3.4. Obsah pláště rotačního tělesa

Cíle

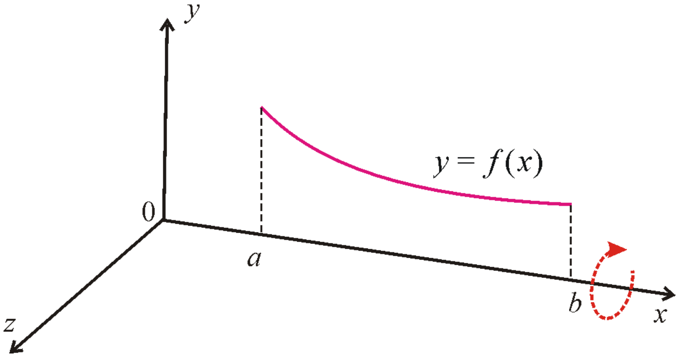
Seznámíte se s další aplikací určitého integrálu – výpočtem obsahu pláště rotačního tělesa.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu. Budeme také používat vztahy pro výpočet délky oblouku křivky (kapitola 3.2).

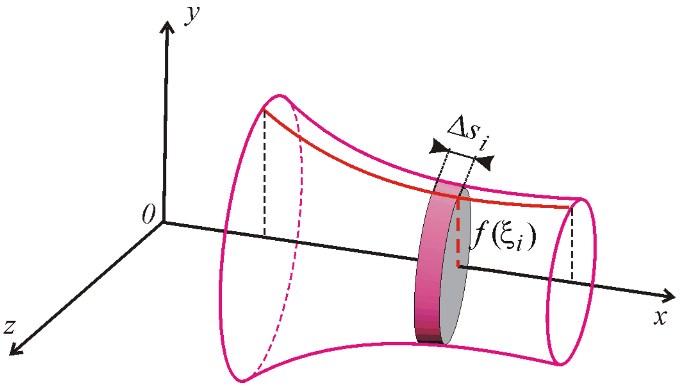
Výklad

Uvažujme nezápornou funkci $f(x)$ na intervalu $< a, b >$. Naším úkolem bude vypočítat obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu této funkce kolem osy x (obr.3.4.1).



Obr. 3.4.1. Rotace křivky kolem osy x

Budeme postupovat analogicky jako při výpočtu objemu rotačního tělesa (kap. 3.3). Řezy kolmými na osu x rozdělíme rotační těleso na n tenkých plátků. (Opět si můžete představit, že těleso krájíte na kráječi jako šunku. Tentokrát nás zajímá slupka jednotlivých plátků.)



Obr. 3.4.2. Rozřezání tělesa na tenké plátky

Každý plátek můžeme aproximovat komolým kuželem, jehož plášť vytvoří úsečka Δs_i rotující kolem osy x (obr. 3.4.2). Plášť i - tého komolého kuželu bude $\Delta S_i \approx 2\pi f(\xi_i)\Delta s_i$.

Obsah pláště celého tělesa bude přibližně roven součtu obsahů plášťů jednotlivých plátků (komolých kuželů):

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\Delta s_i \ .$$

Čím bude dělení intervalu $< a,b >$ jemnější, tím méně se bude součet obsahů plášťů plátků $\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ lišit od obsahu pláště daného tělesa. Proto obsah pláště definujeme jako limitu tohoto součtu pro $n \to \infty$, když zároveň všechny délky $\Delta s_i \to 0$. Klademe

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\, ds \ .$$

Z kapitoly 3.2 víme, že pro element délky křivky platí

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + [\, f'(x)]^2}\, dx$. Dosazením za ds dostaneme:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [\, f'(x)]^2}\, dx \ .$$

Věta 3.4.1.

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $< a,b >$ a má zde spojitou derivaci $f'(x)$. Pak pro obsah rotační plochy vzniklé rotací oblouku křivky $y = f(x)$ kolem osy x platí

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [\, f'(x)]^2}\, dx \ .$$

Poznámka

Vzorec z věty 3.4.1 můžeme zapsat ve tvaru

$S = 2\pi \int_a^b y\, ds = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. *Tento vzorec můžeme snadno použít i v případě, že je uvažovaná křivka dána parametrickými rovnicemi.*

Je-li rotující křivka popsána parametrickými rovnicemi

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$,

pak pro ds platí (věta 3.2.2) $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$.

Pro výpočet obsahu plochy, která byla vytvořena rotací uvedené křivky kolem osy *x*, dostáváme:

$$S = 2\pi \int_a^b y\, ds = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt .$$

Věta 3.4.2.

Nechť je funkce *f* dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $< \alpha, \beta >$ a funkce $\psi(t)$ je nezáporná na intervalu $< \alpha, \beta >$. Pak pro obsah plochy, která vznikne rotací grafu funkce f kolem osy *x* platí

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt .$$

Řešené úlohy

Příklad 3.4.1. Vypočtěte obsah pláště rotačního kužele, který je vytvořen úsečkou $y = x$ pro $x \in < 0,3 >$ rotující kolem osy *x*.

Řešení:

V příkladu 3.3.1 jsme již počítali objem kuželu (obr. 3.3.3).

Pro danou úsečku $y = x$ pro $x \in < 0,3 >$ dostáváme

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+1^2}\,dx = \sqrt{2}dx\,.$$

Obsah pláště rotačního kužele bude

$$S = 2\pi\int_0^3 y\,ds = 2\pi\int_0^3 x\sqrt{2}\,dx = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9\pi\sqrt{2}\,.$$

Příklad 3.4.2. Odvoďte vztah pro výpočet povrchu koule o poloměru $r > 0$.

Řešení:

Rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in < -r, r >$. Rotací horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ dostaneme plášť koule (viz obr. 3.3.4).

Před dalším výpočtem si upravíme výraz $1+(y')^2$.

$$y' = \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,,$$

$$1+(y')^2 = 1+\frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}\,.$$

Pro povrch koule bude z věty 3.4.1 platit

$$S = 2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}dx = 2\pi r\int_{-r}^{r}dx = 2\pi r\left[x\right]_{-r}^{r} = 4\pi r^2\,.$$

Dostali jsme známý vztah pro povrch koule.

Poznámka

Musíme přiznat, že předcházející výpočet nebyl zcela korektní, protože derivace funkce $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ *není definována pro* $x = \pm r$. *Nejsou tedy splněny předpoklady věty 3.4.1.*

Mohli bychom to napravit tak, že bychom počítali integrál na intervalu $< -r+\varepsilon, r-\varepsilon >$, *kde* $\varepsilon > 0$ *je malé číslo (vlastně bychom z koule odřezali dva malé vrchlíky). Plášť koule bez vrchlíků by byl* $S = 4\pi r(r-\varepsilon)$. *Pro* $\varepsilon \to 0$ *dostaneme očekávaný výsledek.*

Pro výpočet povrchu koule můžeme také využít parametrické rovnice horní půlkružnice:

$x = r\cos t$,

$y = r\sin t$, $\quad t \in < 0, \pi >$ (viz příklad 3.2.2).

Po dosazení do vztahu z věty 3.4.2 dostaneme

$$S = 2\pi\int_0^{\pi}\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt = 2\pi\int_0^{\pi} r\sin t\sqrt{[-r\sin t]^2+[r\cos t]^2}\,dt =$$

$$= 2\pi r^2\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{[\sin t]^2+[\cos t]^2}\,dt = 2\pi r^2\int_0^{\pi}\sin t\;dt = 2\pi r^2[-\cos t]_0^{\pi} = 4\pi r^2 .$$

Příklad 3.4.3. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotaci asteroidy kolem osy *x*.

Řešení:

Postup výpočtu bude analogický jako v příkladu 3.2.3. Vznik asteroidy je objasněn na obrázku 3.2.4.

Parametrické rovnice asteroidy jsou

$x = a\cos^3 t$,

$y = a\sin^3 t$, $a > 0$.

Vzhledem k symetrii asteroidy se můžeme omezit na $t \in < 0, \frac{\pi}{2} >$. Rotací dostaneme polovinu rotační plochy. Pro její obsah platí (srovnej s příkladem 3.2.3):

$$\frac{S}{2} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{\left[-3a\cos^2 t\sin t\right]^2+\left[3a\sin^2 t\cos t\right]^2}\,dt = 2\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t(3a\sin t\cos t)\;dt =$$

$$= 6\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\;dt = 6\pi a^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi a^2}{5} .$$

Obsah celé rotační plochy bude dvojnásobný:

$$S = 2\frac{6\pi a^2}{5} = \frac{12\pi a^2}{5} .$$

Příklad 3.4.4. Vypočtěte povrch rotačního anuloidu.

Řešení:

S anuloidem jsme se podrobně seznámili v příkladu 3.3.4. Podívejte se na obrázky 3.3.7 a 3.3.8. Povrch anuloidu je složený ze dvou ploch.

První vznikne rotací křivky $f(x)=R+\sqrt{r^2-x^2}$ (obr. 3.3.9), druhá plocha vznikne rotací křivky $g(x)=R-\sqrt{r^2-x^2}$ pro $x\in<-r,r>$ kolem osy *x*.

Je zřejmé, že $f'(x)=-g'(x)$ a proto $1+[f'(x)]^2=1+[g'(x)]^2$.

Povrch anuloidu bude

$$S=S_1+S_2=2\pi\int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx+2\pi\int_{-r}^{r} g(x)\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}[f(x)+g(x)]\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}2R\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=$$

$$=4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=4\pi R\pi r=4\pi^2 rR\,.$$

Využili jsme toho, že $\int_{-r}^{r}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\pi r$, neboť hodnota integrálu je rovna délce poloviny kružnice o poloměru *r*.

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro výpočet obsahu rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y=f(x)$ kolem osy *x*.
2. Uveďte vztah pro výpočet obsahu rotační plochy, je-li rotující křivka dána parametrickými rovnicemi a rotuje kolem osy *x*.
3. Jak bude vypadat vztah pro výpočet obsahu rotační plochy, jestliže křivka daná parametrickými rovnicemi bude rotovat kolem osy *y*?
4. Odvoďte vztah pro výpočet obsahu pláště rotačního kužele s poloměrem podstavy *r* a výškou *v*. (Viz příklad 3.3.1.)
5. Jak vypočtete obsah pláště rotačního komolého kužele, který vznikne rotací křivky $y=kx$, $0<a\le x\le b$ kolem osy *x*?
6. Jak vypočtete obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky dané parametrickými rovnicemi $x=2t+1$, $y=4-t$ pro $t\in<0,4>$ kolem osy *x*? Jaké těleso vznikne?

7. Sestavte integrál pro výpočet obsahu rotační plochy, která vznikne rotací paraboly $y = x^2$ pro $0 \le x \le 2$ kolem osy x (kolem osy y). Zkuste integrál řešit pomocí některého matematického programu (např. Derive, Maple, Mathematica).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy x:

a) $y = x^3; \quad -\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$

b) $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}; \quad 0 \le x \le 2$

c) $y^2 = 4x; \quad 0 \le x \le 3$

d) $y = \operatorname{tg} x; \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

e) $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right); \quad 0 \le x \le 4$

f) $y = \sin x; \quad 0 \le x \le \pi$

2. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy x:

a) $x = 2\cos t, \; y = 2\sin t; \quad 0 \le t \le \pi$

b) $x = 3\cos^3 t, \; y = 3\sin^3 t; \quad 0 \le t \le \pi$

c) $x = 4(t - \sin t), \; y = 4(1 - \cos t); \quad 0 \le t \le 2\pi$

d) $x = \sin 2t, \; y = 2\sin^2 t; \quad 0 \le t \le \pi$

e) $x = e^t \sin t, \; y = e^t \cos t; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

f) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 9$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{196\pi}{729}$; **b)** $\pi\left(4+e^2-\frac{1}{e^2}\right)$; **c)** $\frac{56\pi}{3}$; **d)** $\frac{\pi}{2}\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$;

e) $4\pi\left(4+e^2-\frac{1}{e^2}\right)$; **f)** $2\pi\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)$. **2. a)** 16π; **b)** $\frac{108\pi}{5}$; **c)** $\frac{512\pi}{3}$; **d)** $4\pi^2$;

e) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$; **f)** $\frac{8748\pi}{5}$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte povrch vrchlíku kulové plochy o poloměru r, jehož výška je $v < r$.

   a) $2\pi rv$, b) $2\pi r(2r+v)$,

   c) πrv, d) $2\pi r(r+v)$.

2. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk paraboly $y=2\sqrt{x}$ pro $3\le x\le 8$ při otáčení kolem osy x.

   a) $\frac{76}{3}\pi$, b) 36π, c) $\frac{152}{3}\pi$, d) 152π.

3. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky $y=(1-x)\sqrt{\frac{x}{3}}$ pro $\frac{1}{2}\le x\le 1$ při otáčení kolem osy x.

   a) $\frac{13}{24}\pi$, b) $\frac{\pi}{3}$, c) $\frac{\pi}{24}$, d) $\frac{\pi}{8}$.

4. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk řetězovky $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$, $a>0$ konst. pro $0\le x\le a$ rotací kolem osy x.

   a) $\frac{\pi a^2}{4}(e^2+e^{-2}+4)$, b) $\pi a^2(1+e^2-e^{-2})$,

   c) $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$, d) $\frac{\pi a^2}{4}(4-e^2+e^{-2})$.

5. Vypočtěte povrch tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti dané nerovnostmi $y \geq 0$,

$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad x + y \leq r, \quad x \geq -\frac{r}{2}$, $r > 0$ konst. kolem osy *x*.

a) $\pi r^2 (1+\sqrt{2})$, b) $\pi r^2 (\frac{7}{4}+\sqrt{2})$, c) $\pi r^2 (\frac{5}{4}+\sqrt{2})$, d) $\pi r^2 (\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2})$.

6. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk paraboly $y = 4 - x^2$

pro $-2 \leq x \leq 2$ při otáčení kolem osy *y*.

a) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}+1)$, b) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$, c) $\frac{\pi}{3}(17\sqrt{17}-1)$, d) $\frac{\pi}{3}(17\sqrt{17}+1)$.

7. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky $x = t^2,\ y = \frac{t^3}{3} - t$

pro $-\sqrt{3} \leq t \leq 0$ rotací kolem osy *x*.

a) 3π, b) 9π, c) 6π, d) 12π.

8. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky $x = \sin 2t,\ y = 2\sin^2 t$

pro $0 \leq t \leq \pi$.

a) $8\pi^2$, b) $16\pi^2$, c) $12\pi^2$, d) $4\pi^2$.

9. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky traktrix

$x = 2\cos t + 2\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2},\ \ y = 2\sin t$ pro $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ při otáčení kolem osy *x*.

a) 4π, b) 8π, c) $8\pi(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$, d) 2π.

10. Vypočtěte povrch tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $x = 4\cos t + 4,\ \ y = 4\sin t$ pro

$0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ otáčením kolem osy *x*.

a) 48π, b) 36π, c) 60π, d) 54π.

Výsledky testu

1. a); 2. c); 3. d); 4. c); 5. b); 6. b); 7. a); 8. d); 9. a); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.4 znovu.

Shrnutí lekce

Obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = f(x)$ pro $a \le x \le b$ kolem osy x, vypočteme podle vztahu $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$. Je-li křivka rotující kolem osy x popsána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, užijeme pro výpočet obsahu rotační plochy vztah $S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt$. Stejně jako u integrálů pro výpočet délky křivky se nám stane, že neumíme integrál, který obsahuje odmocninu, vyjádřit pomocí elementárních funkcí. V těchto případech nezbývá než použít nějakou přibližnou metodu.

Obsahy obecnějších ploch, které nejsou rotační, lze vypočítat pomocí dvojných integrálů. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III.