, protože jsme použili nevhodnou metodu a kdy z toho důvodu, že ji nelze vyjádřit v konečném tvaru (jde o vyšší transcendentní funkci). Tuto otázku dovedeme odpovědět jen u některých integrálů, u nichž víme, že se jedná o vyšší transcendentní funkce:

$$\int e^{-x^2} dx \text{ (Gaussova funkce), } \int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{\ln t}{t} dt \text{ (integrální logaritmus), } \int \frac{\sin x}{x} dx$$

(integrální sinus), $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (integrální kosinus), $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$, $|k| < 1$ (eliptický integrál prvního druhu), $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ (Fresnelovy integrály).

Integrály tohoto typu se vyskytují v řadě praktických aplikací např. v teorii chyb, pravděpodobnosti a statistice.

Jistou výhodou při počítání integrálů je fakt, že v případě pochybností můžeme správnost výpočtu ověřit zkouškou, neboť z definice primitivní funkce plyne

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Pokud je náš výpočet správný, zderivováním výsledné funkce dostaneme integrovanou funkci.