2.5. Nevlastní integrály

Cíle

V této kapitole poněkud rozšíříme definici Riemannova určitého integrálu i na případy, kdy je integrační obor neohraničený (tj. $(-\infty, b>$, $<a, \infty)$, případně $(-\infty, \infty)$) nebo je neohraničená integrovaná funkce. Tyto zobecněné určité integrály se nazývají nevlastní. Seznámíme se se dvěma typy nevlastních integrálů.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem určitý integrál, předpoklady existence a vlastnosti určitého integrálu, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu. Předpokládá se znalost pojmu limita funkce a postupy výpočtu těchto limit (Matematika I, kapitoly 2.1. 2.2).

Výklad

V definici Riemannova určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ jsme vycházeli ze dvou předpokladů:

1. Integrační obor je konečný **uzavřený interval** $<a, b>$.
2. Integrovaná funkce $f(x)$ je na tomto intervalu ohraničená (ohraničená zdola i shora viz obr. 2.1.5).

Integrály definované za těchto předpokladů nazýváme **vlastní integrály**.

Jestliže se v určitém integrálu objeví neohraničený interval nebo neohraničená funkce, hovoříme o **nevlastních integrálech**. Rozeznáváme dva druhy nevlastních integrálů:

1. Je-li interval, na kterém integrujeme, neohraničený, hovoříme o **nevlastním integrálu prvního druhu** (nevlastní integrál na neohraničeném intervalu). Jde o integrály typu

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx,\quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\ .$$

2. Je-li integrovaná funkce v intervalu $<a, b>$ neohraničená (tedy nespojitá), hovoříme o **nevlastních integrálech druhého druhu**.

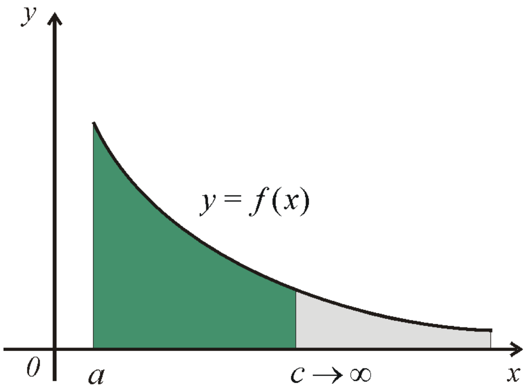
Může se vyskytnout i kombinace uvedených dvou typů, například integrál $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$.

Nevlastní integrály 1. druhu (integrály na neohraničeném intervalu)

Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $< a, \infty)$, $a \in \boldsymbol{R}$. Předpokládejme, že pro každé $c \in < a, \infty)$ existuje určitý integrál $\int_a^c f(x)dx$. Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx\,, \quad c \geq a\,.$$

Nyní budeme neomezeně zvětšovat horní mez c a budeme sledovat, jak se chová veličina $F(c)$. Situace je znázorněna na obrázku 2.5.1.



Obr. 2.5.1. Definice nevlastního integrálu na neohraničeném intervalu $< a, \infty)$

Zelená plocha představuje hodnotu integrálu $\int_a^c f(x)dx$. Při posouvání $c \to \infty$ nás bude zajímat, zda se hodnota tohoto integrálu blíží k nějakému konečnému číslu L (tj. zda existuje konečná limita) nebo tato hodnota roste nade všecky meze (limita je $+\infty$ nebo $-\infty$), případně hodnota neexistuje (hodnota osciluje).

Definice 2.5.1. (Definice nevlastního integrálu 1. druhu)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá pro všechna čísla $c \geq a$, pak integrál tvaru

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

nazýváme **nevlastní integrál prvního druhu** (na nekonečném intervalu) a přiřazujeme mu hodnotu rovnou limitě

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx = L\,.$$

Je-li L konečné číslo, říkáme, že uvažovaný **nevlastní integrál konverguje** (je konvergentní). V opačném případě, tj. když limita je nevlastní ($L=+\infty$ nebo $L=-\infty$) nebo neexistuje, říkáme, že **nevlastní integrál diverguje** (je divergentní).

Řešené úlohy

Příklad 2.5.1. Vypočtěte integrál $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

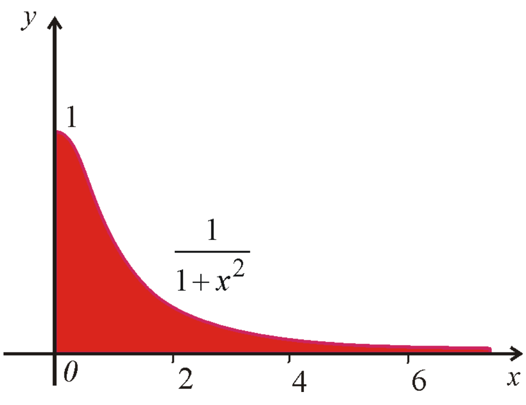
Řešení:

Budeme postupovat podle definice 2.5.1. Nejprve nalezneme pomocnou funkci horní meze $F(c)=\int_a^c f(x)dx$ a potom spočítáme její limitu $L=\lim\limits_{c\to+\infty} F(c)$.

$F(c)=\int_0^c \frac{1}{1+x^2} dx = [\operatorname{arctg} x]_0^c = \operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} c$, takže

$L=\lim\limits_{c\to+\infty} F(c) = \lim\limits_{c\to+\infty} \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2}$.

Integrál tedy konverguje a platí $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.



Obr. 2.5.2. Graf funkce $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ pro $x \ge 0$

Příklad 2.5.2. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

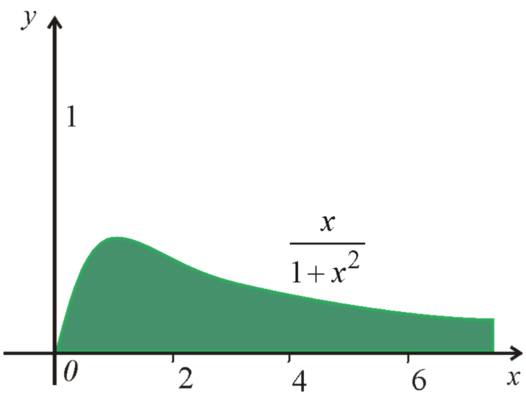
Řešení:

Postupujeme stejně jako v předcházejícím příkladu.

$$F(c)=\int\limits_0^{c}\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{c}\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^c=\frac{1}{2}\ln(1+c^2)\ \text{, takže}$$

$$L=\lim_{c\to+\infty}F(c)=\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+c^2)=+\infty\,.$$

Integrál tedy diverguje.



Obr. 2.5.3. Graf funkce $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ pro $x\ge 0$

Příklad 2.5.3. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\infty}\cos x\,dx$.

Řešení:

V tomto případě je

$$F(c)=\int\limits_0^{c}\cos x\,dx=[\sin x]_0^c=\sin c\ \text{, takže}$$

$L=\lim\limits_{c\to+\infty}F(c)=\lim\limits_{c\to+\infty}\sin c$ neexistuje (hodnoty funkce oscilují mezi -1 a +1.

Integrál tudíž rovněž diverguje.

Příklad 2.5.4. Pro která p je nevlastní integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, $p > 0$ konvergentní?

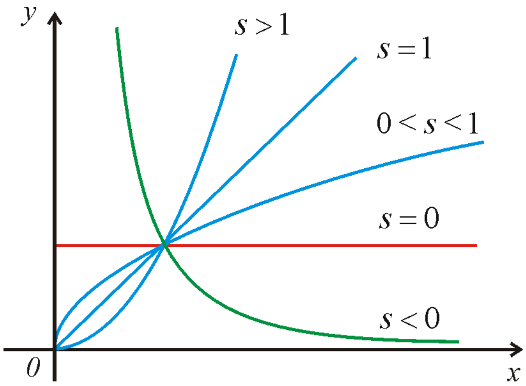
Řešení:

Nejprve počítejme tento integrál pro $p \neq 1$.

$$F(c) = \int_1^c \frac{1}{x^p} \, dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^c = \frac{1}{1-p}\left(c^{1-p} - 1\right).$$

Musíme určit limitu $\lim\limits_{c \to +\infty} c^{1-p}$. Jedná se o mocninnou funkci s exponentem $s = 1 - p$.

Na obrázku 2.5.4 jsou grafy mocninné funkce $y = x^s$, $x > 0$ pro různá s (viz Matematika I, kapitola 1.5.4).



Obr. 2.5.4. Graf funkce $y = x^s$, $s \in \boldsymbol{R}$, $x > 0$

Z grafu 2.5.4 vidíme, že pro $s = 1 - p > 0$ (tedy pro $p < 1$) je $\lim\limits_{c \to +\infty} c^{1-p} = +\infty$, a proto

$$L = \lim_{c \to +\infty} F(c) = \frac{1}{1-p} \lim_{c \to +\infty} \left(c^{1-p} - 1\right) = +\infty,$$ integrál diverguje.

Pro $s = 1 - p < 0$ (tedy pro $p > 1$) je $\lim\limits_{c \to +\infty} c^{1-p} = 0$, a proto

$$L = \lim_{c \to +\infty} F(c) = \frac{1}{1-p} \lim_{c \to +\infty} \left(c^{1-p} - 1\right) = \frac{-1}{1-p} = \frac{1}{p-1},$$ integrál konverguje.

Ještě musíme uvažovat možnost, že $p = 1$. V tomto případě

$$F(c) = \int_1^c \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_1^c = \ln c - \ln 1 = \ln c,$$ pak

$$L = \lim_{c \to +\infty} F(c) = \lim_{c \to +\infty} \ln c = +\infty$$, integrál diverguje.

Shrnutí: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{konverguje} & \text{pro } p > 1 \\ \text{diverguje} & \text{pro } p \le 1 \end{cases}.$

Poznámky

1. Hranice mezi konvergencí a divergencí je $p = 1$.

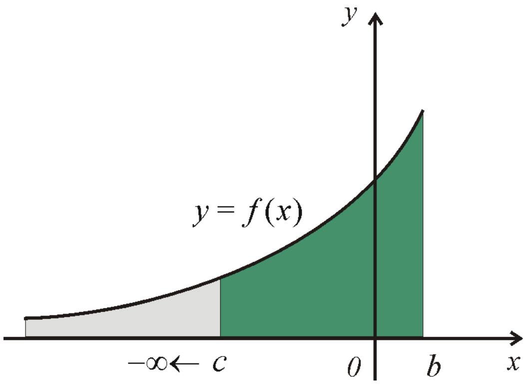
2. Stejný výsledek dostaneme i pro případy, kdy dolní mez integrálu nebude 1*, ale libovolné číslo* $d > 0$.

Výklad

Naprosto analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ na intervalu $(-\infty, b>$, $b \in \boldsymbol{R}$. Předpokládejme, pro každé $c \in (-\infty, b>$ existuje určitý integrál $\int_c^b f(x)dx$.

Pak můžeme definovat funkci G vztahem

$G(c) = \int_c^b f(x)dx$, $c \le b$ a vyšetřujeme limitu $L = \lim_{c \to -\infty} G(c)$. Terminologie je stejná jako v definici 2.5.1.



Obr. 2.5.5. Definice nevlastního integrálu na neohraničeném intervalu $(-\infty, b>$

Poznámka

Je-li funkce $f(x)$ *spojitá na intervalu* $(-\infty, \infty)$ *a konvergují-li pro libovolné číslo a oba* *nevlastní integrály* $L_1 = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $L_2 = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, *pak definujeme nevlastí integrál na intervalu* $(-\infty,\infty)$*:* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = L_1 + L_2$.

Příklad 2.5.5. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^{x^3} dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = x^2 e^{x^3}$ je spojitá pro všechna reálná x. Nalezněme nejprve primitivní funkci k dané funkci:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^{x^3} + C .$$

$$G(c) = \int\limits_{c}^{0} x^2 e^{x^3} dx = \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_c^0 = \frac{1}{3}\left(1 - e^{c^3}\right), \text{ takže}$$

$$L = \lim_{c\to-\infty} G(c) = \lim_{c\to-\infty} \frac{1}{3}\left(1 - e^{c^3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lim_{c\to-\infty} e^{c^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}0 = \frac{1}{3} .$$

Integrál tedy konverguje a platí $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}$.

Příklad 2.5.6. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$.

Řešení:

Integrál rozdělíme na dva nevlastní integrály např.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2} dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$. Pro první integrál platí

$$G(c) = \int\limits_{c}^{0} \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4}\int\limits_{c}^{0} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_c^0 = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2} ,$$

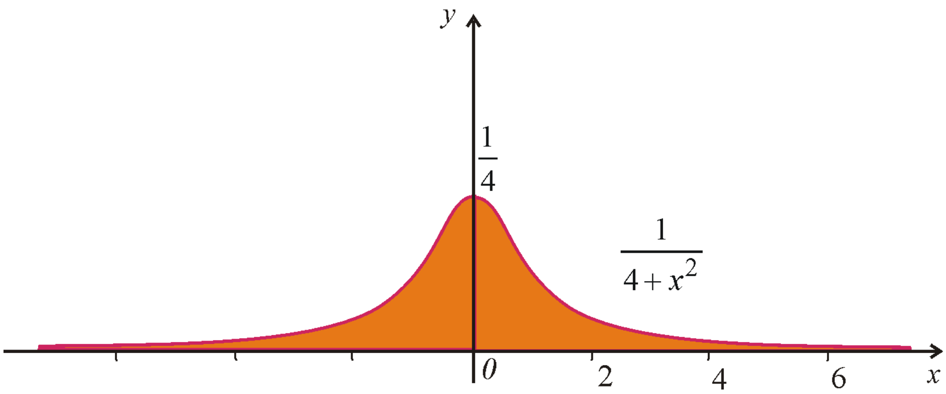
$$L_1 = \lim_{c\to-\infty} G(c) = \lim_{c\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ (konverguje).}$$

Pro druhý integrál dostaneme

$$F(c) = \int_0^c \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^c \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2},$$

$$L_2 = \lim_{c\to\infty} F(c) = \lim_{c\to\infty} \left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ (konverguje).}$$

Tedy $L_1 = L_2$. To nás nepřekvapuje, protože integrovaná funkce $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ je sudá (graf je souměrný podle osy y).



Obr. 2.5.6. Graf funkce $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$

Proto $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}dx = L_1 + L_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (integrál konverguje).

Poznámka

Pomocí nevlastního integrálu 1. druhu definujeme pro $x > 0$ ***funkci Gama****:*

$\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$, *která má řadu zajímavých vlastností. Například platí*

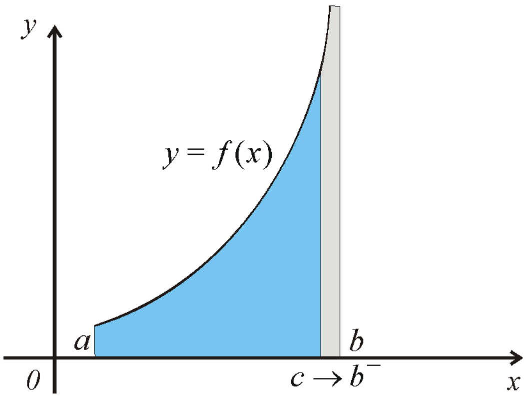
$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ *pro* $n \in \mathbf{N}$.

Nevlastní integrály 2. druhu (integrály z neohraničené funkce)

Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $< a,b)$, $a,b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$. Předpokládejme, že je tato funkce spojitá na intervalu $< a,c)$ pro každé $c \in < a,b)$ (tedy existuje určitý integrál $\int_a^c f(x)dx$), zatímco $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$. Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx\,, \quad a \le c < b\,.$$

Nyní budeme sledovat, jak se chová veličina $F(c)$, když se horní mez c přibližuje k bodu b zleva. Situace je znázorněna na obrázku 2.5.7.



Obr. 2.5.7. Definice nevlastního integrálu z neohraničené funkce na intervalu $< a,b)$

Modrá plocha představuje hodnotu integrálu $\int_a^c f(x)dx$. Při posouvání $c \to b^-$ nás bude zajímat, zda se hodnota tohoto integrálu blíží k nějakému konečnému číslu L (tj. zda existuje konečná limita), nebo zda se tato hodnota nekonečně zvětšuje (limita je $+\infty$ nebo $-\infty$), případně hodnota neexistuje (hodnota osciluje).

Definice 2.5.2. (Definice nevlastního integrálu 2. druhu)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $< a,b)$, zatímco $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$, pak integrál tvaru

$$\int_a^b f(x)dx$$

nazýváme **nevlastní integrál druhého druhu** (neohraničené funkce) a přiřazujeme mu hodnotu rovnou limitě

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx = L \, .$$

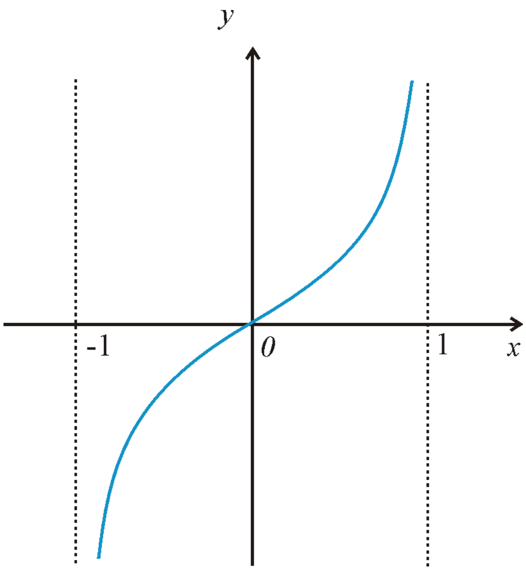
Je-li L konečné číslo, říkáme, že uvažovaný **nevlastní integrál konverguje** (je konvergentní). V opačném případě, tj. když limita je nevlastní ($L = +\infty$ nebo $L = -\infty$) nebo neexistuje, říkáme, že **nevlastní integrál diverguje** (je divergentní).

Řešené úlohy

Příklad 2.5.7. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá na intervalu $<a,b)$ a v bodě $x=1$ není definována (obr. 2.5.8). Protože platí $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$, jedná se o nevlastní integrál 2. druhu (z neohraničené funkce).



Obr. 2.5.8. Graf funkce $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Nejprve nalezneme pomocnou funkci $F(c) = \int_0^c f(x)dx$, $0 \le c < 1$ a potom spočítáme její limitu zleva $L = \lim_{c\to 1^-} F(c)$.

$$F(c)=\int_0^c \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ 1-x^2=t\\ -2xdx=dt\\ xdx=-\frac{1}{2}dt\\ 0\mapsto 1,\ c\mapsto 1-c^2\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int_1^{1-c^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^{1-c^2}=\left[\sqrt{t}\right]_{1-c^2}^{1}=$$

$=1-\sqrt{1-c^2}$. Vypočteme limitu pro $c\to 1^-$:

$$L=\lim_{c\to 1^-}F(c)=\lim_{c\to 1^-}\left(1-\sqrt{1-c^2}\right)=1-0=1\,.$$

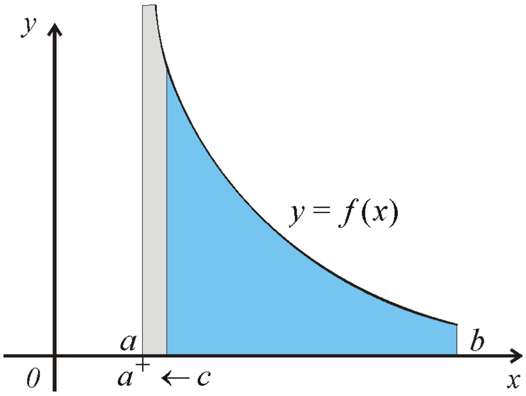
Integrál je tedy konvergentní a platí: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=1$.

Výklad

Naprosto analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_a^b f(x)dx$ na intervalu $(a,b>,\ a,b\in\boldsymbol{R},\ a<b$. Předpokládejme, že je tato funkce spojitá na intervalu $(c,b>$ pro každé $c\in(a,b>$ (tedy existuje určitý integrál $\int_c^b f(x)dx$), zatímco $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$. Pak můžeme definovat funkci G vztahem

$$G(c)=\int_c^b f(x)dx\,,\quad a<c\le b\,.$$

Vyšetřujeme limitu pro $c\to a^+$. Terminologie a označení jsou stejné jako v definici 2.5.2.



Obr. 2.5.9. Definice nevlastního integrálu z neohraničené funkce na intervalu $(a,b>$

Poznámka

Má-li integrovaná funkce více bodů, v nichž je funkce neohraničená ($\lim f(x)=\infty$)*, rozdělíme interval integrace na tolik dílčích intervalů, aby v každém z nich byl jediný bod v horní nebo v dolní mezi, ve kterém je limita nevlastní. Konvergují-li nevlastní integrály ve všech těchto dílčích intervalech, pak za jeho hodnotu na celém intervalu považujeme součet jeho hodnot na dílčích intervalech. Je-li nevlastní integrál divergentní aspoň na jednom dílčím intervalu, považujeme jej za divergentní na celém intervalu.*

Řešené úlohy

Příklad 2.5.8. Vypočtěte integrál $\int_0^4 \frac{1}{x}\,dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá na intervalu $(0,4>$ a v bodě $x=0$ není definována. Protože platí $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$, jedná se o nevlastní integrál 2. druhu (z neohraničené funkce). Grafem funkce je rovnoosá hyperbola s asymptotami $x=0$ a $y=0$.

Nejprve vypočteme určitý integrál na intervalu $(c,4>,\ \ 0<c\le 4$:

$$G(c)=\int_c^4 \frac{1}{x}\,dx=\left[\ln x\right]_c^4=\ln 4-\ln c\,.$$

Nyní vypočteme limitu pro $c\to 0^+$:

$L = \lim\limits_{c\to 0^+} G(c) = \lim\limits_{c\to 0^+} \left(\ln 4 - \ln c\right) = \ln 4 - (-\infty) = +\infty$. Integrál je tedy divergentní.

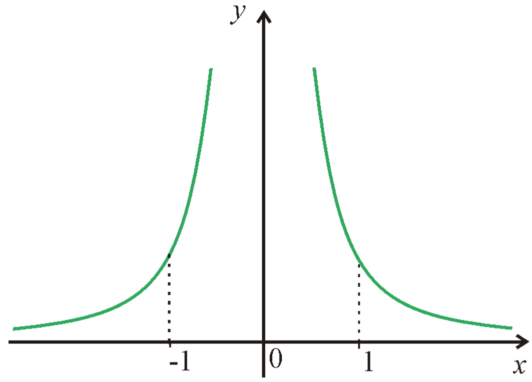
Příklad 2.5.9. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$.

Řešení:

Studenti obvykle postupují následujícím způsobem:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 + (-1) = -2 .$$

Někteří studenti dvakrát podtrhnou výsledek a jsou spokojeni, jak to lehce zvládli. Přemýšlivé studenty výsledek zarazí. Vždyť pro integrační obor $< -1, 1 >$ je integrand vždy kladný ($\frac{1}{x^2} > 0$, viz obr. 2.5.10), a tedy hodnota integrálu musí být kladná (lze ji interpretovat jako obsah plochy pod danou funkcí). Kde je chyba?



Obr. 2.5.10. Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Je zřejmé, že daná funkce je na intervalu $< -1, 1 >$ neohraničená a není definována v bodě $x = 0$. Rozdělíme tento interval na dílčí intervaly, aby nevlastní limita byla vždy jen v jednom krajním bodě intervalu:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$$ a budeme počítat dva nevlastní integrály.

$$F(c) = \int\limits_{-1}^{c} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{c} = -\frac{1}{c} - 1 \text{ a } L = \lim_{c\to 0^-} F(c) = \lim_{c\to 0^-} \left(-\frac{1}{c} - 1\right) = \frac{-1}{0^-} - 1 = +\infty .$$

Proto $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}dx$ diverguje. Pro druhý integrál vypočteme (podle předcházející poznámky to není nutné):

$$G(c) = \int_{c}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_c^1 = -1 + \frac{1}{c} \quad L = \lim_{c\to 0^+} F(c) = \lim_{c\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{c}\right) = -1 + \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

Proto také $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ diverguje.

Shrnutí: Integrál $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ je divergentní.

Poznámka

1. Nevlastní integrál prvního druhu (na neohraničeném intervalu) poznáte snadno, neboť v mezích figuruje symbol $+\infty$ nebo $-\infty$. Problematičtější je situace u nevlastních integrálů druhého druhu, neboť na první pohled nemusí být patrné, že je integrand neohraničená funkce, a že se jedná o nevlastní integrál. Pokud bude student postupovat, jako by se jednalo o „obyčejný“ integrál, může dostat nesprávný výsledek.

2. To, že v některém bodě není integrovaná funkce definována ještě neznamená, že musí jít o nevlastní integrál. Například funkce $\frac{\sin x}{x}$ není definována pro $x = 0$, ale $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, a tedy funkce je ohraničená. Proto integrál $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$ není nevlastní, ale jedná se o „obyčejný“ integrál. To, že nám bude výpočet tohoto integrálu dělat potíže (viz kapitola 1.7), je jiný problém. Bude nutno použít nějakou numerickou metodu.

Kontrolní otázky

1. Zapište definici nevlastního integrálu na intervalu $(-\infty, b>$, $b \in \mathbf{R}$ (analogie definice 2.5.1).
2. Kdy je nevlastní integrál konvergentní a kdy je divergentní?
3. Jaký je rozdíl mezi nevlastními integrály prvního a druhého druhu?

4. Zapište definici nevlastního integrálu na intervalu $(a,b>$, $a,b \in \boldsymbol{R}$, $a<b$, jestliže $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ (analogie definice 2.5.2).

5. Je nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4}dx$ konvergentní?.

6. Jsou integrály $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ a $\int\limits_0^1 x\ln x dx$ nevlastní?

7. Pro která p je integrál $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ konvergentní? (Analogie příkladu 2.5.4.)

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ b) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ c) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$

d) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$ e) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ f) $\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2+x+1}$

g) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ h) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ i) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$

2. a) $\int\limits_1^{+\infty} 3^{-2x}dx$ b) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ c) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$

d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ f) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

g) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$ h) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ i) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

3. a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$ b) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ c) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$

d) $\int\limits_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ e) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{(x-1)^3}$ f) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x \cos x}$ c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

d) $\displaystyle\int_0^1 x \ln x\,dx$ e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) diverguje; **b)** 1; **c)** diverguje; **d)** $\frac{\pi}{8}$; **e)** $\frac{3\pi}{8}$; **f)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; **g)** $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$; **h)** π; **i)** $\ln 2$.

2. a) $\frac{1}{18\ln 3}$; **b)** diverguje; **c)** 1; **d)** 0; **e)** $\frac{\pi^2}{8}$; **f)** $1-\frac{1}{e}$; **g)** $\frac{\pi^3}{12}$; **h)** $\frac{\pi}{4}$; **i)** $-\frac{1}{2}$. **3. a)** $\frac{5}{2}$; **b)** $2\sqrt{2}$; **c)** -1; **d)** $\frac{15}{2}$; **e)** diverguje; **f)** π. **4. a)** 1; **b)** diverguje; **c)** diverguje; **d)** $-\frac{1}{4}$; **e)** $\ln 3$; **f)** diverguje.

Kontrolní test

1. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ je

   a) 1. druhu a rovná se 3, b) 2. druhu a diverguje,
   c) 2. druhu a rovná se 3, d) 1. druhu a diverguje.

2. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$ je

   a) 1. druhu a rovná se $\frac{1}{3}$, b) 2. druhu a rovná se $\frac{1}{3}$,
   c) 1. druhu a diverguje, d) 2. druhu a diverguje.

3. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ je

   a) 2. druhu a diverguje, b) 1. druhu a rovná se π,
   c) 2. druhu a rovná se π, d) 1. druhu a diverguje.

4. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$ je

a) 1. druhu a diverguje, b) 1. druhu a rovná se $-\frac{2}{e}$,

c) 2. druhu a diverguje, d) 2. druhu a rovná se $-\frac{2}{e}$.

5. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{3+x^2}$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$, c) $\frac{\pi}{2}$, d) diverguje.

6. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

a) $\frac{\pi}{4}$, b) diverguje, c) $-\frac{\pi}{4}$, d) 0.

7. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$.

a) $\frac{1}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) diverguje, d) 0.

8. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \operatorname{tg} x\,dx$.

a) 0, b) $\ln 2$, c) diverguje, d) $-\ln 2$.

9. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

a) 0, b) -1, c) diverguje, d) 1.

10. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

a) $-6\sqrt[3]{2}$, b) diverguje, c) 0, d) $6\sqrt[3]{2}$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. b); 4. d); 5. a); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.5 znovu.

Shrnutí lekce

Rozlišujeme dva druhy nevlastních integrálů. Jednak může být integrál nevlastní kvůli tomu, že je integrační obor neohraničený (nevlastní integrály prvního druhu) nebo není na integračním oboru ohraničená integrovaná funkce (nevlastní integrály druhého druhu). Je-li funkce $f(x)$ definována na intervalu $a \le x < b$, $b \in \boldsymbol{R}$ zprava otevřeném a integrovatelná na každém dílčím uzavřeném intervalu $< a, c >$, $c < b$, pak definujeme nevlastní integrál prvního druhu $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx$ na intervalu $< a, \infty)$, resp. nevlastní integrál druhého druhu $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$ pro funkci $f(x)$ neohraničenou pro $x \to b^-$.

Analogicky se zavedou nevlastní integrály na zleva otevřeném intervalu $a < x \le b$, $a \in \boldsymbol{R}$.