2.3. Metoda per partes pro určité integrály

Cíle

Seznámíte se s použitím metody per partes při výpočtu určitých integrálů. Základní typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat jsou stejné, jako při výpočtu neurčitých integrálů v kap. 1.3.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte princip metody per partes a víte, pro které typy integrálů je tato metoda vhodná. Předpokládá se znalost pojmu určitý integrál a dovednost počítat určité integrály pomocí Newtonovy – Leibnizovy formule.

Výklad

Při výpočtu složitějších integrálů používáme i u určitých integrálů metodu per partes a substituční metodu.

Při výpočtu určitých integrálů ze složitějších funkcí můžeme postupovat v zásadě dvěma způsoby:

- Oddělíme fázi nalezení primitivní funkce od fáze výpočtu určitého integrálu. Nejprve si nevšímáme mezí a počítáme pouze neurčitý integrál. Po vypočítání vybereme jednu z nalezených primitivních funkcí (obvykle volíme integrační konstantu $C = 0$) a podle Newtonovy – Leibnizovy formule dosadíme horní a dolní mez.
- Neoddělujeme fázi výpočtu primitivní funkce od výpočtu určitého integrálu. U metody per partes průběžně dosazujeme meze do již vypočtené části primitivní funkce, u substituční metody změníme integrační meze, jak uvidíme v další kapitole.

V dalším se zaměříme na druhou možnost výpočtu.

Věta 2.3.1.

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $< a,b >$ spojité derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, pak platí

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\, dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x) dx .$$

Důkaz:

Ze spojitosti derivací $u'(x)$ a $v'(x)$ plyne, že jsou spojité i funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $< a,b >$. Potom budou spojité a tedy integrovatelné i součiny $u'(x)\cdot v(x)$ a $u(x)\cdot v'(x)$.

Podle věty 2.2.2 bude integrovatelná i funkce $u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$. K ní primitivní funkce je $u(x)\cdot v(x)$, protože $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$. Podle Newtonovy – Leibnizovy formule platí $\int_a^b [u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)]\,dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b$. Pomocí věty 2.2.2 dostaneme $\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx + \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b$ a po úpravě obdržíme tvrzení věty.

Poznámka

Praktické použití metody per partes je zcela analogické jako v případě neurčitého integrálu (kap. 1.3). Zejména platí návody, pro které funkce je metoda per partes vhodná.

Řešené úlohy

Příklad 2.3.1. Vypočtěte integrál $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$

Řešení:

Předvedeme první způsob výpočtu, kdy nejprve nalezneme primitivní funkci a teprve potom dosadíme meze:

$$\int x^2 \sin x\, dx = \left| \begin{matrix} u' = \sin x & v = x^2 \\ u = -\cos x & v' = 2x \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u' = \cos x & v = 2x \\ u = \sin x & v' = 2 \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\int \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C\,.$$

Použijeme jednu z primitivních funkcí pro $C = 0$ a dostaneme

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx = \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x \right]_0^{\pi} = (-\pi^2(-1) + 0 + 2(-1)) - (0 + 0 + 2) =$$

$$= \pi^2 - 4\,.$$

Při druhém způsobu výpočtu použijeme větu 2.3.1:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx = \left| \begin{matrix} u' = \sin x & v = x^2 \\ u = -\cos x & v' = 2x \end{matrix} \right| = \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x \cos x\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = \cos x & v = 2x \\ u = \sin x & v' = 2 \end{vmatrix} = (\pi^2 - 0) + \left[2x \sin x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \pi^2 + (0-0) + 2\left[\cos x\right]_0^{\pi} =$$

$$= \pi^2 + 2(-1-1) = \pi^2 - 4 .$$

Výhoda druhého způsobu spočívá v tom, že meze průběžně dosazujeme do částečně vypočtené primitivní funkce a nemusíme ji neustále opisovat až do konce výpočtu. Výpočet se tím zkrátí a zpřehlední. V dalších příkladech budeme používat tento způsob výpočtu.

Příklad 2.3.2. Vypočtěte integrál $\int_0^2 (x^2 - x)e^x dx$.

Řešení:

$$\int_0^2 (x^2 - x)e^x dx = \begin{vmatrix} u' = e^x & v = x^2 - x \\ u = e^x & v' = 2x - 1 \end{vmatrix} = \left[(x^2 - x)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 (2x-1)e^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = e^x & v = 2x - 1 \\ u = e^x & v' = 2 \end{vmatrix} = \left[(4-2)e^2 - 0\right] - \left[(2x-1)e^x\right]_0^2 + \int_0^2 2e^x dx =$$

$$= 2e^2 - \left[3e^2 + e^0\right] + 2\left[e^x\right]_0^2 = -e^2 - 1 + 2\left(e^2 - e^0\right) = e^2 - 3 .$$

Příklad 2.3.3. Vypočtěte integrál $\int_1^e \ln x \, dx$.

Řešení:

$$\int_1^e \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e 1 dx = (e \ln e - \ln 1) - \left[x\right]_1^e =$$

$$= (e - 0) - (e - 1) = 1 .$$

Příklad 2.3.4. Vypočtěte integrál $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Řešení:

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = \begin{vmatrix} u' = x & v = \operatorname{arctg} x \\ u = \dfrac{x^2}{2} & v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

$$=(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}-0)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1(1-\frac{1}{1+x^2})\,dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left[x-\operatorname{arctg}x\right]_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Příklad 2.3.5. Nalezněte rekurentní formuli pro výpočet integrálu

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx\,,\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

Řešení:

Pro $n=0$ je $S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$ a pro $n=1$ je $S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

Pro $n\geq 2$ metodou per partes dostaneme:

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=\begin{vmatrix}u'=\sin x & v=(\sin x)^{n-1}\\ u=-\cos x & v'=(n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x\end{vmatrix}=\left[-\cos x(\sin x)^{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)(\sin x)^{n-2}\cos^2 x\,dx=\left[0-0\right]+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)(\sin x)^{n-2}(1-\sin^2 x)\,dx=$$

$$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{n-2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx\right)=(n-1)(S_{n-2}-S_n).$$

Z rovnice $S_n=(n-1)(S_{n-2}-S_n)$ snadno dostaneme

$S_n=\frac{n-1}{n}S_{n-2}$ $(n\geq 2)$. Tato rekurentní formule nám umožní vypočítat uvedený integrál pro libovolnou mocninu $n\geq 2$. Například:

$$S_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^3 dx=\frac{3-1}{3}S_1=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3},$$

$$S_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^4 dx=\frac{4-1}{4}S_2=\frac{3}{4}\frac{2-1}{2}S_0=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}.$$

Kontrolní otázky

1. Proč je integrační metoda nazývána per partes?
2. Jak se liší výpočet určitého integrálu metodou per partes od použití této metody v neurčitém integrálu.
3. Jak by se podle věty 2.3.1 vypočítal integrál typu $\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$?
4. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x\, dx$?
5. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_1^e x^3 \ln x\, dx$?
6. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_e^{2e} \ln^2 x\, dx$?
7. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_0^{\pi} e^{2x} \sin x\, dx$?
8. Vypočtěte integrál $\int_0^1 xe^{-x}\, dx$.
9. Vypočtěte integrál $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi} (x-1)\sin x\, dx$.
10. Odvoďte rekurentní formuli pro výpočet integrálu $L_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (\ln x)^n\, dx$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\, dx$ b) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x} dx$ c) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$

d) $\int_0^1 xe^{3x} dx$ e) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$ f) $\int_0^1 \left(x^2 + 2x\right)e^{\frac{x}{3}}\, dx$

2. a) $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$ b) $\int_1^2 (3x+2)\ln x \, dx$ c) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx$

d) $\int_0^1 4x^3 \operatorname{arctg} x \, dx$ e) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x \, dx$ f) $\int_1^e x \ln^2 x \, dx$

3. a) $\int_1^{e^3} \ln x \, dx$ b) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$ c) $\int_1^e \ln^2 x \, dx$

d) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x \, dx$ e) $\int_{-1}^1 \ln(x+2)\, dx$ f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} 2x \, dx$

4. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$ b) $\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\, dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x \, dx$

d) $\int_{e^{-\pi}}^{e^\pi} \sin(\ln x)\, dx$ e) $\int_0^\pi e^{-x} \sin^2 x \, dx$ f) $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x \, dx$

5. a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sin^2 x} dx$ b) $\int_1^e \ln^3 x \, dx$ c) $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$; **c)** π^2-4; **d)** $\frac{2}{9}e^3$; **e)** -2π; **f)** $27\sqrt[3]{e}-36$. **2. a)** $\frac{1}{16}\left(3e^4+1\right)$;

b) $10\ln 2-\frac{17}{4}$; **c)** $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **d)** $\frac{2}{3}$; **e)** $\frac{4}{9}\left(2e^3+1\right)$; **f)** $\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)$. **3. a)** $2e^3+1$;

b) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$; **c)** $e-2$; **d)** $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{1}{2}$; **e)** $3\ln 3-2$; **f)** $\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{4}$. **4. a)** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$;

b) $-\frac{1}{2}\left(e^\pi+1\right)$; **c)** $\frac{1}{5}\left(2e^\pi+1\right)$; **d)** $\frac{1}{2}\left(e^\pi+e^{-\pi}\right)$; **e)** $\frac{3}{5}\left(e^{-\pi}-1\right)$; **f)** $-\frac{1}{2}\left(e^\pi+e^{-\pi}\right)$.

5. a) $\frac{\pi}{2}+\ln 2$; **b)** $6-2e$; **c)** $\frac{e}{2}-1$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte integrál $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x\, dx$.

   a) $\frac{\pi}{2}$, b) 1, c) 0, d) π.

2. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{0} x^2 e^{-x} dx$.

   a) $2+e$, b) $-2-e$, c) $-2+e$, d) -2.

3. Vypočtěte integrál $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx$.

   a) $\frac{1}{4}(\pi-1)$, b) $\frac{1}{4}(\pi+1)$, c) $\frac{\pi}{4}$, d) $\frac{1}{4}$.

4. Čemu se rovná integrál $\int_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$?

   a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2$, b) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \ln 2$, c) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{1}{2}\ln 4$, d) $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\ln 4$.

5. Čemu se rovná integrál $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$?

   a) $\frac{\pi}{6}\sqrt{3} - \ln 2$, b) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \ln 2$, c) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \ln 2$, d) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{3}$.

6. Čemu se rovná integrál $\int_{0}^{e-1} \ln(x+1)\, dx$?

   a) 1, b) $e+1$, c) $1-e$, d) $2e+1$.

7. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)\, dx$.

   a) 0, b) $2\ln 2 - 4 + \pi$, c) $2\ln 2 + \pi$, d) $-2 + \frac{\pi}{2}$.

8. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{0} x \operatorname{arc\,cotg} x \, dx$.

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}(1+\pi)$, c) $\frac{1}{2}(1-\pi)$, d) $-\frac{\pi}{2}$.

9. Vypočtěte integrál $\int_{\frac{1}{e}}^{e} x^2 \ln x \, dx$.

a) $\frac{2}{9}(e^3 - \frac{1}{e^3})$, b) $\frac{2}{9}(e^3 + \frac{1}{e^3})$, c) $\frac{2}{9}(e^3 - \frac{2}{e^3})$, d) $\frac{2}{9}(e^3 + \frac{2}{e^3})$.

10. Odvoďte rekurentní vzorec pro výpočet integrálu $S_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx, n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) $S_0 = \pi, S_1 = 0, S_n = \frac{n+1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$, b) $S_0 = \pi, S_1 = 2, S_n = \frac{n+1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$,

c) $S_0 = \pi, S_1 = 2, S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$, d) $S_0 = \pi, S_1 = 2, S_n = \frac{1}{1-n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$.

.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. b); 4. a); 5. c); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.3 a 2.3 znovu.

Shrnutí lekce

Použití metody per partes v určitém integrálu je zcela analogické jako v případě neurčitého integrálu. Typy integrálů řešitelných metodou per partes jsou uvedeny v kapitole 1.3. Při výpočtu určitých integrálů metodou per partes průběžně dosazujeme meze do částečně vypočtené primitivní funkce a nemusíme ji neustále opisovat až do konce výpočtu. Výpočet se tím zkrátí a zpřehlední.