3.3. Objem rotačního tělesa

Cíle

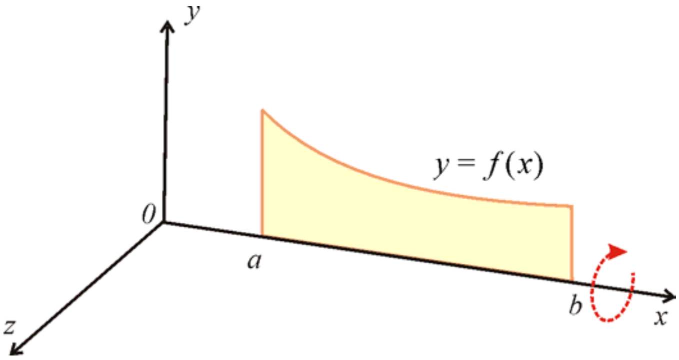
Seznámíte se s další aplikací určitého integrálu – výpočtem objemu rotačního tělesa.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu.

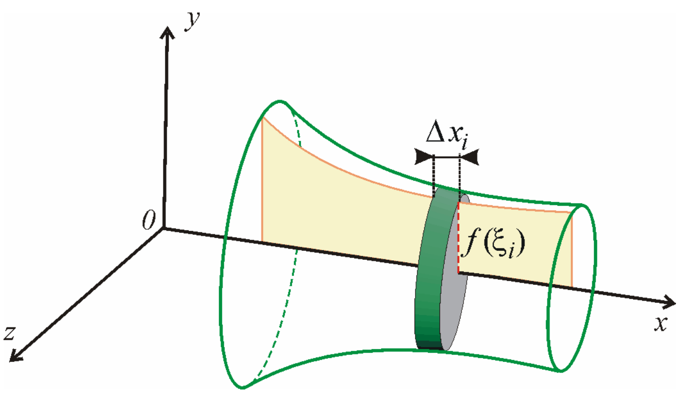
Výklad

Uvažujme křivočarý lichoběžník ohraničený shora grafem nezáporné funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x. Rotací tohoto křivočarého lichoběžníka kolem osy x vznikne rotační těleso. Naším cílem bude vypočítat objem tohoto tělesa.



Obr. 3.3.1. Rotace křivočarého lichoběžníka

Budeme postupovat analogicky jako při zavedení Riemannova určitého integrálu (kap. 2.1). Řezy kolmými na osu x rozdělíme rotační těleso na n tenkých plátků tloušťky Δx (můžete si představit, že těleso krájíte na kráječi jako šunku).



Obr. 3.3.2. Rozřezání tělesa na tenké plátky

Každý plátek můžeme aproximovatválečkem, jehož podstavou je kruh o poloměru $f(\xi_i)$ s výškou Δx_i (obr. 3.3.2). Objem *i* - tého válečku bude $\Delta V_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$.

Objem celého tělesa bude přibližně roven součtu objemů jednotlivých plátků (válečků):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i .$$

Čím bude dělení intervalu $< a,b >$ jemnější, tím méně se bude součet objemů plátků $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$ lišit od objemu daného tělesa. Proto objem definujeme jako limitu tohoto součtu pro $n \to \infty$, když zároveň všechny délky $\Delta x_i \to 0$. Klademe

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Věta 3.3.1.

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $< a,b >$. Pak rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou *x* a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy *x*, má objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Graf nezáporné funkce $y = f(x)$ může být popsán parametrickými rovnicemi

$x = \varphi(t)$,

$y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$.

Je-li funkce $x = \varphi(t)$ ryze monotonní na intervalu $< \alpha, \beta >$, pak k ní existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Rovnici křivky můžeme proto psát ve tvaru $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$. Uvažované rotační těleso bude mít objem $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_a^b \psi^2(\varphi^{-1}(x))dx$.

Odtud substitucí $x = \varphi(t)$, ze které plyne $dx = \varphi'(t)dt$, dostaneme

$$V = \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\left|\varphi'(t)\right|dt .$$

Věta 3.3.2.

Nechť funkce f je dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in\langle\alpha,\beta\rangle$, přičemž funkce $\varphi(t)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ a funkce $\psi(t)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$. Pak pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací elementární oblasti

$\varphi(\alpha)\le x\le\varphi(\beta)$,

$0\le y\le\psi(t)$,

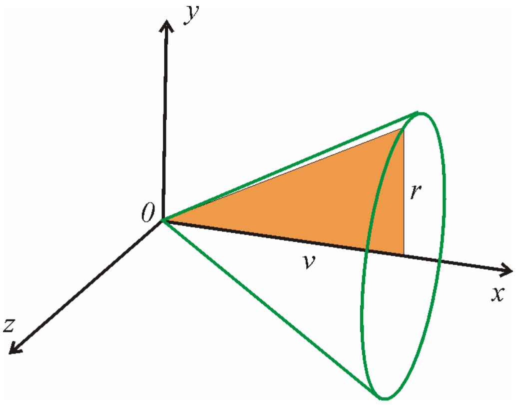
kolem osy x, platí $V=\int_{\alpha}^{\beta}\psi^2(t)\left|\varphi'(t)\right|dt$.

Řešené úlohy

Příklad 3.3.1. Ověřte vzorec pro výpočet objemu kuželu s poloměrem podstavy r a výškou v.

Řešení:

Vrchol kuželu umístíme do počátku souřadné soustavy tak, aby osa kužele splývala s osou x. Plášť kužele vznikne rotací přímky $y=\frac{r}{v}x$ kolem osy x pro $x\in\langle 0,v\rangle$ (obr. 3.3.3).



Obr. 3.3.3. Objem kužele

Dosazením do vztahu z věty 3.3.1 dostaneme

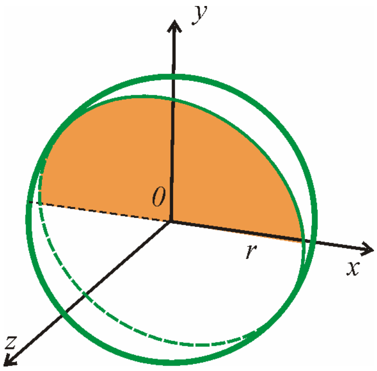
$$V=\pi\int_0^v\left(\frac{r}{v}x\right)^2dx=\pi\frac{r^2}{v^2}\int_0^v x^2dx=\pi\frac{r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v=\frac{1}{3}\pi r^2v,$$

což je vztah, který znáte z geometrie.

Příklad 3.3.2. Odvoďte vztah pro výpočet objemu koule o poloměru $r > 0$.

Řešení:

Rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in \langle -r, r \rangle$. Rotací horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ dostaneme plášť koule.



Obr. 3.3.4. Objem koule

Pro její objem bude platit

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \int_{0}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r =$$

$$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Poznámka

Při výpočtu jsme využili skutečnosti, že funkce $(r^2 - x^2)$ je sudá. Podle věty 2.4.2 bude integrál s mezemi $\langle -r, r \rangle$ roven dvojnásobku integrálu s mezemi $\langle 0, r \rangle$. Je to logické, neboť objem celé koule se rovná dvojnásobku objemu polokoule.

Pro výpočet objemu koule můžeme také využít parametrické rovnice horní půlkružnice:

$x = r \cos t$,

$y = r \sin t$, $\quad t \in \langle 0, \pi \rangle$ (viz příklad 3.2.2).

Jelikož $\varphi'(t) = (r \cos t)' = -r \sin t$, dostaneme po dosazení do vztahu z věty 3.3.2

$$V = \pi \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 t \, r \sin t \, dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} \sin^3 t \, dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t \, dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \cos t = u \\ -\sin t \, dt = du \\ 0 \mapsto 1, \ \pi \mapsto -1 \end{array} \right| =$$

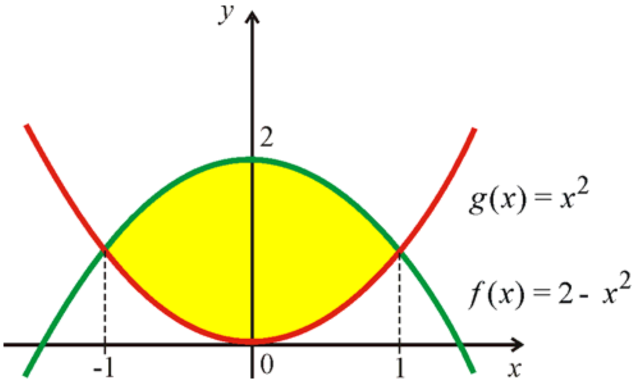
$$= \pi r^3 \int_1^{-1} (-1)(1-u^2)du = \pi r^3 2 \int_0^1 (1-u^2)du = 2\pi r^3 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Příklad 3.3.3. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami

$y = x^2$ a $y = 2 - x^2$ kolem osy x.

Řešení:

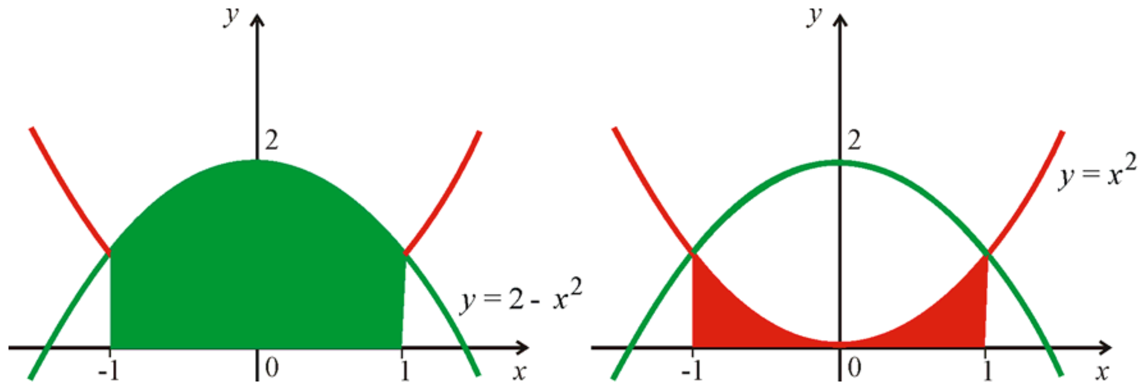
Oblast je ohraničená dvěma parabolami, viz. obr. 3.3.5.



Obr. 3.3.5. Oblast z příkladu 3.3.3

Křivky $f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = x^2$ se protínají v bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$.

Hledaný objem dostaneme, když od objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $f(x) = 2 - x^2$ kolem osy x pro $x \in < -1, 1 >$, odečteme objem tělesa, které vznikne rotací obrazce pod křivkou $g(x) = x^2$ na stejném intervalu (obr. 3.3.6).



$$V \quad = \quad \pi \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2\right)^2 dx \qquad - \qquad \pi \int_{-1}^{1} \left(x^2\right)^2 dx$$

Obr. 3.3.6. Odečtení objemů dvou těles

Pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $y = x^2$ a $y = 2 - x^2$ kolem osy x, dostaneme:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx-\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}(x^2)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left[(2-x^2)^2-(x^2)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left[(4-4x^2+x^4)-x^4\right]dx=\pi\int_{-1}^{1}(4-4x^2)\,dx=4\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=8\pi\int_0^1(1-x^2)dx=$$

$$=8\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=8\pi\left[1-\frac{1}{3}\right]=\frac{16}{3}\pi\,.$$

Poznámka

Upozornění!

Pro výpočet objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $g(x)\le f(x)$ *kolem osy x pro* $x\in\langle a,b\rangle$, *použijeme vztah*

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx-\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx\,.$$

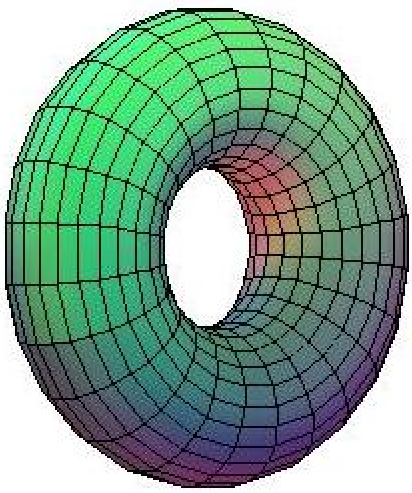
Často se setkáváme s chybou, kdy je umocněn rozdíl funkcí.

Vztah $V=\pi\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx$ *je evidentně nesprávný!*

Příklad 3.3.4. Vypočtěte objem rotačního anuloidu.

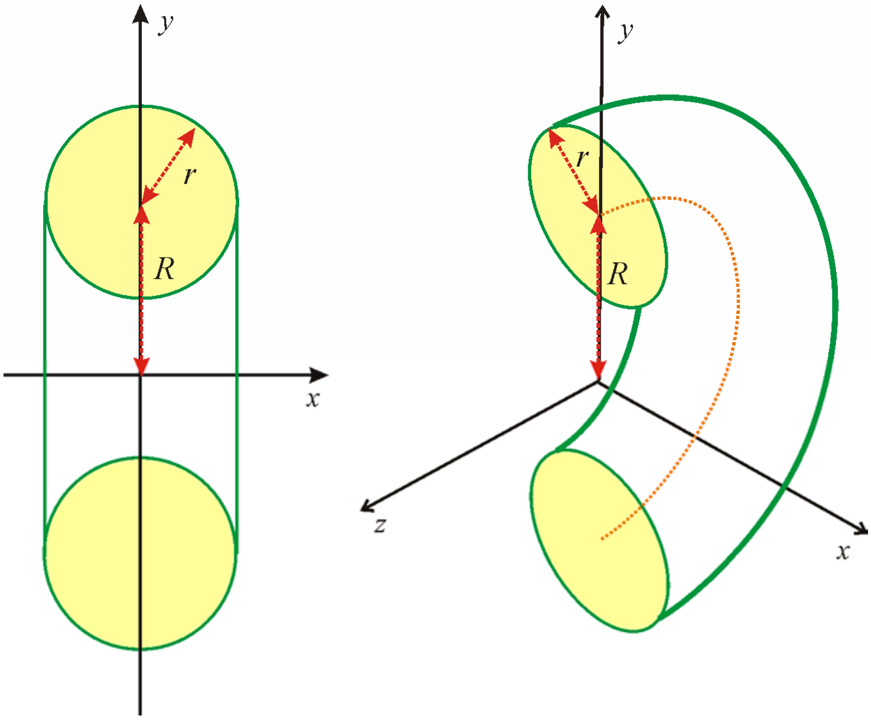
Řešení:

Anuloid (torus), viz obr. 3.3.7, je těleso vytvořené rotací kruhu kolem přímky ležící v rovině tohoto kruhu a neprotínající kruh.



Obr. 3.3.7. Anuloid

Střed kruhu o poloměru r umístíme na osu y do vzdálenosti R od počátku, kde $r < R$ (obr. 3.3.8). Tento kruh necháme rotovat kolem osy x.



Obr. 3.3.8. Vznik anuloidu rotací kruhu kolem osy x

Hranici rotujícího kruhu tvoří kružnice, která má rovnici

$x^2 + (y-R)^2 = r^2$. Odtud $y - R = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

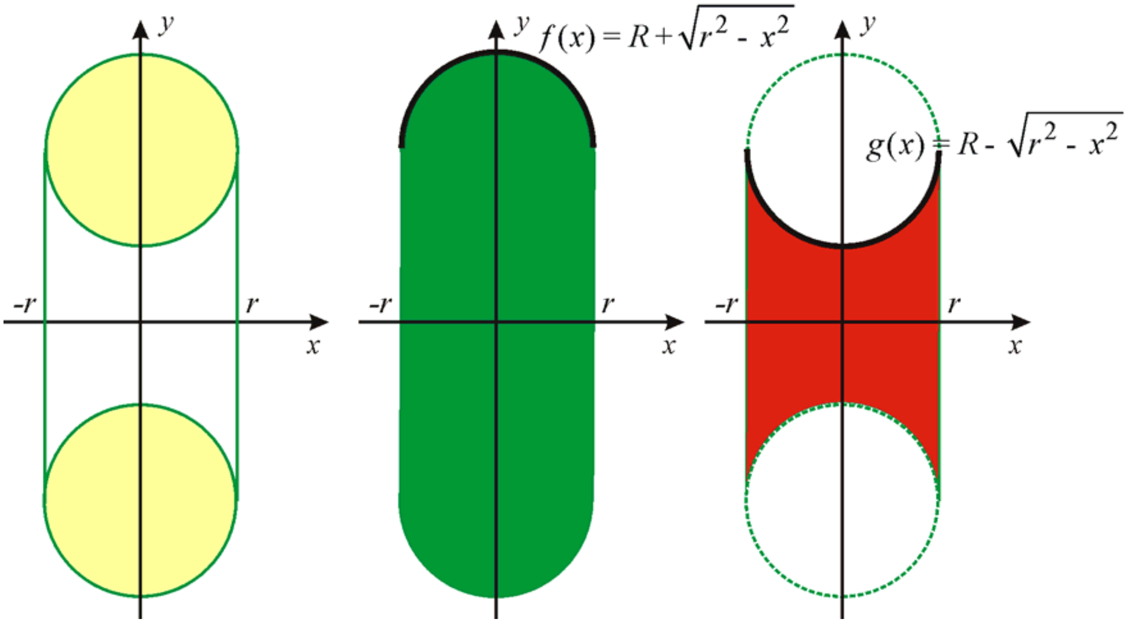
Podobně jako v předcházejícím příkladu je hranice rotující oblasti tvořena dvěma křivkami $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ a $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ pro $x \in \langle -r, r \rangle$. Objem anuloidu dostaneme jako rozdíl objemů dvou těles (obr. 3.3.9):

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx == \pi \int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 \right] dx =$$

$$= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 8\pi R \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = r \sin u \\ dx = r \cos u\, du \\ 0 \mapsto 0,\ \mathrm{r} \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 8\pi R \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u}\ r \cos u\, du =$$

$$= 8\pi R r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 u}\ \cos u\, du = 8\pi R r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = 8\pi R r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2} du =$$

$$= 4\pi Rr^2\left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi Rr^2\,\frac{\pi}{2} = 2\pi^2 Rr^2 .$$



$$V \quad = \quad \pi\int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx \quad - \quad \pi\int_{-r}^{r} g^2(x)\,dx$$

Obr. 3.3.9. Výpočet objemu anuloidu

Poznámka

Při výpočtu integrálu byla použita substituční metoda. Podobné integrály jsme již několikrát počítali - viz příklady 1.4.7 nebo 2.4.5.

Příklad 3.3.5. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem cykloidy kolem osy x.

Řešení:

S cykloidou jsme se podrobněji seznámili v příkladu 3.1.5. Cykloida (obr. 3.1.9) má parametrické rovnice:

$x = a(t - \sin t)$,

$y = a(1 - \cos t)$, $\quad a > 0, \quad t \in \boldsymbol{R}$.

První oblouk cykloidy dostaneme pro parametr $t \in < 0, 2\pi >$.

Protože $dx = a(1 - \cos t)dt$, dostaneme z věty 3.3.2:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\,dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt =$$

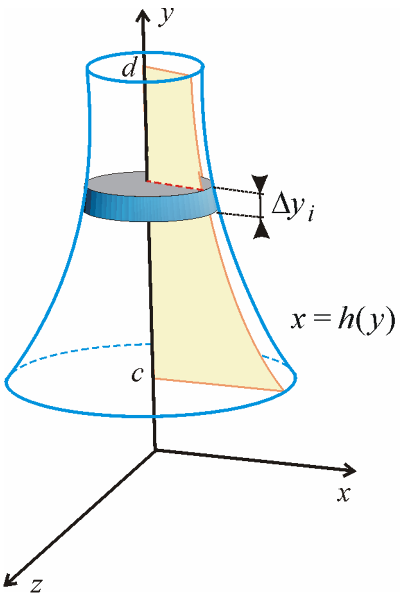
$$= \pi a^3 \left([t-3\sin t]_0^{2\pi} + 3\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt - \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)\cos t\,dt \right) = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ \sin t = u \\ \cos t\,dt = du \\ 0 \mapsto 0,\ 2\pi \mapsto 0 \end{array} \right| =$$

$$= \pi a^3 \left(2\pi + \frac{3}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^0 (1-u^2)\,du \right) = \pi a^3(2\pi+3\pi-0) = 5\pi^2 a^3 .$$

Výklad

V předcházející části byl plášť rotačního tělesa vytvořen rotací spojité křivky $y = f(x)$, kolem osy x.

Zcela analogicky můžeme určit objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikl rotací spojité křivky $x = h(y)$ pro $y \in \langle c, d \rangle$ kolem osy y (obr. 3.3.10).



Obr. 3.3.10. Rotace křivočarého lichoběžníka kolem osy y

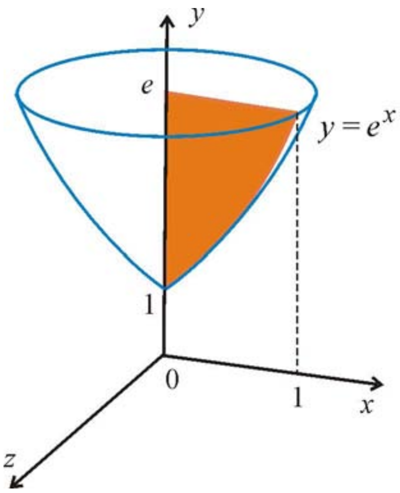
Objem vypočteme ze vztahu:

$$V = \pi \int_c^d h^2(y)\,dy .$$

Příklad 3.3.6. Vypočtěte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = e^x$ pro $x \in <0,1>$ kolem osy y.

Řešení:

Funkce $y = e^x$ je prostá na definičním oboru a inverzní funkce k ní bude $x = \ln y$, $y > 0$. Pro $x \in <0,1>$ bude $y \in <1, e>$ (obr. 3.3.11).



Obr. 3.3.11. Rotace křivky $y = e^x$ kolem osy y

Objem rotačního tělesa bude:

$$V = \pi \int_1^e \ln^2 y \, dy = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln^2 y \\ u = y & v' = (2\ln y)\dfrac{1}{y} \end{vmatrix} = \pi \left(\left[y \ln^2 y \right]_1^e - 2\int_1^e \ln y \, dy \right) =$$

$$= \pi \left(\left[e - 0 \right] - 2\int_1^e \ln y \, dy \right) = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln y \\ u = y & v' = \dfrac{1}{y} \end{vmatrix} = \pi \left(e - 2\left[y \ln y \right]_1^e + 2\int_1^e 1 \, dy \right) =$$

$$= \pi \left(e - 2e + 2\left[y \right]_1^e \right) = \pi \left(e - 2e + 2e - 2 \right) = \pi \left(e - 2 \right).$$

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro výpočet objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x.
2. Uveďte vztah pro výpočet objemu tělesa při rotaci kolem osy x, je-li rotující křivka dána parametrickými rovnicemi.

3. Jak bude vypadat vztah pro výpočet objemu tělesa, jestliže křivka daná parametrickými rovnicemi bude rotovat kolem osy y?
4. Jak vypočtete objem tělesa, jehož plášť vytvoří křivka $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, při rotaci kolem osy x? Jaký bude objem při rotaci kolem osy y?
5. Jak vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří křivka $y = \sqrt{1+x^2}$, $0 \le x \le 1$, při rotaci kolem osy x. Jaké těleso vznikne?
6. Jak vypočtete objem rotačního elipsoidu, jehož plášť vytvoří elipsa $2x^2 + y^2 = 4$ při rotaci kolem osy x (kolem osy y)?

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadanými křivkami kolem osy x:

a) $y = x^2; \quad x = y^2$ b) $y = x^2; \quad x = y^3$

c) $y = x^2; \quad y = 1 - x^2$ d) $y = x; \quad y = \frac{1}{x}; \quad x = 2$

e) $y = 2 - 2x^2; \quad y = 1 - x^2$ f) $y = \operatorname{tg} x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \frac{\pi}{4}$

g) $y = \arcsin x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1$ h) $xy = 4; \quad y = 0; \quad x = 1; \quad x = 4$

i) $y = 2^x; \quad 3x - 4y + 5 = 0$ j) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 3}}; \quad y = 0; \quad |x| = 1$

k) $x^2 + y^2 = 4; \quad x + y = 2$ l) $y = \sin x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \pi$

2. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadanými křivkami kolem osy y:

a) $y = x^2; \quad x = y^2$ b) $y^2 + x - 4 = 0; \quad x = 0$

c) $y = \sin x; \quad y = \frac{1}{2}; \quad x = 0$ d) $y = e^{-x}; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1$

e) $y^2 = x^3; \quad y = 0; \quad x = 1$ f) $y = \frac{x^2}{2}; \quad y = \frac{|x|}{2}$

g) $4y = x^2; \quad 4x = y^2$ h) $y = \ln x; \quad y = 0; \quad y = 1; \quad x = 0$

3. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného osou x a danou, parametricky popsanou, křivkou při rotaci kolem osy x:

a) $x = t^2,\ y = t - \dfrac{t^3}{3};\quad 0 \le t \le \sqrt{3}$

b) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t;\quad 0 \le t \le 2\pi$

c) $x = \sin^3 t,\ y = \cos^3 t;\quad 0 \le t \le \pi$

d) $x = 3\sin t,\ y = 3\cos t;\quad 0 \le t \le \pi$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\dfrac{3\pi}{10}$; **b)** $\dfrac{2\pi}{5}$; **c)** $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$; **d)** $\dfrac{11\pi}{6}$; **e)** $\dfrac{16\pi}{5}$; **f)** $\pi - \dfrac{\pi^2}{4}$; **g)** $\dfrac{\pi^3}{4} - 2\pi$; **h)** 12π; **i)** $\dfrac{\pi}{2}\left(7 - \dfrac{15}{4\ln 2}\right)$; **j)** $\pi(9 - 8\ln 2)$; **k)** $\dfrac{8\pi}{3}$; **l)** $\dfrac{\pi^2}{2}$. **2. a)** $\dfrac{3\pi}{10}$; **b)** $\dfrac{512\pi}{15}$; **c)** $\dfrac{\pi^3}{72} + \dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{6} - \pi$; **d)** $2\pi\left(1 - \dfrac{2}{e}\right)$; **e)** $\dfrac{4\pi}{7}$; **f)** $\dfrac{\pi}{12}$; **g)** $\dfrac{96\pi}{5}$; **h)** $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2 + 1\right)$. **3. a)** $\dfrac{3\pi}{4}$; **b)** 5π; **c)** $\dfrac{32\pi}{105}$; **d)** 36π.

Kontrolní test

1. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $y = \operatorname{tg} x$ pro $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ rotací kolem osy x.

   a) $\pi(4-\pi)$, b) $\pi(1-\pi)/4$, c) $\pi(4-\pi)/4$, d) $\pi(1-\pi)$.

2. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $xy = 6$ pro $1 \le x \le 10$ otáčením kolem osy x.

   a) 36π, b) $32,4\pi$, c) $39,6\pi$, d) $5,4\pi$.

3. Vypočtěte objem tělesa, které vytvoří rovinný obrazec ohraničený osami x, y a obloukem křivky $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ otáčením kolem osy x.

   a) $\frac{5}{12}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$, b) $\frac{5}{12}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$, c) $\frac{5}{12}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$, d) $\frac{5}{12}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$.

4. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk řetězovky $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ pro $-2 \le x \le 2$.

   a) $\frac{\pi}{4}(e^4 + 8 + e^{-4})$, b) $\frac{\pi}{4}(e^4 + 8 - e^{-4})$,

   c) $\frac{\pi}{2}(e^4 - 8 + e^{-4})$, d) $\frac{\pi}{2}(e^4 + 8 - e^{-4})$.

5. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničené křivkami $y = 2(\frac{x}{5})^2$ a $y = 2\left|\frac{x}{5}\right|$ kolem osy x.

   a) $\frac{8}{3}\pi$, b) $\frac{8}{5}\pi$, c) $\frac{16}{5}\pi$, d) $\frac{16}{3}\pi$.

6. Vypočtěte objem úseče koule o poloměru r, je-li výška úseče $v < r$.

   a) $\pi v^2(r - \frac{1}{3}v)$, b) $\pi v^2(2r - \frac{1}{3}v)$,

   c) $\pi v^2(r - \frac{2}{3}v)$, d) $2\pi v^2(r - \frac{1}{3}v)$.

7. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ohraničené křivkami $x^2 - y^2 = 1$ a $x^2 + 4y^2 = 16$ v polorovině $x \geq 0$ kolem osy x.

a) $\frac{16}{3}\pi$, b) $\frac{20}{3}\pi$, c) $\frac{14}{3}\pi$, d) $\frac{10}{3}\pi$.

8. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ohraničené křivkami $x^2 - y^2 = 1$ a $x^2 + 4y^2 = 16$ v polorovině $x \geq 0$ kolem osy y.

a) $10\pi\sqrt{3}$, b) $24\pi\sqrt{3}$, c) $4\pi\sqrt{3}$, d) $20\pi\sqrt{3}$.

9. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $x = 4\cos t,\ y = 3\sin t$ pro $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ otáčením kolem osy x.

a) $3\pi(\sqrt{2}+8)$, b) $3\pi(5\sqrt{2}+8)$ c) $3\pi(5\sqrt{2}-8)$, d) $3\pi(-5\sqrt{2}+8)$.

10. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $x = \cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2},\ y = \sin t$ pro $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ otáčením kolem osy x.

a) $\frac{\pi}{3}$, b) $\frac{\pi}{6}$, c) $\frac{\pi}{2}$, d) $\frac{\pi}{4}$.

Výsledky testu

1. c); 2. b); 3. a); 4. b); 5. d); 6. a); 7. c); 8. d); 9. d); 10. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.3 znovu.

Shrnutí lekce

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka $0 \leq y \leq f(x)$ pro $a \leq x \leq b$ kolem osy x, vypočteme ze vztahu $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$. Analogicky pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka $0 \leq x \leq h(y)$ pro $c \leq y \leq d$

kolem osy y, užijeme vztah $V = \pi \int_c^d h^2(y)\, dy$. Jelikož se v integrandu vyskytuje druhá mocnina, nečiní obvykle výpočet příslušného integrálu větší problémy.

Objemy obecnějších těles, která nejsou rotační, lze vypočítat pomocí dvojných nebo trojných integrálů. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III.