2. URČITÝ INTEGRÁL

Průvodce studiem

V předcházející kapitole jsme se seznámili s pojmem neurčitý integrál, který dané funkci přiřazoval opět funkci (přesněji množinu funkcí). V této kapitole se budeme věnovat určitému integrálu, který dané funkci přiřazuje číslo.

Určitý integrál má využití ve velkém množství aplikací. Pomocí určitého integrálu můžeme počítat obsahy ploch, délky křivek, objemy a pláště rotačních těles, statické momenty rovinných obrazců, křivek a rotačních těles, souřadnice těžiště. Velké množství aplikací naleznete ve fyzice (výpočet rychlosti, dráhy, práce, ...). Další aplikace naleznete v ekonomice, financích, pravděpodobnosti a statistice a v mnoha dalších oborech.

Existuje několik přístupů, jak vybudovat pojem určitý integrál a tomu odpovídá několik druhů určitých integrálů (Newtonův, Riemannův, Lebesgueův). Podle způsobu zavedení se mění třída integrovatelných funkcí. Dnes bývá obvyklé používat definici, jak ji zavedl významný německý matematik B. Riemann (1826 – 1866). Potřeba vybudování tohoto pojmu vychází z potřeb řešení geometrických problémů a problémů klasické mechaniky. Množina funkcí, které jsou integrovatelné v Riemannově smyslu je dostatečně široká pro inženýrskou praxi. Způsob zavedení je východiskem pro numerické výpočty určitých integrálů.

2.1. Pojem Riemannova určitého integrálu

Cíle

Seznámíte se s pojmem Riemannova integrálu funkce jedné proměnné a geometrickým významem tohoto integrálu.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce, neurčitý integrál a jejich výpočet.

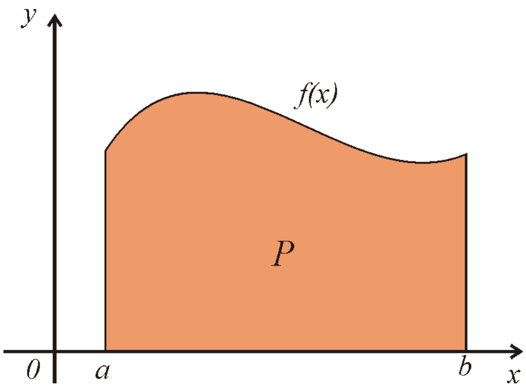
Výklad

Historickou motivací pro vznik určitého integrálu byl výpočet obsahů ploch. Tento problém řešili již staří Egypťané v souvislosti s určováním velikostí pozemků, jejichž velikost se měnila v důsledku záplav Nilu. Problém řešili tak, že danou plochu rozdělili na trojúhelníky, spočítali jejich obsahy a ty pak sečetli. Tyto metody později rozvinuli staří Řekové. V 16. a 17. století byla velká pozornost věnována studiu křivek, byla rozvíjena klasická mechanika. Vzniká otázka, jakým způsobem je vhodné definovat obsah obecných útvarů, které se nedají rozložit na konečný počet trojúhelníků.

Motivace

Zabývejme se následující úlohou:

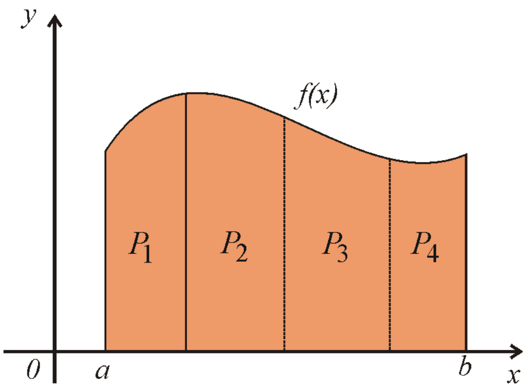
Mějme funkci $f(x)$, která je spojitá a nezáporná na intervalu $< a,b >$. Geometrický útvar ohraničený shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x (obr. 2.1.1) nazveme „křivočarý lichoběžník“. Naším úkolem je vypočítat obsah tohoto útvaru.



Obr. 2.1.1. Křivočarý lichoběžník

Ze střední školy znáte vztahy pro výpočet obsahu trojúhelníka, obdélníka, kruhu a možná několika dalších jednoduchých obrazců. Pro obecnou funkci $y = f(x)$ však zatím obsah obrazce na obr. 2.1.1 vypočítat nedovedeme. Navrhněme, jak vypočítat obsah tohoto útvaru alespoň přibližně:

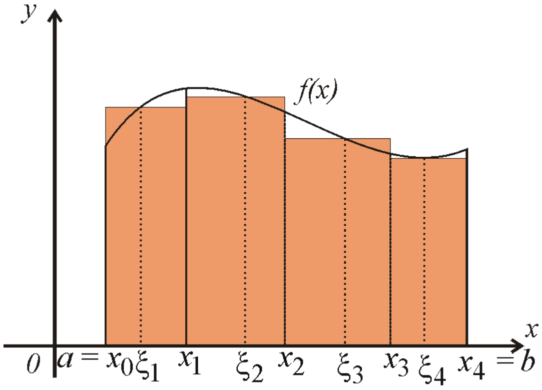
1. Rozdělíme obrazec rovnoběžkami s osou y na „proužky“ (na ilustračním obrázku 2.1.2 jsou čtyři). Je zřejmé, že obsah obrazce dostaneme jako součet obsahů jednotlivých proužků. V uvedeném případě $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.



Obr. 2.1.2. Rozdělení na „proužky"

2. Vypočteme obsah jednotlivých „proužků“. Jelikož shora jsou ohraničeny funkcí $f(x)$, provedeme výpočet přibližně. Funkci v daném pásku nahradíme funkční hodnotou $f(\xi)$ v nějakém bodě ξ, který jsme zvolili v základně tohoto „proužku“. Daný proužek tedy

aproximujeme obdélníčkem. Tím se dopouštíme určité chyby, neboť někde obdélníček přesahuje funkci $f(x)$ a někde je zase nižší.



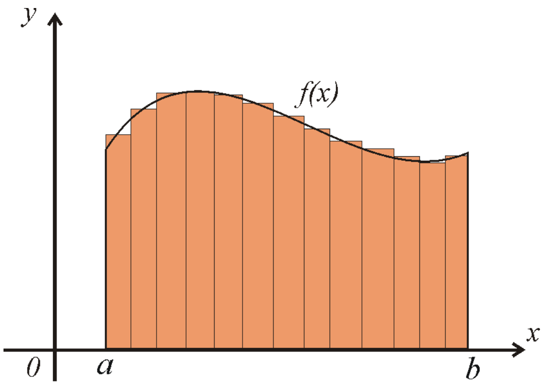
Obr. 2.1.3. Aproximace obrazce obdélníčky

Obsah obrazce na obr. 2.1.2 bude přibližně roven součtu obsahů jednotlivých obdélníčků:

$$P \doteq (x_1 - x_0) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + (x_3 - x_2) f(\xi_3) + (x_4 - x_3) f(\xi_4) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

3. Dá se předpokládat, že pro „rozumné“ funkce bude chyba tím menší, čím větší bude počet proužků, na které byl obrazec rozdělen (obr. 2.1.4).



Obr. 2.1.4. Zvětšení počtu obdélníčků

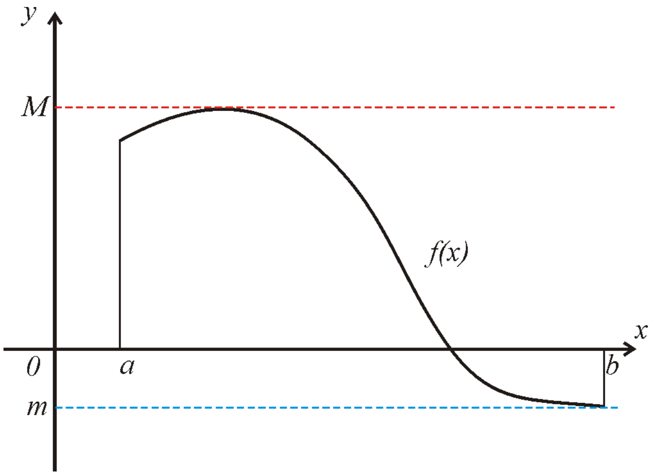
Budeme-li počet „proužků“ neomezeně zvětšovat a současně je zužovat, měla by se přibližná hodnota daná součtem obdélníčků stále více přibližovat obsahu P daného obrazce. Tedy obsah P dostaneme jako limitu pro nekonečný počet obdélníčků.

K podobnému problému dospějeme při řešení jednoduché úlohy z klasické mechaniky. Chceme vypočítat práci, která se vykoná při přímočarém pohybu, má-li síla směr dráhy. Nechť na hmotný bod pohybující se po dráze $< a, b >$ působí síla $f(x)$. Je-li tato síla konstantní, je vykonaná práce rovna součinu síly a dráhy. Pokud se velikost síly mění (dána funkcí $f(x)$ na intervalu $< a, b >$) můžeme postupovat tak, že dráhu rozdělíme na dílčí intervaly a v každém použijeme hodnotu síly $f(\xi_i)$ v nějakém bodě dílčího intervalu. Tedy stejně jako v předcházející úloze je celková vykonaná práce aproximována součtem práce na dílčích intervalech. Limitním přechodem, kdy zvyšujeme počet dělících bodů, přičemž se šířka dílčích intervalů blíží k nule, dostaneme celkovou práci.

Analogický postup použijeme při zavedení určitého integrálu.

Definice určitého integrálu

Definice určitého integrálu je poměrně složitá. K pojmu určitý integrál dospějeme následujícím způsobem. Uvažujme funkci $y = f(x)$, která je definována na **uzavřeném intervalu** $< a,b >$ a je na tomto intervalu **spojitá a ohraničená**. Musejí tedy existovat konstanty m a M takové, že pro všechna $x \in < a,b >$ platí $m \le f(x) \le M$.



Obr. 2.1.5. Ohraničená funkce na uzavřeném intervalu $< a,b >$

Výklad omezíme na funkce po částech spojité na intervalu $< a,b >$, tj. na funkce, které mají na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti (body nespojitosti 1. druhu). S takto definovaným určitým integrálem vystačíme při běžných aplikacích integrálního počtu v přírodních a technických vědách.

Poznámka

1. Předpoklad ohraničené funkce na uzavřeném intervalu je podstatný. Někdy lze pojem Riemannova integrálu rozšířit i na případy, kdy funkce není ohraničená nebo interval není uzavřený. Pak mluvíme o nevlastních integrálech (kap. 2.5).

Definice 2.1.1.

Říkáme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $< a,b >$ integrovatelná (schopná integrace), je-li na něm ohraničená a aspoň po částech spojitá.

Postup při zavedení pojmu určitý integrál:

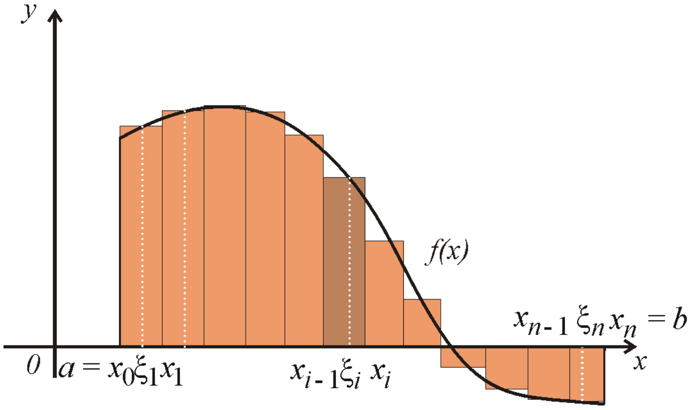
1. Interval $< a,b >$ rozdělíme na n dílčích intervalů. Množinu dělících bodů $D_n = \{x_0, x_1, \ \dots \ , x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \ \dots \ x_{n-1} < x_n = b$, nazveme **dělením intervalu** $< a,b >$ na n intervalů $< x_{i-1}, x_i >, \ i = 1, 2, \ \dots \ , n$.

   Číslo $\nu(D_n) = \max\limits_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$ budeme nazývat **normou dělení** D_n. Toto číslo nám říká, jaká je délka největšího intervalu v daném dělení. Samozřejmě intervalů s touto maximální délkou může být více, případně mohou být intervaly stejně dlouhé (ekvidistantní body). Norma dělení charakterizuje, jak je dělení jemné.

2. V každém dílčím intervalu dělení D_n vybereme jeden bod $\xi_i \in < x_{i-1}, x_i >, \ i = 1, 2, \ \dots \ , n$. Množinu těchto bodů $R_n = \{\xi_1, \xi_2, \ \dots \ , \xi_n\}$ budeme nazývat **výběrem reprezentantů** příslušných k dělení D_n.

3. Pro dané dělení D_n intervalu $< a,b >$ a výběr reprezentantů R_n vytvoříme součet $\sigma(f, D_n, R_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Tato suma se nazývá **integrálním součtem funkce *f*** nebo také **Riemannův součet** (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 – 1866). Geometrický význam tohoto součtu je znázorněn na obr. 2.1.6. Jedná se vlastně o součet obsahů obdélníků se základnami $(x_i - x_{i-1})$ a výškami $f(\xi_i)$, kde $i = 1, 2, \ \dots \ , n$. Je zřejmé, že pro $f(\xi_i) < 0$ bude hodnota pro daný obdélník záporná. Označení $\sigma(f, D_n, R_n)$ znamená, že integrální součet závisí na funkci *f*, na konkrétním dělení D_n a na výběru reprezentantů R_n.

4. Budeme vytvářet integrální součty pro stále jemnější dělení D_n intervalu $< a,b >$ při libovolných výběrech reprezentantů R_n. Pokud bude existovat limita integrálních součtů $\sigma(f, D_n, R_n)$ pro $n \to \infty$ a normu dělení $\nu(D_n) \to 0$ nezávisle na výběrech reprezentantů, nazveme ji určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu $< a,b >$.



Obr. 2.1.6. Integrální součet funkce *f*

Definice 2.1.2.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$, D_n je dělení intervalu $< a,b >$ a R_n výběr reprezentantů. Řekneme, že funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na intervalu $< a,b >$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbf{R}$ s vlastností

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = I$$

pro libovolnou posloupnost dělení D_n, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ při libovolné volbě reprezentantů R_n. Číslo *I* nazýváme **určitý (Riemannův) integrál** funkce f na intervalu $< a,b >$ a píšeme $\quad I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Číslo *a* nazýváme **dolní mez**, číslo *b* **horní mez**, interval $< a,b >$ **integrační obor** a funkci f **integrand**.

Geometrický význam určitého integrálu

Je-li $f(x) \geq 0$ na intervalu $< a,b >$, pak $\int\limits_a^b f(x)dx$ představuje obsah „křivočarého lichoběžníka“ ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x (obr. 2.1.1).

Poznámky

1. Zápis neurčitého integrálu $\int f(x)dx$ *a určitého integrálu* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *je formálně velmi* *podobný. U určitého integrálu jsou pouze navíc integrační meze. To má za následek, že je studenti považují prakticky za stejné. Určitý a neurčitý integrál se však zásadně liší!*

Výsledkem ***neurčitého integrálu*** *je* ***funkce*** *(množina funkcí),*

výsledkem ***určitého integrálu*** *je* ***číslo****. Přestože se jedná o zcela odlišné pojmy, existuje mezi nimi důležitá souvislost, jak uvidíme dále (věta 2.2.1).*

2. Z konstrukce určitého integrálu je zřejmé, že výsledek nezávisí na tom, jak označíme integrační proměnnou. Tedy $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

3. Symbol integrálu $\int$ *vznikl protažením písmene S, které označovalo sumu. Z definice určitého integrálu vidíme, o jakou sumu (integrální součet) se jedná.*

4. Postup uvedený v předcházející části jsme mohli realizovat nejlépe s použitím počítače. Daný interval $< a,b >$ *bychom rozdělili ekvidistantními body na dostatečný počet dílčích intervalů (třeba milion), jako reprezentanty bychom zvolili levé nebo pravé hranice těchto dílčích intervalů. Snadno naprogramujeme výpočet integrálního součtu. Pokud určitý integrál existuje, bude tento integrální součet jistou aproximací určitého integrálu. Uvedený postup je základem obdélníkové metody numerického výpočtu určitých integrálů. Těmito postupy a odhadem chyby se zabývá numerická matematika.*