2.2. Výpočet a vlastnosti určitého integrálu

Cíle

Základní věta integrálního počtu (Newton – Leibnizova) nám umožní výpočet určitých integrálů. Poznáte základní vlastnosti určitých integrálů.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte zavedení a význam určitého integrálu, pojem primitivní funkce, neurčitý integrál a jeho výpočet.

Výpočet určitého integrálu

Výklad

V předcházející kapitole jsme uvedli definici určitého integrálu. Kromě konstantní funkce (určitý integrál je vlastně obsah obdélníka) jsme dosud nebyli schopni žádný integrál spočítat. Následující věta je pojmenována podle dvou matematiků, kteří se zasloužili o vybudování základů integrálního počtu funkce jedné proměnné – Newtona a Leibnize (Isaac Newton 1643-1727, Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716).

Věta 2.2.1. (Newtonova – Leibnizova formule)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $<a,b>$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $<a,b>$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Důkaz:

Ukážeme, že rozdíl $F(b)-F(a)$ je pro libovolné dělení D_n intervalu $<a,b>$ roven integrálnímu součtu $\sigma(f,D_n,R_n)$.

Zvolme libovolné dělení $D_n = \{x_0, x_1, \ \dots \ , x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \ \dots \ < x_{n-1} < x_n = b$, intervalu $<a,b>$. Jelikož $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $<a,b>$, splňuje v každém subintervalu $<x_{i-1}, x_i>$, $i = 1, 2, \ \dots \ , n$ předpoklady Lagrangeovy věty (věta 3.2.5, Matematika I, část II). To znamená, že existují čísla $\xi_i \in <x_{i-1}, x_i>$ taková, že platí $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Protože $F'(\xi_i) = f(x_i)$, dostáváme $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Sečtením přes všechna i dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \ \ldots \ + F(x_n) - F(x_{n-1}) =$$

$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Obdrželi jsme, že pro libovolné dělení D_n je integrální součet

$$\sigma(f, D_n, R_n) = F(b) - F(a).$$

Podle předpokladu je funkce $f(x)$ integrovatelná, což znamená, že pro zjemňující se dělení s normou dělení $\nu(D_n) \to 0$ bude integrální součet konvergovat k jisté konstantě I (hodnotě integrálu $\int_a^b f(x)dx$). Hodnota integrálního součtu je vždy rovna $F(b) - F(a)$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Poznámky

1. Pro rozdíl $F(b) - F(a)$ se vžil zápis $[F(x)]_a^b$, takže Newtonovu – Leibnizovu formuli obvykle zapisujeme ve tvaru $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

2. Z věty 1.1.1 víme, že k dané funkci existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se liší konstantou. Je otázkou, jaký výsledek dostaneme pro jinou primitivní funkci $G(x) = F(x) + C$. Snadno zjistíme, že $G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$. Tedy hodnota integrálu nezávisí na integrační konstantě C. Proto v dalších příkladech integrační konstantu nebudeme používat.

*3. Newtonova – Leibnizova formule může být použita pro definování určitého integrálu a historicky byl určitý integrál nejprve definován tímto způsobem. Tento integrál je nazýván **Newtonův určitý integrál** funkce $f(x)$. U funkcí spojitých na integračním intervalu jsou si oba integrály (tj. Newtonův a Riemannův) rovny. Obecně tak tomu není.*

4. Newtonovu - Leibnizovu formuli lze zobecnit i na ohraničené, po částech spojité funkce. Výpočet však vyžaduje určité opatrnosti, abychom vhodnou volbou integrační konstanty dostali funkci $F(x)$ spojitou na $< a,b >$.

Řešené úlohy

Příklad 2.2.1. Vypočtěte integrál $\int_1^2 x^3 dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = x^3$ je spojitá pro každé $x \in \boldsymbol{R}$ a primitivní funkci k ní nalezneme pomocí vzorce v tab. 1.2.1. S využitím Newtonovy – Leibnizovy formule dostaneme

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Příklad 2.2.2. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ je spojitá pro každé $x \in \boldsymbol{R}$.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{x^2+1} dx = [x - \operatorname{arctg} x]_0^1 =$$

$$= (1 - \operatorname{arctg} 1) - (0 - \operatorname{arctg} 0) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 2.2.3. Vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = \sin 2x$ je spojitá pro každé x, pro nalezení primitivní funkce použijeme vztah [16] v tabulce základních integrálů (tab. 1.2.1).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos \frac{2\pi}{2}}{2} + \frac{\cos 0}{2} = -\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1.$$

Příklad 2.2.4. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

Řešení:

Funkce $f(x)=\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}$ je spojitá pro každé $x\in \boldsymbol{R}$. Primitivní funkci jsme již hledali v příkladu 1.2.5.

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx=\int_0^1 (e^{2x}-e^x+1)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x\right]_0^1=$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-e+1\right)-\left(\frac{1}{2}e^0-e^0+0\right)=\frac{1}{2}e^2-e+1-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}e^2-e+\frac{3}{2}.$$

(Při úpravě čitatele zlomku jsme použili vztah $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$).

Příklad 2.2.5. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$. **(Výstražný)**

Řešení:

Pokud budeme postupovat zcela mechanicky, dostaneme:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_{-1}^1=\ln 1-\ln 1=0.$$

Avšak funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ není na intervalu $<-1,1>$ spojitá (alespoň po částech). V bodě $x=0$ má bod nespojitosti 2. druhu, není tedy v okolí počátku ohraničená. Vzhledem k tomu nelze použít Newtonovu – Leibnizovu formuli (není na daném intervalu definován Newtonův integrál). Získaný výsledek je nesprávný. Správný výsledek si ukážeme později.

Vlastnosti určitého integrálu

Výklad

V této části uvedeme základní vlastnosti určitého (Riemannova) integrálu, které budeme v dalším běžně používat při praktických výpočtech.

Věta 2.2.2.

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $<a,b>$ a c je libovolná konstanta. Pak platí

a) $$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

b) $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz:

Z definice Riemannova integrálu pro normální posloupnost dělení dostáváme:

a) $$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

b) $$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c\int_a^b f(x)dx.$$

Poznámky

1. První vlastnost se nazývá aditivita vzhledem k integrandu, druhá homogenita .

2. Podobné vlastnosti měl i neurčitý integrál (věta 1.2.1). Vlastnost aditivity snadno rozšíříme na libovolný konečný počet sčítanců.

Příklad 2.2.6. Vypočtěte integrál $\int_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}\,dx$.

Řešení:

Funkce $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}$ je spojitá pro $x \ge 4$, tedy na oboru integrace je spojitá. Integrovanou funkci nejprve rozšíříme součtem odmocnin.

$$\int_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}\,dx = \int_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}\,dx =$$

$$= \int_4^{20} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{(x+5)-(x-4)}\,dx = \int_4^{20} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{9}\,dx$$

Použijeme větu 2.2.2 a integrál rozdělíme na součet dvou integrálů:

$$\int_4^{20} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{9}\,dx = \frac{1}{9}\int_4^{20} \sqrt{x+5}dx + \frac{1}{9}\int_4^{20} \sqrt{x-4}dx = \frac{1}{9}\left[\frac{(x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{20} + \frac{1}{9}\left[\frac{(x-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{20} =$$

$$= \frac{2}{27}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{2}{27}\left(16^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{27}\left(25\sqrt{25} - 9\sqrt{9}\right) + \frac{2}{27}\left(16\sqrt{16} - 0\right) =$$

$$= \frac{2}{27}\left(125 - 27 + 64\right) = \frac{2}{27}162 = 2\cdot 6 = 12.$$

Pro výpočet integrálů byl použit vztah [16] z tabulky základních integrálů (tab. 1.2.1).

Příklad 2.2.7. Vypočtěte integrál $\int_2^{4} \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.

Řešení:

Jmenovatel integrované racionální funkce se nesmí rovnat nule $x^3-x^2 = x^2(x-1) \ne 0$

Funkce $f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$ má body nespojitosti $x=0$ a $x=1$, tedy na oboru integrace je spojitá. Interand je racionální funkce, musíme nejprve provést rozklad na součet parciálních zlomků (viz kap. 1.5).

1. Polynom v čitateli je stupně $m=3$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má také stupeň $n=3$. Jelikož není $m<n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a

musíme polynomy vydělit.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+1):(x^3-x^2)=1 \\
\underline{-(x^3-x^2)} \\
\qquad x^2+1
\end{array}
$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^3+1}{x^3-x^2}=1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2} \ .$$

2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x)=x^3-x^2$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x)=x^2(x-1)$.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B}{x-1} \ .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu A_1, A_2, B (viz kap. 1.5). Dostaneme

$$A_1=-1,\ \ A_2=-1,\ \ \mathrm{B}=2 \, .$$

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=\int_2^4\left(1+\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx=\int_2^4 dx-\int_2^4\frac{1}{x}dx-\int_2^4\frac{1}{x^2}dx+2\int_2^4\frac{1}{x-1}dx=$$

$$=\left[x\right]_2^4-\left[\ln|x|\right]_2^4+\left[\frac{1}{x}\right]_2^4+2\left[\ln|x-1|\right]_2^4=(4-2)-(\ln 4-\ln 2)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+2(\ln 3-\ln 1)=$$

$$=2-\frac{1}{4}-\ln 4+\ln 2+2\ln 3=\frac{7}{4}+\ln\frac{9}{2} \ .$$

Definice 2.2.1.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $<a,b>$. Pak

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \, .$$

Poznámky

1. Pro spojité funkce (Newtonův integrál) je uvedená vlastnost triviální, neboť

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx \ .$$

2. Důsledkem této definice, je následující vlastnost pro každou integrovatelnou funkci

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \, .$$

Věta 2.2.3.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$ a c je libovolné reálné číslo $a < c < b$. Pak je $f(x)$ integrovatelná na intervalech $< a,c >$ a $< c,b >$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \, .$$

Poznámky

1. Vlastnost se nazývá aditivita určitého integrálu vzhledem k mezím.

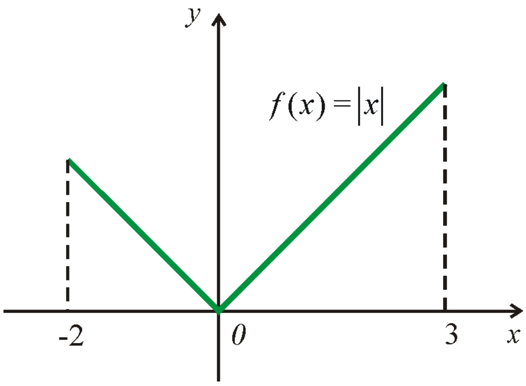
2. Větu lze zobecnit na libovolný konečný počet částečných intervalů a tedy na konečný počet sčítanců.

3. Větu využíváme zejména v případech, kdy integrand nemá na intervalu $< a,b >$ jednotný analytický předpis.

Příklad 2.2.8. Vypočtěte integrál $\int_{-2}^{3} |x|\, dx$.

Řešení:

Z definice absolutní hodnoty platí $|x| = \begin{cases} -x & \text{pro } x \in < -2,0 >, \\ x & \text{pro } x \in < 0,3 >, \end{cases}$ viz obr. 2.2.1.



Obr. 2.2.1. Graf funkce $f(x)=|x|,\ x\in<-2,3>$

Funkce je integrovatelná, protože je na daném intervalu spojitá a ohraničená. Podle věty 2.2.3 bude platit

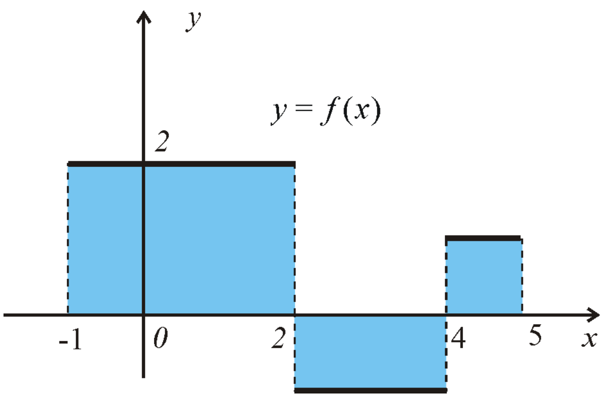
$$\int_{-2}^{3}|x|\,dx=\int_{-2}^{0}|x|\,dx+\int_{0}^{3}|x|\,dx=-\int_{-2}^{0}x\,dx+\int_{0}^{3}x\,dx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}=$$

$$=-(0-2)+\left(\frac{9}{2}-0\right)=\frac{13}{2}.$$

Příklad 2.2.9. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{5}f(x)dx$, kde $f(x)=\begin{cases}2 & \text{pro } x\in<-1,2>,\\ -1 & \text{pro } x\in(2,4),\\ 1 & \text{pro } x\in<4,5>.\end{cases}$.

Řešení:

Daná funkce je ohraničená a má dva body nespojitosti $x=2$ a $x=4$ (obr. 2.2.2).



Obr. 2.2.2. Graf funkce z příkladu 2.2.9

Podle věty 2.2.3 bude platit

$$\int_{-1}^{5}f(x)dx=\int_{-1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{5}f(x)dx=\int_{-1}^{2}2dx+\int_{2}^{4}(-1)dx+\int_{4}^{5}1dx.$$

Všimněte si, že jsme u druhého integrálu mlčky změnili hodnoty funkce *f(x)* v krajních bodech na -1. To nemá vliv na hodnotu integrálu. Dostaneme

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = 2[x]_{-1}^{2} - [x]_{2}^{4} + [x]_{4}^{5} = 2(2-(-1)) - (4-2) + (5-4) = 5.$$

Výsledek je dán součtem obsahů dvou obdélníků a čtverce. Plocha druhého obdélníka je však brána záporně!

Věta 2.2.4.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$ a pro všechna $x \in < a,b >$ je $f(x) \geq 0$. Pak platí $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Důkaz:

Plyne přímo z definice Riemannova integrálu (def. 2.1.2).

Poznámka

Uvedenou vlastnost můžeme často použít k jisté hrubé kontrole výsledku. Je-li integrovaná funkce nezáporná, nemůže vyjít záporná hodnota určitého integrálu.

Věta 2.2.5.

Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $< a,b >$ a pro všechna $x \in < a,b >$ je $f(x) \leq g(x)$. Pak platí $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Důkaz:

Podle předpokladu je $g(x) - f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in < a,b >$. Podle věty 2.2.4 bude $\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$. Odtud s použitím věty 2.2.2 dostaneme tvrzení.

Věta 2.2.6. (Věta o střední hodnotě integrálního počtu.)

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $< a,b >$. Pak existuje číslo $\xi \in < a,b >$ takové, že platí

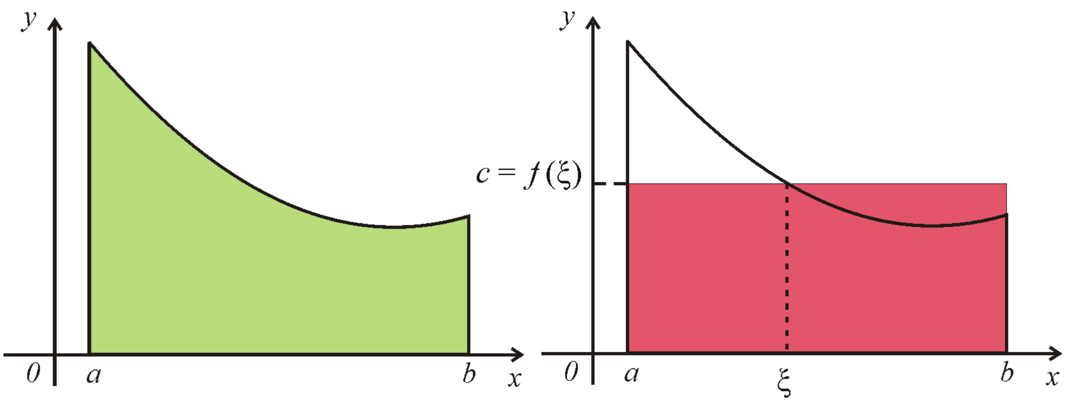
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Číslo $c = f(\xi)$ se nazývá **střední hodnota funkce** $f(x)$ na intervalu $< a,b >$.

Důkaz:

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $<a,b>$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $<a,b>$, tedy $F'(x)=f(x)$. Funkce $F(x)$ je spojitá a splňuje předpoklady Lagrangeovy věty (věta 3.2.5, Matematika 1, část II). To znamená, že existuje číslo $\xi \in <a,b>$ takové, že platí $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a)$. Odtud a z věty 2.2.1 dostaneme $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Předcházející věta má názorný geometrický význam. Pro jednoduchost předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná. Z motivace na začátku kapitoly 2.1 víme, že $\int\limits_a^b f(x)dx$ vyjadřuje obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x=a$, $x=b$. Věta říká, že lze nad intervalem $<a,b>$ sestrojit obdélník se stejným obsahem. Výška je rovna funkční hodnotě ve vhodném bodě $\xi \in <a,b>$, aby $c=f(\xi)=\frac{1}{(b-a)}\int\limits_a^b f(x)dx$.



Obr. 2.2.3. Geometrický význam věty o střední hodnotě

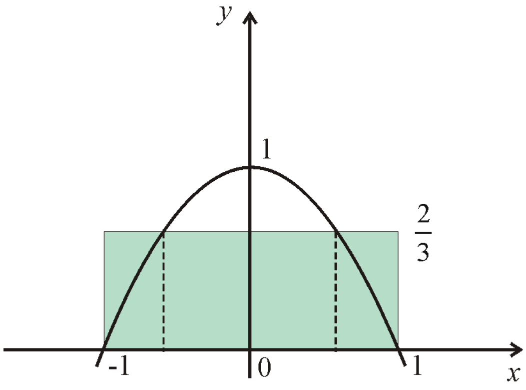
Z obrázku je zřejmé, že bod ξ nemusí být určen jednoznačně (přímka $y=c$ může graf funkce protnout několikrát).

Příklad 2.2.10. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x)=1-x^2$ na intervalu $<-1,1>$.

Řešení:

$$c=\frac{1}{1-(-1)}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{2}{3}.$$

Obsah obrazce pod parabolou lze vyjádřit jako obsah obdélníka s jednou stranou $<-1,1>$ délky 2 a velikost druhé strany bude $\frac{2}{3}$ (obr. 2.2.4).



Obr. 2.2.4. Střední hodnota funkce $f(x)=1-x^2$ na intervalu $<-1,1>$

Určeme ještě, ve kterém bodě $\xi \in <-1,1>$ je střední hodnota rovna funkční hodnotě funkce $f(x)=1-x^2$. Řešíme rovnici

$\frac{2}{3}=1-x^2$ a dostaneme $\xi=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ (dva body s touto vlastností).

Příklad 2.2.11. Rychlost určitého objektu $v(t)$ v metrech za sekundu se v průběhu prvních 20 sekund pohybu měnila. Od začátku pohybu ($t=0$) byl 4 sekundy pohyb rovnoměrně zrychlený $v(t)=0{,}5t$, od 4. do 10. sekundy se pohyboval konstantní rychlostí $v(t)=2$, posledních 10 sekund byla rychlost $v(t)=0{,}8t-6$ m/s. Určete střední hodnotu rychlosti objektu (průměrnou rychlost) za 20 sekund. Ve kterém časovém okamžiku jel touto rychlostí?

Řešení:

$$c=\frac{1}{20}\int_0^{20} v(t)dt=\frac{1}{20}\left[\int_0^4 0{,}5t dt+\int_4^{10} 2dt+\int_{10}^{20}(0{,}8t-6)dt\right]=$$

$$=\frac{1}{20}\left[\left[\frac{0{,}5t^2}{2}\right]_0^4+[2t]_4^{10}+\left[\frac{0{,}8t^2}{2}-6t\right]_{10}^{20}\right]=\frac{1}{20}[4+12+60]=\frac{76}{20}=3{,}8 \text{ m/s.}$$

Jelikož je funkce $v(t)$ spojitá na intervalu $<0,20>$, určitě existuje alespoň jeden časový okamžik, kdy se objekt pohyboval právě touto rychlostí. Z konstrukce grafu funkce je zřejmé, že tento okamžik nastal mezi 10. a 20. sekundou (průměrná rychlost je větší než 2) a na jeho určení je nutno řešit rovnici $3,8 = 0,8t - 6$. Dostaneme $\xi = 12,25$ sekund.

Kontrolní otázky

1. Které funkce jsou Riemannovsky integrovatelné?.
2. Formulujte větu, pomocí které se provádí výpočet určitého integrálu.
3. Vysvětlete rozdíl mezi definicí Newtonova a Riemannova integrálu.
4. Uveďte vlastnost určitého integrálu.
5. Jak vypočtete integrál $\int_{-7}^{5} |x+1|\,dx$?
6. Jak vypočtěte integrál $\int_{0}^{\pi} |\cos x|\,dx$?
7. Ukažte, že platí vztah $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0$, kde $n \in \boldsymbol{N}$.
8. Jaká je střední hodnota funkce $f(x) = \sin x$ na intervalu $< 0, \pi >$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int_{1}^{3} x^2 dx$ b) $\int_{-1}^{3} \left(x^2 + 6x - 2\right) dx$ c) $\int_{-3}^{2} \left(3x^3 - x^2 + 1\right) dx$

d) $\int_{2}^{6} \frac{1}{x} dx$ e) $\int_{0}^{2} \frac{1}{x+1} dx$ f) $\int_{1}^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$

2. a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$ b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x\,dx$ c) $\int_{0}^{\pi} \cos^2 2x\,dx$

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$ e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\, x\,dx$ f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

3. a) $\int\limits_0^6 e^{3x}dx$ b) $\int\limits_0^1 \left(5^x-3^x\right)^2 dx$ c) $\int\limits_0^2 \sqrt{e^{5x}}dx$

d) $\int\limits_0^1 \int \frac{e^x}{e^x+3}dx$ e) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}dx$ f) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$

4. a) $\int\limits_1^9 \frac{3x+2}{x}dx$ b) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}dx$ c) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

d) $\int\limits_5^7 \frac{3x+5}{x^2-3x-4}dx$ e) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+7}$ f) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)}$

5. a) $\int\limits_{-1}^{2} |x|\,dx$ b) $\int\limits_1^4 \left|x^3-8\right|dx$ c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx$

d) $\int\limits_{-1}^{2} 2^{|x|}dx$ e) $\int\limits_2^4 \left|x^2-4x+3\right|dx$ f) $\int\limits_{-1}^{2} \left(|x|-3|x-1|\right)dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{26}{3}$; **b)** $\frac{76}{3}$; **c)** $-\frac{665}{12}$; **d)** $\ln 3$; **e)** $\ln 3$; **f)** 2. **2. a)** $2-\frac{\pi}{4}$; **b)** 0; **c)** $\frac{\pi}{2}$; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** $1-\frac{\pi}{4}$; **f)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **3. a)** $\frac{1}{3}\left(e^{18}-1\right)$; **b)** $\frac{12}{\ln 5}-\frac{28}{\ln 15}+\frac{4}{\ln 3}$; **c)** $\frac{2}{5}\left(e^5-1\right)$; **d)** $\ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$; **e)** $\ln 2$; **f)** $\ln 3$. **4. a)** $24+4\ln 3$; **b)** $\frac{35}{15}-32\ln 3$; **c)** $\operatorname{arctg} 4-\operatorname{arctg} 2$; **d)** $\frac{17}{5}\ln 3-\frac{6}{5}\ln 2+\frac{2}{5}\ln 6$; **e)** $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$; **f)** $\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$. **5. a)** $\frac{5}{2}$; **b)** $\frac{193}{4}$; **c)** 2; **d)** $\frac{4}{\ln 2}$; **e)** 2; **f)** -5.

Kontrolní test

1. Vypočtěte integrál $\int\limits_1^8 \frac{2-x}{\sqrt[3]{x^5}}dx$.

   a) $2\sqrt[3]{2}$, b) $-\frac{3}{4}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $-\frac{3}{8}$.

2. Vypočtěte integrál $\int_0^{\ln 2}(e^x - e^{-x})dx$.

   a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{5}{2}$, c) $\frac{3}{2}$, d) $-\frac{1}{2}$.

3. Vypočtěte integrál $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

   a) $2+\frac{4}{3}\sqrt{3}$, b) $2-\frac{4}{3}\sqrt{3}$, c) 0, d) $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

4. Vypočtěte integrál $\int_0^{2\pi}(2+\cos\varphi)d\varphi$.

   a) 8π, b) 4π, c) 10π, d) 9π.

5. Čemu se rovná integrál $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx$?

   a) $\frac{1}{8}+8\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2}$, b) $\frac{13}{8}+8\ln\frac{3}{2}-8\ln 2$,

   c) $\frac{13}{8}+8\ln 3-15\ln 2$, d) $\frac{1}{8}-8\ln 3+15\ln 2$.

6. Čemu se rovná integrál $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$?

   a) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$, b) $\ln 8-\ln 5$, c) $\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5$, d) $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5}$.

7. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{3}|4-2x|\,dx$.

   a) 6, b) 8, c) 10, d) 4.

8. Vypočtěte integrál $\int_0^5 f(x)dx$, kde $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{pro } 0\le x\le 2, \\ 4x-x^2 & \text{pro } 2\le x\le 3, \\ 3 & \text{pro } 3\le x\le 5. \end{cases}$

   a) $\frac{25}{3}$, b) 14, c) $\frac{89}{3}$, d) $\frac{41}{3}$.

9. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $<1, 4>$.

a) $\dfrac{20}{3}$, b) $\dfrac{20}{9}$, c) $\dfrac{24}{9}$, d) $\dfrac{32}{9}$.

10. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ na intervalu $<1;1{,}5>$.

a) $\ln\dfrac{6}{5}$, b) $2\ln\dfrac{5}{6}$, c) $2\ln 3+\ln 2$, d) $2\ln\dfrac{6}{5}$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. b); 4. d); 5. c); 6. a); 7. c); 8. d); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 2.1 a 2.2 znovu.

Shrnutí lekce

Hlavním záměrem kapitol 2.1 a 2.2 bylo zavést pojem určitého Riemannova integrálu a uvést základní vlastnosti tohoto integrálu, které jsou využívány při praktickém výpočtu. Riemannův integrál je pro spojité funkce totožný s integrálem Newtonovým. Zjednodušeně řečeno - Riemannův integrál můžeme vždy v konkrétních výpočtech počítat jako integrál Newtonův, tedy prostřednictvím primitivních funkcí. A s těmi již v tuto chvíli máme dostatek zkušeností.

Definovat Riemannův určitý integrál je bezesporu mnohem obtížnější, než zavést pojem určitého integrálu Newtonova. Proč se tedy Riemannovým integrálem v tomto úvodním kurzu zabýváme? Především pro jeho názornou geometrickou interpretaci. Pro spojitou nezápornou funkci odpovídá totiž její Riemannův integrál na zadaném uzavřeném intervalu plošnému obsahu oblasti vymezené zadaným intervalem a grafem integrované funkce. O dalších užitečných aplikacích Riemannova integrálu se můžete dočíst v kapitole 3.