3.2. Délka oblouku křivky

Cíle

Seznámíte se s další aplikací určitého integrálu – výpočtem délky křivky.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu. Budeme také používat parametrické rovnice křivky.

Výklad

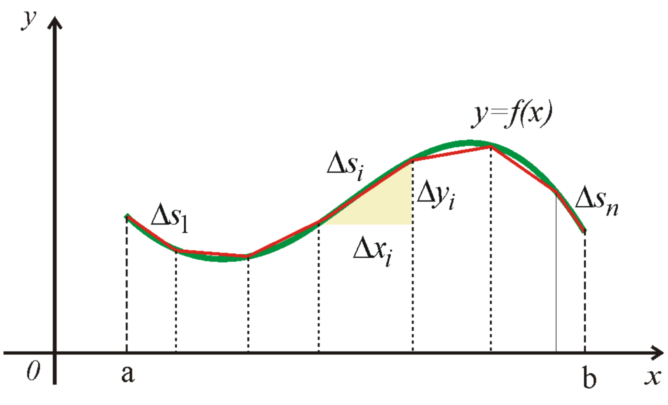
Mějme část rovinné křivky dané rovnicí $y = f(x)$ pro $a \le x \le b$ (obr. 3.2.1). Zajímá nás, jaká je délka této křivky.

Předpokládejme, že jsou funkce $f(x)$ a její derivace $f'(x)$ spojité na intervalu $< a, b >$. Budeme postupovat analogicky jako při zavedení Riemannova určitého integrálu (kap. 2.1). Křivku nahradíme lomenou čarou, která se bude skládat z n úseček (obr. 3.2.1). Z Pythagorovy věty bude délka i – té úsečky rovna

$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Norma dělení bude $\nu(D_n) = \max\limits_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$.

Délka celé křivky bude přibližně rovna součtu délek jednotlivých úseček:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \,.$$



Obr. 3.2.1. Aproximace křivky $y = f(x)$ lomenou čarou

Je zřejmé, že pro zvětšující se počet dílčích úseček budeme dostávat přesnější aproximaci délky oblouku křivky. Pro $n \to \infty$ a normu dělení $\nu(D_n) \to 0$ bude $\Delta x \to dx$, $\Delta y \to dy$ a pro délku uvažované křivky dostaneme:

$$s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\ .$$

Jelikož $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ (Matematika I, část II, kapitola 3.6), snadno vztah upravíme na tvar

$$s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [\, f'(x)]^2}\, dx\, .$$

Věta 3.2.1.

Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $< a, b >$ a má zde spojitou derivaci. Pak délka této křivky

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [\, f'(x)]^2}\, dx\, .$$

Křivka nemusí být vždy zadána explicitní funkcí $y = f(x)$, může být dána rovněž parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad t \in < \alpha, \beta >\, .$$

Křivku si můžeme představit jako trajektorii, kterou urazí bod, který se v čase spojitě pohybuje v rovině. Spojité funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ udávají x-ovou a y-ovou souřadnici pohybujícího se bodu. Délka takové křivky je z fyzikálního hlediska vlastně dráha, kterou bod urazí od okamžiku α do okamžiku β.

Věta 3.2.2.

Nechť je křivka dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $< \alpha, \beta >$. Pak je délka této křivky

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt\, .$$

Důkaz: Funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $<\alpha,\beta>$, pak platí

$dx=\varphi'(t)dt$ a $dy=\psi'(t)dt$. Dosazením do vztahu

$$s=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)dt]^2+[\psi'(t)dt]^2}=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

dostaneme tvrzení věty.

Poznámka

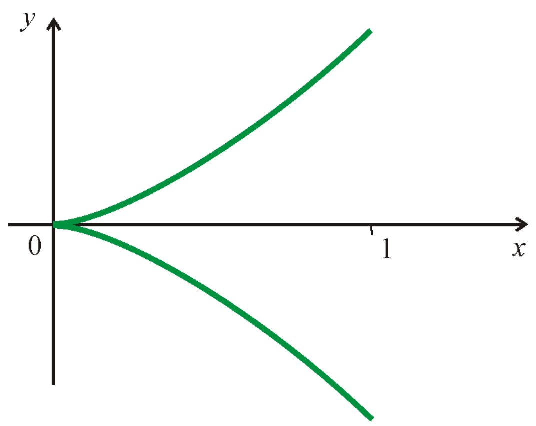
Libovolnou funkci $y=f(x)$, $x\in<a,b>$ *můžeme snadnou parametrizovat, když položíme* $x=t$, $y=f(t)$, $t\in<a,b>$. *Jelikož* $\varphi'(t)=1$, *vidíme, že tvrzení věty 3.2.1 je speciálním případem věty 3.2.2.*

Řešené úlohy

Příklad 3.2.1. Vypočtěte délku semikubické (Neilovy) paraboly $y^2=x^3$ na intervalu $<0,1>$.

Řešení:

Křivka se skládá ze dvou částí $y=x^{\frac{3}{2}}$ a $y=-x^{\frac{3}{2}}$ symetrických podle osy *x* (obr.3.2.2).



Obr. 3.2.2. Graf semikubické paraboly $y^2=x^3$ pro $x\in<0,1>$

Délka bude rovna dvojnásobku délky části nad osou *x*. Použijeme vztah z věty 3.2.1, kde

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ a $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

$$s = 2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;dx = 2\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{16}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right] = \frac{16}{27}\left[\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right].$$

Poznámka

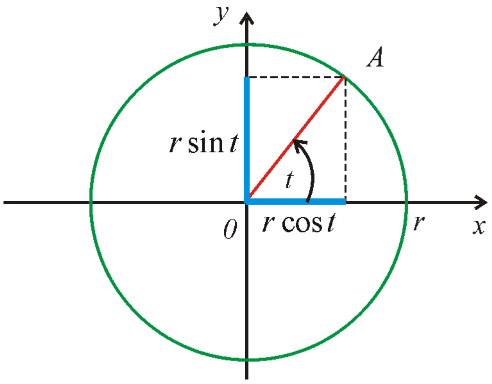
Integrál pro výpočet délky křivky obsahuje odmocninu. Proto se nám i pro jednoduché funkce stane, že neumíme příslušný integrál vypočítat. V takovém případě bude nutno použít nějakou numerickou metodu nebo některý matematický program (např. Derive, Maple, Mathematica).

Příklad 3.2.2. Vypočtěte délku kružnice o poloměru $r > 0$.

Řešení:

Bez újmy na obecnosti uvažujme kružnici se středem v počátku. Rovnice této kružnice je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in < -r, r >$. Vezmeme rovnici horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ a vypočítáme její derivaci $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Problém je v tom, že derivace není definována pro $x = r$ a $x = -r$. Předpoklady věty 3.2.1 nejsou tedy splněny.

Snadno najdeme parametrické rovnice kružnice. Z definice funkcí sinus a kosinus určíme polohu libovolného bodu $A = (x, y)$ ležícího na kružnici (obr. 3.2.3).



Obr. 3.2.3. Odvození parametrických rovnic kružnice

Hledané parametrické rovnice kružnice budou:

$x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in < 0, 2\pi >$.

Měníme-li úhel t od nuly do 2π, oběhne bod A celou kružnici. Pro výpočet délky kružnice použijeme větu 3.2.2.

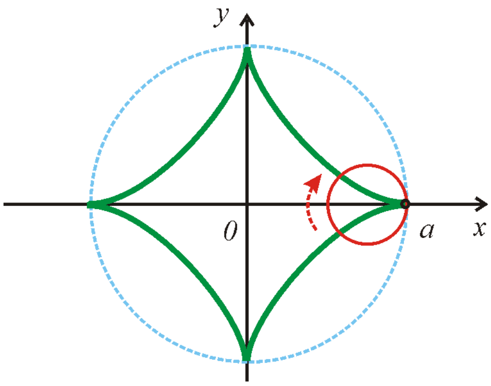
Jelikož $\varphi'(t) = (r\cos t)' = -r\sin t$ a $\psi'(t) = (r\sin t)' = r\cos t$, dostáváme

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{[-r\sin t]^2+[r\cos t]^2}\ dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\ dt=\int_0^{2\pi} r\ dt=r[t]_0^{2\pi}=2\pi r\,.$$

Příklad 3.2.3. Vypočtěte délku asteriody.

Řešení:

Asteroida je zvláštním případem hypocykloidy. Hypocykloida je cyklická křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí (kotálí) po vnitřní straně nehybné kružnice. Asteroidu dostaneme v případě, kdy se kružnice o poloměru $r=\frac{a}{4}$ (na obr. 3.2.4 červená) kotálí po vnitřní straně kružnice poloměru $R=a$.



Obr. 3.2.4. Asteroida

Parametrické rovnice asteroidy jsou

$x=a\cos^3 t\,,\quad y=a\sin^3 t\,,\quad t\in<0,2\pi>.$

Protože asteroida je symetrická podle obou souřadnicových os, stačí, určíme-li délku její jedné čtvrtiny v prvním kvadrantu, tj. pro $t\in<0,\frac{\pi}{2}>$. Tím se také vyhneme problémům se znaménky goniometrických funkcí sinus a kosinus v dalších kvadrantech. Vypočteme derivace parametrických rovnic a dosadíme do vztahu ve větě 3.2.2.

$x'=3a\cos^2 t(-\sin t)\,,$

$y'=3a\sin^2 t\cos t\,,$

$$\frac{s}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left[-3a\cos^2 t\sin t\right]^2+\left[3a\sin^2 t\cos t\right]^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)}dt=$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\ dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\ dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\ dt=$$

$$= \frac{3a}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{3a}{4}(-1-1) = \frac{3a}{2}.$$

Délka celé asteroidy je tedy $s = 4\frac{3a}{2} = 6a$.

Poznámky

1. Při integraci jsme použili známý vztah $\sin 2t = 2\sin t\cos t$.

2. Vztah pro výpočet délky křivky dané parametrickými rovnicemi lze snadno rozšířit i na prostorové křivky. Přibude pouze třetí souřadnice bodu křivky. Křivka bude mít parametrické rovnice

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \zeta(t)$, $t \in <\alpha, \beta>$.

Pro její délku bude (za předpokladu spojitých derivací $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\zeta'(t)$*) platit*

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\zeta'(t)]^2}\, dt .$$

Podrobnější informace naleznete v Matematice III v kapitole Křivkový integrál.

Příklad 3.2.4. Vypočtěte délku elipsy.

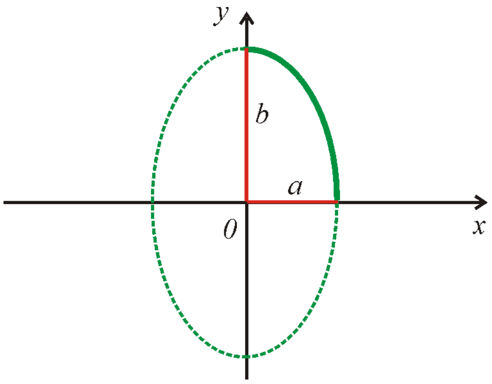
Řešení:

Vzorec pro výpočet obsahu elipsy jste si již odvodili v kapitole 3.1. (Kontrolní otázka.)

Elipsa s poloosami *a*, *b* (předpokládejme $0 < a < b$, obr. 3.2.5) má parametrické rovnice

$x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in <0, 2\pi>$,

pokud vedlejší poloosa leží v ose *x* a hlavní poloosa v ose *y*.



Obr. 3.2.5. Elipsa o poloosách *a*, *b*

Protože elipsa je symetrická podle obou souřadnicových os, stačí, určíme-li délku její jedné čtvrtiny v prvním kvadrantu, tj. pro $t \in < 0, \frac{\pi}{2} >$. Vypočteme derivace parametrických rovnic a dosadíme do vztahu ve větě 3.2.2.

$x' = -a \sin t$,

$y' = b \cos t$,

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[-a \sin t]^2 + [b \cos t]^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 (1 - \sin^2 t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2) \sin^2 t}\, dt = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t}\, dt =$$

$= b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt$, kde jsme označili $\frac{b^2 - a^2}{b^2} = k^2$.

Délka celé elipsy bude $s = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt$.

Problém spočívá v tom, že primitivní funkci nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí. Podívejte se na kapitolu 1.7. Pro konkrétní hodnoty *a* a *b* bude nutno použít vhodnou numerickou metodu některého matematického programu (např. Derive, Maple, Mathematica).

Poznámka

Integrál typu $E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt$ *je označován jako eliptický integrál druhého druhu, neboť je jím vyjádřena délka elipsy.*

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro výpočet délky křivky $y = f(x)$ pro $x \in < a, b >$.
2. Uveďte vztah pro výpočet délky křivky dané parametrickými rovnicemi.

3. Jaká je délka řetězovky $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ pro $x\in<-1,1>$?
4. S řetězovkou se můžeme setkat v architektuře. Tvar této křivky mají samonosné klenby starých staveb stejně jako některé moderní stavby. Zadejte slovo „řetězovka“ do Vašeho vyhledávače (např. Google). Jak vypadá graf této křivky?
5. Jak vypočtete velikost dráhy, kterou urazí bod od $t=0$ do $t=3$ při pohybu po křivce dané parametrickými rovnicemi $x=5t^2$, $y=t^3$?
6. Sestavte integrál pro výpočet délky paraboly $y=x^2$, $-1\le x\le 1$. Navrhněte metodu řešení tohoto integrálu. (Využijte příkladů 2.4.6 a poznámky k příkladu 1.4.8).
7. Sestavte integrál pro výpočet délky kubické paraboly $y=x^3$, $0\le x\le 2$. Zkuste integrál řešit pomocí některého matematického programu (např. Derive, Maple, Mathematica).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte délku křivky

a) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2};\quad 0\le x\le 3$

b) $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2};\quad -1\le x\le 1$

c) $y=\ln x\,;\quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$

d) $y=1-\ln(\cos x)\,;\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$

e) $y^2=4x^3;\quad 0\le x\le 2;\quad y>0$

f) $y=\ln(1-x^2)\,;\quad 0\le x\le\dfrac{1}{2}$

g} $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2};\quad 1\le x\le e$

2. Vypočtěte délku křivky

a) $x=2\cos t,\ y=2\sin t;\quad 0\le t\le\pi$

b) $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t;\quad 0\le t\le 2\pi$

c) $x=t^2,\ y=t-\dfrac{t^3}{3};\quad 0\le t\le\sqrt{3}$

d) $x=(3t-\sin t),\ y=3(1-\cos t)\ ;\quad 0\le t\le 2\pi$

e) $x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t;\quad 0\le t\le 2\pi$

f) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** $\frac{1}{2}\left(e^3-\frac{1}{e^3}\right)$; **b)** 4; **c)** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **d)** $\ln\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right)$; **e)** $\frac{2}{27}\left(\sqrt{19^3}-1\right)$; **f)** $2\ln 3-\frac{1}{2}$; **g)** $\frac{e^2-1}{4}$. **2.** **a)** 2π; **b)** 12; **c)** $2\sqrt{3}$; **d)** 24; **e)** $2\pi^2$; **f)** 48.

Kontrolní test

1. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ pro $1\le x\le e$.

   a) $\frac{1}{4}(e^2-1)$, b) $\frac{1}{4}(e^2+1)$, c) $\frac{1}{2}(e^2+1)$, d) $\frac{1}{2}e^2+1$.

2. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ pro $0\le x\le 1$.

   a) $2\sqrt{2}$, b) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$, c) $4-2\sqrt{2}$, d) $4+\sqrt{2}$.

3. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\frac{2+x^6}{8x^2}$ pro $1\le x\le 2$.

   a) $\frac{33}{16}$, b) $\frac{33}{8}$, c) 2, d) $\frac{27}{16}$.

4. Vypočtěte obvod křivočarého trojúhelníka, jehož strany tvoří oblouky křivek $x^2+y^2=6$ a $5x^3=y^2$.

   a) $\frac{134}{27}+\sqrt{6}(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6})$, b) $\frac{134}{27}+2\sqrt{6}(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6})$,

   c) $\frac{134}{27}+2\sqrt{6}(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6})$, d) $\frac{67}{27}+2\sqrt{6}(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6})$.

5. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\ln(1+e^x)-\ln(e^x-1)$ pro $\ln 2\le x\le \ln 5$.

   a) $4\ln 2+\ln 5$, b) $8\ln 2-2\ln 5$, c) $\ln\frac{5}{16}$, d) $\ln\frac{16}{5}$.

6. Vypočtěte délku oblouku křivky $y = 2\ln\dfrac{4}{4-x^2}$ pro $0 \le x \le 1$.

a) $\ln 9 - 1$, b) $1 + 2\ln 3$, c) $1 - 2\ln 3$, d) $1 + \ln 3$.

7) Vypočtěte délku smyčky křivky $x = t^2$, $y = t - \dfrac{1}{3}t^3$ pro $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$.

a) $2\sqrt{3}$, b) $4\sqrt{3}$, c) $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$, d) $8\sqrt{3}$.

8) Vypočtěte délku jednoho oblouku prosté cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ konst., ($0 \le t \le 2\pi$).

a) $4a$, b) $6a$, c) $12a$, d) $8a$.

9) Vypočtěte délku oblouku křivky $x = \dfrac{1}{3}t^3$, $y = 4 - \dfrac{1}{2}t^2$ mezi průsečíky s osami souřadnic v 1. kvadrantu.

a) $\dfrac{26}{3}$, b) $\dfrac{39}{2}$, c) 9, d) $\dfrac{28}{3}$.

10) Vypočtěte délku oblouku křivky $x = \cos t + \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, $y = \sin t$ pro $\dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

a) $\ln\dfrac{1}{2}$, b) 1, c) $\ln 2$, d) 2.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. c); 5. d); 6. a); 7. b); 8. d); 9. a); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.2 znovu.

Shrnutí lekce

Další možností použití určitého integrálu je výpočet délky křivky. Z Pythagorovy věty odvodíme základní vztah pro výpočet délky křivky $s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Jednoduchou úpravou dostaneme vzorec $s=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left[\,f'(x)\right]^2}\ dx$ pro výpočet délky křivky zadané explicitní funkcí $y=f(x)$, $x\in<a,b>$ a vzorec $s=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt$ pro délku křivky, která je dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in<\alpha,\beta>$. Problém je v tom, že velmi často neumíme integrál, který obsahuje odmocninu, vypočítat pomocí elementárních funkcí. V těchto případech nezbývá než použít nějakou přibližnou metodu. Vztah pro výpočet délky křivky lze rozšířit i na křivky v prostoru. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III, kapitola 4.6.2.