3. APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

V matematice, ale zejména v přírodních a technických vědách, existuje nepřeberné množství problémů, při jejichž řešení je nutno tím či oním způsobem použít integrálního počtu. V této kapitole uvádíme stručný přehled těch nejběžnějších aplikací určitých integrálů v geometrii a ve fyzice.

Budeme se zabývat výpočtem délek, obsahů a objemů. Během dosavadní školní docházky jste si vytvořili jistou intuitivní představu, co je to délka křivky, obsah nějakého geometrického obrazce či objem tělesa. Seznámili jste se se vzorci pro výpočet délky úsečky nebo kružnice, dovedete vypočítat obsah trojúhelníka, obdélníka, čtverce, kruhu, objem krychle, kvádru, jehlanu, koule a dalších obrazců či těles.

Jistě máte představu, že pravidelný pětiúhelník má určitý obsah, i když neznáte vzorec pro jeho výpočet. Dovedete však tento pětiúhelník rozložit na konečný počet trojúhelníků a po určité námaze byste vypočítali obsah pětiúhelníka jako součet obsahů těchto trojúhelníků. Vzniká otázka, jak definovat obsahy obecnějších obrazců, které nelze rozložit na konečný počet trojúhelníků.

Vzhledem k určení a rozsahu těchto studijních materiálů není možné přesně zavést pojmy délka, obsah a objem. Precizním zavedením těchto pojmů se zabývá teorie míry, což je poměrně náročná matematická partie. Pro potřeby inženýrské praxe vystačíme s jednoduchými objekty, kde je intuitivně jasné, že mají určitou délku, obsah, resp. objem. Budeme se zabývat výpočtem těchto veličin.

Při řešení geometrických a fyzikálních úloh postupujeme ve dvou krocích:

1. Převedeme řešení úlohy na výpočet určitého integrálu.
2. Tento určitý integrál vypočítáme.

3.1. Obsah rovinné oblasti

Cíle

Seznámíte se se základní aplikací určitého integrálu – výpočtem obsahu křivočarého lichoběžníka a obsahu složitějších rovinných oblastí.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1), kde je výpočet obsahu křivočarého lichoběžníka užitý jako motivace zavedení určitého integrálu. Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu.

Výklad

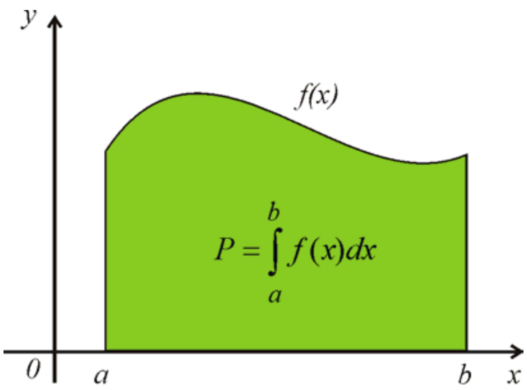
Věta 3.1.1.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$ a je na něm nezáporná. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x platí

$$P = \int_a^b f(x)dx .$$

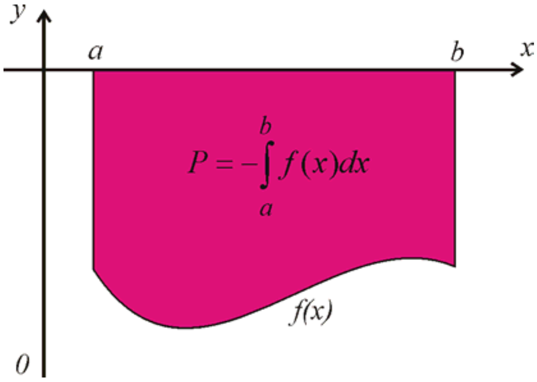
Důkaz:

Tvrzení plyne z definice Riemannova určitého integrálu (definice 2.1.2).



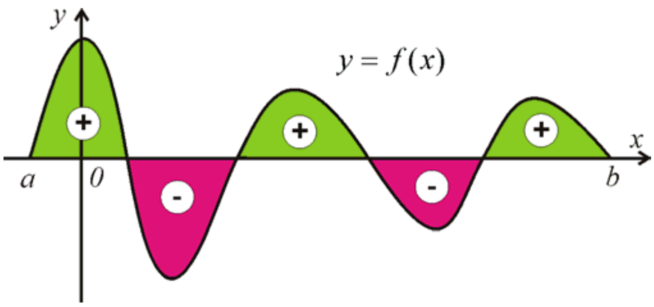
Obr. 3.1.1. Obsah křivočarého lichoběžníka pro nezápornou funkci ($f(x) \geq 0$)

Uvedený vztah pro obsah křivočarého lichoběžníka platí pro **nezápornou funkci** $f(x)$ na intervalu $< a,b >$. Z definice určitého integrálu je zřejmé, že pro funkci $f(x)$, která je naopak na intervalu $< a,b >$ **nekladná** ($f(x) \leq 0$), bude určitý integrál $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, a proto obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x bude $P = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$ (obr. 3.1.2).



Obr. 3.1.2. Obsah křivočarého lichoběžníka pro nekladnou funkci ($f(x) \le 0$)

V obecném případě může funkce $f(x)$ libovolně měnit znaménko. Při výpočtu obsahu plochy ohraničené grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $< a,b >$ je nutno brát části nad osou x kladně a části pod osou x záporně. Pokud bychom vypočetli integrál $\int_a^b f(x)dx$ na celém intervalu, odečítaly by se kladné a záporné části (obr. 3.1.3).



Obr. 3.1.3. Obsah plochy mezi osou x a grafem funkce $f(x)$ se znaménky

Větu 3.1.1. můžeme zobecnit na případ, kdy je obrazec zdola ohraničen další funkcí $g(x)$.

Věta 3.1.2.

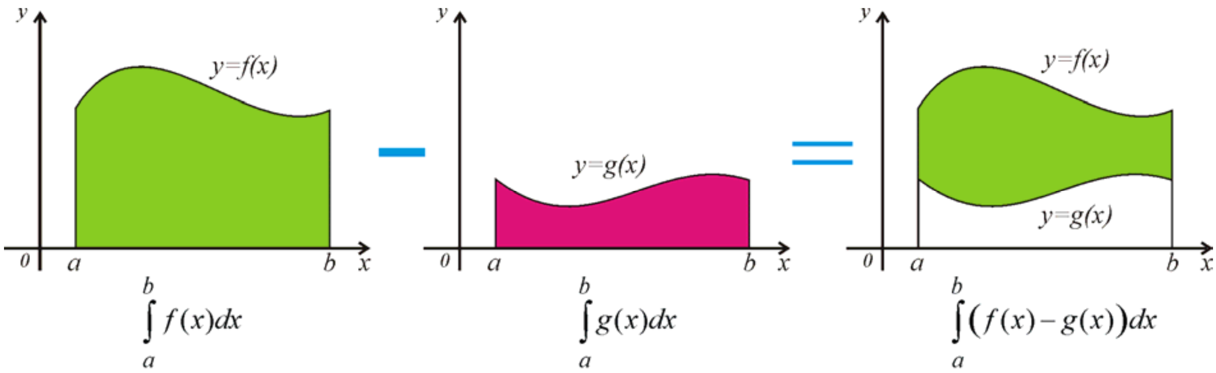
Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné a platí $g(x) \le f(x)$ pro každé $x \in < a,b >$. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $g(x)$, shora grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$ platí

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x) \big) dx .$$

Důkaz:

Jsou-li obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ nezáporné, je obsah uvažovaného křivočarého lichoběžníka roven rozdílu obsahu plochy pod grafem funkce $f(x)$ a obsahu plochy pod grafem funkce $g(x)$, viz obr. 3.1.4.

$$P=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx$$



Obr. 3.1.4. Obsah plochy mezi funkcemi $g(x)$ a $f(x)$ na intervalu $<a,b>$

Obecně by mohly funkce $f(x)$ a $g(x)$ protínat osu *x* (část obrazce by ležela pod osou *x*). V tomto případě stačí k oběma funkcím přičíst vhodnou konstantu *C*, aby byly obě funkce $f(x)+C$ a $g(x)+C$ nezáporné. Obsah uvažovaného křivočarého lichoběžníka se tím nezmění.

$$P=\int_a^b[f(x)+C]dx-\int_a^b[g(x)+C]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b Cdx-\int_a^b g(x)dx-\int_a^b Cdx=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx\,.$$

Poznámky

1. Z důkazu věty 3.1.2 vyplývá, že při výpočtu obsahu křivočarého lichoběžníka mezi grafy dvou funkcí $g(x)\le f(x)$ není důležité, zda tento obrazec nebo jeho část leží pod osou x.

2. Věta 3.1.1 je speciálním případem věty 3.1.2 pro $g(x)=0$.

Grafem funkce $y=f(x)$ je křivka. Tato funkce (křivka) může být dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$ a $y=\psi(t)$ pro $t\in<\alpha,\beta>$. Proměnnou *t* nazýváme parametr (ve fyzice mívá obvykle význam času a funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mohou udávat *x*-ovou a *y*-ovou souřadnici pohybujícího se bodu). Pro výpočet obsahu křivočarého lichoběžníka (obr. 3.1.1) ohraničeného funkcí danou parametrickými rovnicemi můžeme modifikovat větu 3.1.1 následujícím způsobem:

Věta 3.1.3.

Nechť funkce *f* je dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$ a $y=\psi(t)$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou spojité pro $t\in<\alpha,\beta>$. Je-li funkce $\varphi(t)$ ryze monotonní a má spojitou derivaci na intervalu $<\alpha,\beta>$, přičemž $\varphi(\alpha)=a$ a $\varphi(\beta)=b$, pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce *f*, přímkami $x=a$, $x=b$ a osou *x* platí

$$P=\left|\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt\right|.$$

Důkaz:

Je-li funkce $x=\varphi(t)$ ryze monotonní na intervalu $<\alpha,\beta>$, pak k ní existuje inverzní funkce $t=\varphi^{-1}(x)$. Rovnici křivky můžeme proto psát ve tvaru $y=\psi(\varphi^{-1}(x))=f(x)$.

Uvažovaná plocha bude mít obsah

$$P=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b\psi(\varphi^{-1}(x))dx\right|.$$

Odtud substitucí $x=\varphi(t)$, ze které plyne $dx=\varphi'(t)dt$, dostaneme

$$P=\left|\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt\right|.$$

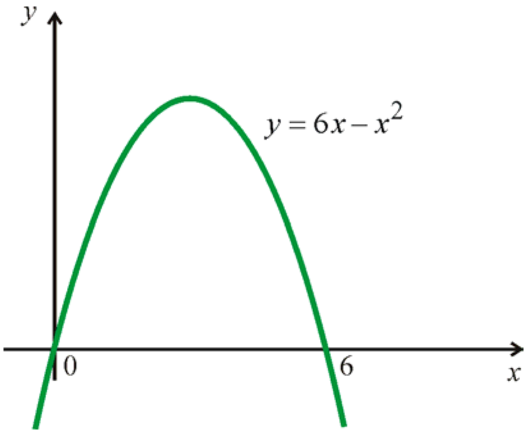
Řešené úlohy

Příklad 3.1.1. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y=6x-x^2$ a osou *x*.

Řešení:

U příkladů tohoto typu je dobré si udělat náčrtek. Je zadána kvadratická funkce, tedy grafem bude parabola. Nejprve upravíme rovnici paraboly, abychom nalezli její vrchol.

$y=6x-x^2=-(x^2-6x)=-(x-3)^2+9$. Z rovnice $y-9=-(x-3)^2$ je zřejmé, že vrchol paraboly je v bodě $V=(3,9)$ a ramena paraboly budou orientována směrem dolů (obr. 3.1.5). Řešením rovnice $6x - x^2 = 0$ dostaneme průsečíky dané paraboly s osou x: $a = 0$ a $b = 6$.



Obr. 3.1.5. Graf funkce $y = 6x - x^2$

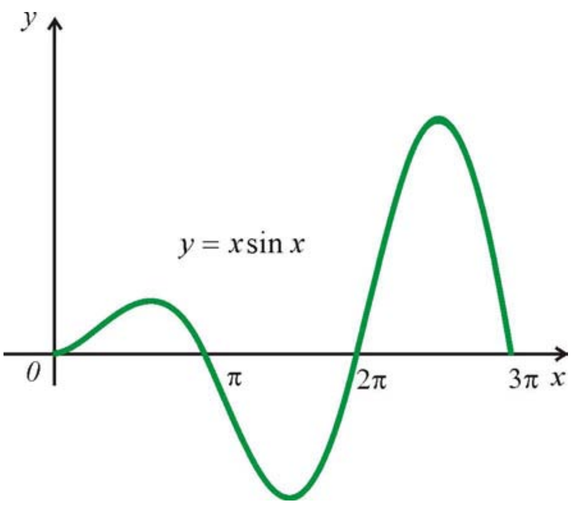
Hledaný obsah je

$$P = \int_0^6 (6x - x^2)dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = 108 - 2 \cdot 36 = 36 .$$

Příklad 3.1.2. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = x \sin x$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 3\pi$.

Řešení:

Na intervalu $< 0, 3\pi >$ je $x \geq 0$, avšak funkce $\sin x$ bude měnit znaménko. Proto bude $x \sin x \geq 0$ pro $x \in < 0, \pi >$, $x \sin x \leq 0$ pro $x \in < \pi, 2\pi >$ a $x \sin x \geq 0$ pro $x \in < 2\pi, 3\pi >$ (obr. 3.1.6).



Obr. 3.1.6. Graf funkce $y = x \sin x$

Hledaný obsah bude sestávat ze tří částí:

$$P = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x \, dx .$$

Potřebnou primitivní funkci k funkci $y = x \sin x$ nalezneme metodou per partes:

$$\int x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u' = \sin x & v = x \\ u = -\cos x & v' = 1 \end{vmatrix} = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \sin x - x \cos x .$$

Dosadíme příslušné meze:

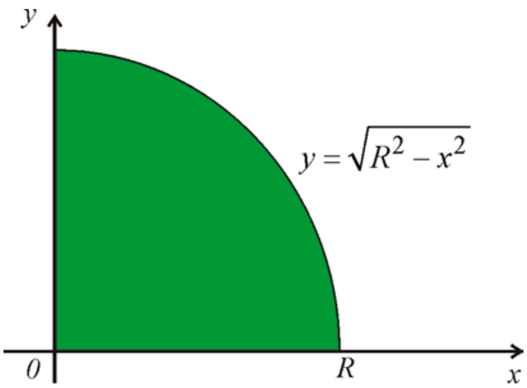
$$P = [\sin x - x \cos x]_0^{\pi} - [\sin x - x \cos x]_{\pi}^{2\pi} + [\sin x - x \cos x]_{2\pi}^{3\pi} =$$

$$= [0 - \pi(-1) - 0 + 0] - [0 - 2\pi - 0 + \pi(-1)] + [0 - 3\pi(-1) - 0 + 2\pi] = \pi + 3\pi + 5\pi = 9\pi .$$

Příklad 3.1.3. Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu kruhu o poloměru R.

Řešení:

Vzorec pro výpočet obsahu kruhu jistě znáte už ze základní školy. Dosud jste však neměli dostatečné znalosti, abyste mohli dokázat platnost tohoto vzorce. Střed kruhu umístíme do počátku, což nemá vliv na obsah kruhu. Rovnice hraniční kružnice bude $x^2 + y^2 = R^2$. Pro jednoduchost vypočteme obsah jedné čtvrtiny kruhu ležící v prvním kvadrantu a potom výsledek vynásobíme čtyřmi. Pro $x \in \langle 0, R \rangle$ z rovnice kružnice dostaneme $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.



Obr. 3.1.7. Obsah čtvrtiny kruhu

Pro obsah celého kruhu bude platit $P = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$. Podobný integrál jsme již počítali. Podívejte se na příklad 1.4.7. Použijeme substituční metodu:

$$P = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = R\sin t \\ dx = R\cos t\,dt \\ 0 \mapsto 0,\quad R \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\; R\cos t\,dt =$$

$$= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= 2R^2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi R^2 .$$

Poznámka

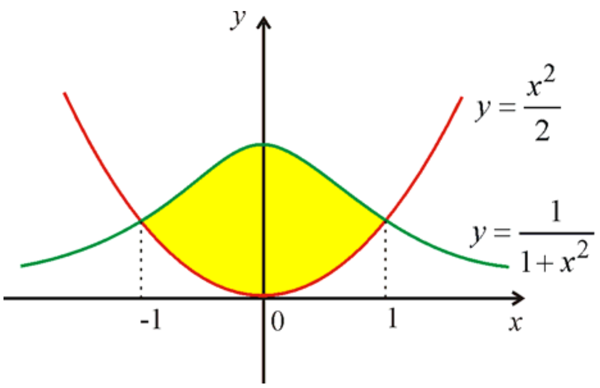
Při úpravě (výpočet odmocniny $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t}$ *) jsme využili toho, že pro* $x \in <0, \frac{\pi}{2}>$ *je* $\cos x \ge 0$.

Příklad 3.1.4. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

$$y = \frac{1}{1+x^2} \text{ a } y = \frac{x^2}{2}.$$

Řešení:

Je zřejmé, že funkce $y = \frac{1}{1+x^2}$ bude vždy kladná a největší hodnoty nabude pro $x = 0$. Grafem druhé funkce je parabola (obr. 3.1.8).



Obr. 3.1.8. Obrazec ohraničený křivkami $y = \frac{1}{1+x^2}$ a $y = \frac{x^2}{2}$

Nejprve musíme nalézt průsečíky daných křivek. Řešíme rovnici

$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}$. Po úpravě dostaneme $x^4 + x^2 - 2 = 0$, tedy $(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0$.

Uvedená rovnice má dva reálné kořeny $x_1 = -1$ a $x_1 = 1$.

Podle věty 3.1.2 je obsah oblasti ohraničené danými křivkami roven

$$P = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\left[\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Poznámka

Využili jsme toho, že oblast je souměrná podle osy y (integrand je sudá funkce).

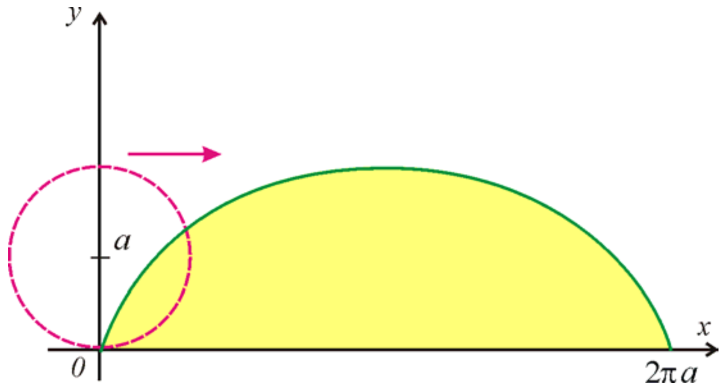
Příklad 3.1.5. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem prostá cykloidy.

Řešení:

Prostá cykloida je křivka, kterou opisuje bod pevně spojený s kružnicí o poloměru a při kotálení kružnice po přímce (obr. 3.1.9). Tato cykloida má parametrické rovnice:

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

První oblouk cykloidy dostaneme pro parametr $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



Obr. 3.1.9. První oblouk cykloidy

Protože $dx = a(1 - \cos t)dt$, dostaneme z věty 3.1.3

$$P = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2})dt = a^2 \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = a^2 \left[2\pi + \pi \right] = 3\pi a^2 .$$

Poznámka

Body uvnitř kružnice by při kotálení kružnice po přímce opisovaly ***zkrácenou cykloidu*** *a myšlené body vně tzv.* ***prodlouženou cykloidu****. Cykloida se v přírodě a technice objevuje na nečekaných místech a v různých zajímavých souvislostech. Například vlny na vodě mají tvar cykloidy, s oblibou se využívají cykloidiální ozubená kola v převodovkách, cykloida snese největší zatížení, což má využití v mostních a tunelových konstrukcích (nové tunely pražského metra, tunel Mrázovka), dále je užíván cykloidiální výřez na carvingových lyžích.*

Kontrolní otázky

1. Uveďte vzorec pro výpočet obsahu obrazce ohraničeného osou x a grafem funkce $y = f(x)$, která protíná osu x ve dvou bodech.
2. Jak se liší vztahy pro výpočet obsahu křivočarého lichoběžníka ohraničeného grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x pro nezápornou a pro nekladnou funkci $f(x)$?
3. Jak vypočítáme obsah rovinného obrazce ohraničeného dvěma funkcemi $g(x) \le f(x)$?.
4. Jak vypočítáme obsah rovinného obrazce ohraničeného dvěma funkcemi, pokud celá oblast leží pod osou x (tj. $g(x) \le f(x) < 0$)?
5. Jak vypočítáte obsah obrazce ohraničeného funkcí $y = \sin 2x$ a osou x pro $x \in < 0, 2\pi >$.
6. Určete parametr k tak, aby obsah oblasti ohraničené parabolou $y = x - x^2$ a přímkou $y = kx$ byl roven $\frac{9}{2}$.
7. Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu elipsy o poloosách a a b. (Parametrické rovnice této elipsy jsou $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in < 0, 2\pi >$).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

a) $y = 4 - x^2$; $y = 0$ b) $y = 6x - x^2$; $y = 0$

c) $y = 4 - x^2; \quad y = x^2$

d) $y = -x^2 + 4x - 2; \quad x + y = 2$

e) $y = x^2 - 2x; \quad y = x$

f) $y = x^2; \quad x = y^2$

g) $y = x^2 - x - 6; \quad y = -x^2 + 5x + 14$

h) $y = x^3; \quad y = 4x$

i) $xy = 4; \quad x + y = 5$

j) $y = \operatorname{tg} x; \quad y = 0; \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

k) $y = \sin x; \quad y = \dfrac{2x}{\pi}$

l) $y = e^x; \quad y = e^{-x}; \quad x = \ln 2$

2. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

a) $y = \ln^2 x; \quad y = \ln x$

b) $y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad x = \dfrac{\pi}{4}; \quad x = \dfrac{3\pi}{4}$

c) $y = \arcsin x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1$

d) $y = \dfrac{x^2}{4}; \quad y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$

e) $y = 2^x; \quad x = -1; \quad x = 0; \quad y = 0$

f) $y = 2x^3; \quad y = \dfrac{2}{x}; \quad x - y = 1; \quad x \ge 0$

3. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného

a) parabolou $y = x^2 - 2x + 2$, její tečnou v bodě $(3,5)$ a souřadnicovými osami.

b) křivkou $y = e^x$, její tečnou v bodě $(0,1)$ a přímkou $x = -1$.

c) grafem funkce $y = x^3 + x^2 - 6x$ pro $-3 \le x \le 3$ a osou x.

d) parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jejími tečnami v bodech $(1,3)$ a $(4,0)$.

4. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a křivkou zadanou parametrickými rovnicemi

a) $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3; \quad -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$

b) $x = 2\sin t,\ y = 2\cos t; \quad 0 \le t \le \pi$ $x = 2\sin t, \quad y = 2\cos t; \quad 0 \le t \le \pi$

c) $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t); \quad 0 \le t \le 2\pi$

d) $x = 3\sin^3 t,\ y = 3\cos^3 t; \quad 0 \le t \le \pi$

e) $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3; \quad 0 \le t \le 2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** $\dfrac{32}{3}$; **b)** 36; **c)** $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$; **d)** $\dfrac{9}{2}$; **e)** $\dfrac{9}{2}$; **f)** $\dfrac{1}{3}$; **g)** $\dfrac{343}{3}$; **h)** 8; **i)** $\dfrac{15}{2}-8\ln 2$; **j)** $\dfrac{\ln 2}{2}$; **k)** $2-\dfrac{\pi}{2}$; **l)** $\dfrac{1}{2}$. **2.** **a)** $3-e$; **b)** $\sqrt{2}$; **c)** $\dfrac{\pi}{2}-1$; **d)** $\pi-\dfrac{4}{3}$; **e)** $\dfrac{1}{2\ln 2}$; **f)** $\dfrac{1}{2}+2\ln 2$.

3. **a)** $\dfrac{23}{8}$; **b)** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}$; **c)** $\dfrac{86}{3}$; **d)** $\dfrac{9}{4}$. **4.** **a)** $\dfrac{72\sqrt{3}}{5}$; **b)** 2π; **c)** 12π; **d)** $\dfrac{27\pi}{8}$; **e)** $\dfrac{7}{15}$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $xy=6$ a $x+y-7=0$.

   a) $\dfrac{35}{2}-6\ln 6$, b) $\dfrac{35}{2}+6\ln 6$, c) $\dfrac{35}{2}-\ln 6$, d) $\dfrac{35}{2}+\ln 6$.

2. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y=x^2-8x+14$ a $y=-x^2+4x+14$.

   a) 144, b) 72, c) 36, d) 108.

3. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y^2=2x+1$ a $x-y-1=0$.

   a) $\dfrac{14}{3}$, b) $\dfrac{29}{3}$, c) $\dfrac{28}{3}$, d) $\dfrac{16}{3}$.

4. Vypočtěte obsah rovinné oblasti dané nerovnostmi $x^2+y^2\le 8$ a $2y\ge x^2$.

   a) $\dfrac{2}{3}+\pi$, b) $\dfrac{4}{3}+2\pi$, c) $-\dfrac{8}{3}+2\pi$, d) $\dfrac{8}{3}+2\pi$.

5. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y=\operatorname{tg} x$, $y=\dfrac{2}{3}\cos x$ a $y=0$.

   a) $\dfrac{1}{3}-\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\dfrac{1}{3}-\ln 2$, c) $\dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\dfrac{1}{3}+\ln 2$.

6. Vypočtěte obsah rovinné oblasti dané nerovnostmi $y\le 4$, $x^2\ge y$ a $x^2\le 4y$.

   a) $\dfrac{16}{3}$, b) 20, c) 40, d) $\dfrac{32}{3}$.

7. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arccotg} x$ a $x=0$.

   a) $\ln 2$, b) $\dfrac{\pi}{2}+\ln 2$, c) $\dfrac{\pi}{2}$, d) $\dfrac{\pi}{2}-\ln 2$.

8. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami

$k_1 : x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad k_2 : x = b\cos t,\ y = b\sin t,\ a > b > 0$ konst., pro

$t \in < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$.

a) $\pi b(a-b)$, b) $\pi a(a-b)$, c) $\frac{\pi b}{2}(a-b)$, d) $\frac{\pi a}{2}(a-b)$.

9. Vypočtěte obsah smyčky křivky $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3,\ -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$.

a) $\frac{36}{5}\sqrt{3}$, b) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$, c) $\frac{6}{5}\sqrt{3}$, d) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$.

10. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = \frac{\ln x}{4x}$ a $y = x\ln x$.

a) $\frac{3}{16} + \frac{1}{8}(\ln^2 2 + \ln 2)$, b) $\frac{1}{8}\ln 2(1+\ln 2) - \frac{3}{16}$,

c) $\frac{3}{16} + \frac{1}{8}(\ln^2 2 - \ln 2)$, d) $\frac{3}{16} - \frac{1}{8}(\ln 2 + \ln^2 2)$.

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. d); 4. b); 5. c); 6. d); 7. a); 8. c); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.1 znovu.

Shrnutí lekce

Z definice Riemannova určitého integrálu vyplývá, že integrál $\int_a^b f(x)dx$ pro nezápornou funkci $f(x)$ na intervalu $< a,b >$ dává obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x. Jestliže funkce $f(x)$ na uvedeném intervalu protíná osu x, je nutno rozdělit obrazec na části nad osou x a na části pod osou x, kde jsou hodnoty určitého integrálu z dané funkce záporné. Při výpočtu obsahu rovinného obrazce ohraničeného zdola grafem funkce $g(x)$ a shora grafem funkce $f(x)$ pro $x \in < a,b >$ není důležité, zda obrazec nebo jeho část leží pod osou x.