6.3. Globální extrémy

Výklad

Globální extrémy mají stejný význam jako u funkcí jedné proměnné. Hledáme je buď na celém definičním oboru dané funkce, nebo na předem zadané podmnožině definičního oboru.

Definice 6.3.1.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má na uzavřeném definičním oboru D_f **globální maximum** (absolutní maximum) v bodě $A \in \mathrm{D}_f$, jestliže $\forall X \in \mathrm{D}_f$ platí $f(X) \leq f(A)$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má na uzavřeném definičním oboru D_f **globální minimum** (absolutní minimum) v bodě $A \in \mathrm{D}_f$, jestliže $\forall X \in \mathrm{D}_f$ platí $f(X) \geq f(A)$.

Je-li $f(X) < f(A)$ resp. $f(X) > f(A)$, hovoříme o **ostrém globálním maximu** resp. **ostrém globálním minimu**.

Poznámka

*Množina D_f se nazývá **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body. **Hraničním bodem** množiny D_f rozumíme takový bod, jehož každé okolí obsahuje body X ležící v D_f, tj. $X \in \mathrm{D}_f$, a současně obsahuje body Y neležící v D_f, tj. $Y \notin \mathrm{D}_f$. Také množina $\mathbb{R}^n$ je množina uzavřená. Ovšem hranice této množiny je prázdná množina, $\emptyset$.*

Poznámka

Na rozdíl od lokálních extrému, které se hledají na okolích bodů, hledáme globální extrémy na celé množině D_f.

Uvažujme spojitou a alespoň dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci (tj. existují spojité parciální derivace alespoň až do druhého řádu) $z = f(x, y)$, definovanou na uzavřené množině D_f. Nechť hranice této množiny je křivka o rovnici $g(x, y) = 0$. Globální extrémy funkce f na množině D_f budeme určovat takto:

1. Určíme lokální extrémy funkce f na množině D_f, ze které vyloučíme hranici.

2. Určíme lokální extrémy této funkce vázané podmínkou $g(x, y) = 0$.

3. Porovnáme funkční hodnoty všech extrémů. Extrém s největší funkční hodnotou bude **globálním maximem**, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude **globálním minimem**.

Poznámka
Je-li hranice tvořena konečným počtem křivek, vyšetřujeme vázané extrémy na jednotlivých křivkách. V tomto případě ovšem musíme uvažovat i vrcholy hraničních křivek při konečném porovnávání funkčních hodnot.

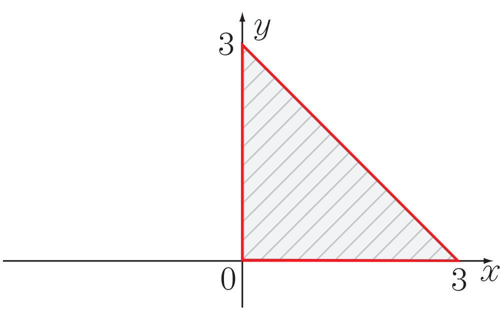
Poznámka
Analogicky se postupuje i v případě funkcí tří a více proměnných.

Řešené úlohy

Příklad 6.3.1. Nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y)$,

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$$

je-li $\mathrm{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x + 3\}$.



Obr. 6.3.1

Řešení: Definičním oborem funkce f je trojúhelník s vrcholy $A = [0,0]$, $B = [3,0]$, a $C = [0,3]$ plus všechny body, které v něm leží, Obr. 6.3.1.

1. Nejdříve budeme hledat lokální extrémy funkce f v bodech ležících uvnitř trojúhelníku ABC.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 4x = 0.$$

Řešením této soustavy je bod $A_1 = [1,1]$, tento bod ovšem leží uvnitř trojúhelníku ABC, leží tedy v množině D_f a má smysl hledat v tomto bodě lokální extrém funkce f.

Sestavíme matici Q a dosadíme do matice Q bod A_1,

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Determinant $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -24 < 0$, extrém v bodě A_1 neexistuje.

2. Hraniční křivka se skládá ze tří úseček ležících na přímkách. Jedná se o přímku $x = 0$ pro $y \in (0,3)$, $y = 0$ pro $x \in (0,3)$ a $y = -x + 3$ pro $x \in (0,3)$. Prověříme existenci vázaných extrémů funkce f na jednotlivých úsečkách.

a) Nechť $g(x,y) = x = 0$ pro $y \in (0,3)$. Pak

$$f(y) = -2y^2 - 1$$
$$\frac{df}{dy} = -4y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Dosadili jsme $x = 0$ do funkce f a získali jsme tak funkci pouze jedné proměnné y. Funkci jsme derivovali podle y a dostali jsme stacionární bod $y = 0$. Ovšem tento bod neleží v intervalu $(0,3)$, a tedy vázaný extrém na této úsečce neexistuje.

b) Nechť $g(x,y) = y = 0$ pro $x \in (0,3)$. Pak

$$f(x) = x^2 - 6x - 1$$
$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Ovšem bod $x = 3$ neleží v intervalu $(0,3)$ a tedy vázaný extrém neexistuje.

c) Nechť $g(x,y) = y + x - 3 = 0$ pro $x \in (0,3)$. Dosazujeme za y do funkce f výraz $y = -x + 3$, tedy

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2(-x+3)^2 + 4x(-x+3) - 6x - 1 \\ &= -5x^2 + 18x - 19 \\ f'(x) &= -10x + 18 = 0 \Rightarrow x = \tfrac{9}{5}. \end{aligned}$$

Bod $x = \frac{9}{5}$ leží v intervalu $(0,3)$ a má smysl zkoumat, zda-li v tomto bodě má funkce f vázaný extrém. Vypočítáme druhou derivaci funkce f a určíme hodnotu derivace v bodě $x = \frac{9}{5}$,

$$f''(\tfrac{9}{5}) = -10 < 0 \Rightarrow \text{ostré lokální maximum.}$$

Dopočítáme y-ovou souřadnici z rovnice $y = -x + 3$, tedy $y = \frac{6}{5}$. Funkce f má v bodě $A_2 = [\frac{9}{5}, \frac{6}{5}]$ vázané lokální maximum.

3. Protože je hranice tvořená jednotlivými křivkami, musíme ještě vyšetřit vrcholy trojúhelníka ABC. Vypočítáme jednotlivé funkční hodnoty a vzájemně je porovnáme.

$$f(A_2) = -\tfrac{14}{5}, \quad f(A) = -1, \quad f(B) = -10, \quad f(C) = -19.$$

Porovnáme jednotlivé funkční hodnoty,

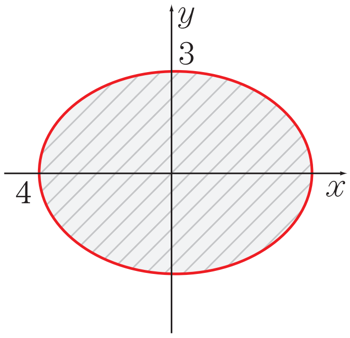
$$f(C) < f(B) < f(A_2) < f(A).$$

Funkce f má v bodě $A = [0,0]$ globální maximum $z = -1$ a v bodě $C = [0,3]$ globální minimum $z = -19$.

Příklad 6.3.2. Na elipse $9x^2 + 16y^2 \leq 144$ nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y)$,

$$f(x, y) = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y.$$

Řešení: Definičním oborem funkce f je $\mathrm{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$.



Obr. 6.3.2

Nalezneme lokální extrémy funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 18x - 36 = 18(x - 2) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 32y - 64 = 32(y - 2) = 0.$$

Řešením soustavy je bod $A_1 = [2, 2]$. Je nutné ověřit, že bod A_1 leží v D_f, dosazením snadno zjistíme, že A_1 vyhovuje nerovnici elipsy. Sestavíme matici parciálních derivací druhého řádu a určíme hodnoty determinantů D_1, D_2. Obě hodnoty jsou kladné, funkce f má v bodě A_1 ostré lokální minimum.

Sestavíme Lagrangeovu funkci a vyšetříme existenci vázaných extrému na hranici elipsy.

$$\Phi = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y + \lambda(9x^2 + 16y^2 - 144),$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 18x - 36 + 18\lambda x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{1 + \lambda},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 32y - 64 + 32\lambda y = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{1 + \lambda}.$$

Dosadíme do rovnice vazby ($g(x, y) = 9x^9 + 16y^2 - 144 = 0$),

$$9\left(\frac{2}{1 + \lambda}\right)^2 + 16\left(\frac{2}{1 + \lambda}\right)^2 = 144 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = \tfrac{1}{6},\; \lambda_3 = \tfrac{11}{6}.$$

Pro $\lambda_2 = \frac{1}{6}$ dopočítáme $x_2 = y_2 = \frac{12}{5}$, získali jsme stacionární bod $A_2 = [\frac{12}{5}, \frac{12}{5}]$. Stejně postupujeme i pro hodnotu $\lambda_3 = \frac{11}{6}$, $x_3 = y_3 = -\frac{12}{5}$, tedy $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$.

Sestavíme matici parciálních derivací druhého řádu pru Lagrangeovu funkci Φ a určíme hodnoty příslušných determinantů. V bodě $A_2 = [\frac{12}{5}, \frac{12}{5}]$ má funkce f vázané lokální minimum, v bodě $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$ má funkce f vázané lokální maximum.

Porovnáním funkčních hodnot rozhodneme o existenci globálních extrémů funkce f,

$$f(A_1) = -100 \quad < \quad f(A_2) = -96 \quad < \quad f(A_3) = 384.$$

Funkce f má v bodě $A_1 = [2, 2]$ globální minimum $z = -100$ a v bodě $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$ globální maximum $z = 384$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - y$ na čtverci s vrcholy $[1, 1]$, $[3, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$.

2. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na trojúhelníku s vrcholy $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[0, 1]$.

3. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 4y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 3x + 4y + 1$ na kruhu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

5. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 5x - 3y + 1$ na trojúhelníku s vrcholy $[1, 4]$, $[-2, 1]$, $[0, -1]$.

6. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na trojúhelníku s vrcholy $[1, 4]$, $[-2, 1]$, $[0, -1]$.

7. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na čtverci s vrcholy $[0, 0]$, $[-1, 0]$, $[-1, -1]$, $[0, -1]$.

8. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 16$.

9. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 2x + 4y + 1$ na elipse $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

10. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$ na čtverci s vrcholy $[2, 0]$, $[0, 2]$, $[-2, 0]$, $[0, -2]$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $[1,3]$ - globální minimum, $[3,1]$ - globální maximum. Návod: pro vyjádření hraničních křivek stačí najít rovnice přímek, které jsou určeny vrcholy čtverce.

2. $[0,0]$ - globální minimum, $[2,0]$ - globální maximum.

3. $[0,-1]$ - globální minimum, $[0,1]$ - globální maximum.

4. $[\frac{12}{5},\frac{1}{5}]$ - globální minimum, $[\frac{18}{5},\frac{9}{5}]$ - globální maximum.

5. $[-2,1]$ - globální minimum, $[0,-1]$ - globální maximum.

6. $[1,4]$ - globální minimum, $[0,1]$ - globální maximum.

7. $[-1,-1]$ - globální minimum, $[0,0]$ - globální maximum.

8. $[0,-4]$ - globální minimum, $[0,1]$ - globální maximum.

9. $[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}]$ - globální minimum, $[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}]$ - globální maximum.

10. $[0,0]$ - globální minimum, $[0,-2]$ - globální maximum, $[0,2]$ - globální maximum.

Kontrolní test

1. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=-2x^2+xy+12x-3y^2+20y$.

a) $[0,0]$ - ostré lokální minimum b) $[0,0]$ - ostré lokální maximum

c) $[4,4]$ - ostré lokální minimum d) $[4,4]$ - ostré lokální maximum

2. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=x^4-2x^2+y^4+2y^2$.

a) $[0,0]$ - ostré lokální maximum

b) $[1,1]$ - ostré lokální minimum, $[-1,-1]$ - ostré lokální maximum

c) $[1,0]$, $[-1,0]$ - ostrá lokální minima

d) $[1,0]$ - ostré lokální minimum, $[0,0]$, $[-1,0]$ - ostrá lokální maxima

3. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=2x^3+2y^3+x^2-4x-24y$.

a) $[\frac{2}{3},2]$ - ostré lokální minimum, $[-1,-2]$ - ostré lokální maximum

b) $[\frac{2}{3},2]$, $[\frac{2}{3},-2]$ - ostrá lokální minima, $[-1,2]$, $[-1,-2]$ - ostrá lokální maxima

c) $[\frac{2}{3},-2]$ - ostré lokální minimum, $[-1,2]$ - ostré lokální maximum

d) $[\frac{2}{3},2]$, $[-1,2]$ - ostrá lokální minima, $[\frac{2}{3},-2]$, $[-1,-2]$ - ostrá lokální maxima

4. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-xy^2+2y+4$.

a) $[1,1]$ - ostré lokální minimum

b) $[-1,-1]$ - ostré lokální maximum

c) extrém neexistuje

d) $[1,1]$ - ostré lokální minimum, $[-1,-1]$ - ostré lokální maximum

5. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = y^2 - x^2$ vzhledem k podmínce $y = 2x + 3$.

a) $[-2,-1]$ - vázané lokální maximum

b) $[-2,-1]$ - vázané lokální minimum

c) $[2,7]$ - vázané lokální maximum

d) $[2,7]$ - vázané lokální minimum

6. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y$ vzhledem k podmínce $y = -x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 18x + 32$.

a) $[2,40]$ - vázané lokální maximum, $[-3,-31]$ - vázané lokální minimum

b) $[2,50]$ - vázané lokální maximum, $[-3,-\frac{-35}{2}]$ - vázané lokální minimum

c) $[-2,-12]$ - vázané lokální maximum, $[3,23]$ - vázané lokální minimum

d) $[-2,-12]$ - vázané lokální minimum, $[3,23]$ - vázané lokální maximum

7. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = \sin^2 x + y^2 - 9x^2$ vzhledem k podmínce $y = \cos x$.

a) $[0,1]$ - vázané lokální maximum

b) $[\frac{\pi}{2},0]$ - vázané lokální maximum

c) $[-\frac{\pi}{2},0]$ - vázané lokální minimum

d) $[0,-1]$ - vázané lokální minimum

8. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + y + 4x$ na čtverci s vrcholy $[2,2]$, $[-2,2]$, $[-2,-2]$, $[2,-2]$.

a) $[2,-2]$ - globální maximum
$[-2,-2]$ - globální minimum

b) $[2,2]$ - globální maximum
$[-2,-2]$ - globální minimum

c) $[2,-2]$ - globální maximum
$[-1,-\frac{1}{2}]$ - globální minimum

d) $[2,2]$ - globální maximum
$[-1,-\frac{1}{2}]$ - globální minimum

9. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - 3y + 6$ na trojúhelníku s vrcholy $[0,0]$, $[1,2]$, $[-1,2]$.

a) $[0,0]$ - globální maximum
$[0,2]$ - globální minimum

b) $[0,0]$ - globální maximum
$[1,2]$ - globální minimum

c) $[0,0]$ - globální maximum
$[-1,2]$ - globální minimum

d) $[0,0]$ - globální maximum
$[0,2]$, $[0,-2]$ - globální minima

10. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x - 2y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq \frac{5}{4}$.

a) $[\frac{1}{2},1]$ - globální maximum
$[-\frac{1}{2},-1]$ - globální minimum

b) $[-\frac{1}{2},1]$ - globální maximum
$[\frac{1}{2},-1]$ - globální minimum

c) $[\frac{1}{2},-1]$ - globální maximum
$[-\frac{1}{2},1]$ - globální minimum

d) $[-\frac{1}{2},-1]$ - globální maximum
$[\frac{1}{2},1]$ - globální minimum

Výsledky testu

1. d), **2.** c), **3.** a), **4.** c), **5.** b), **6.** b), **7.** a), **8.** d), **9.** a), **10.** c)

Kontrolní otázky

1. Co je to stacionární bod funkce?
2. Co jsou lokální extrémy funkce více proměnných?
3. Zformulujte Fermatovu větu.
4. Jak hledáme lokální extrémy funkcí dvou proměnných?
5. Jak hledáme lokální extrémy funkcí tří proměnných?
6. Co jsou to vázané extrémy?
7. Jaký je geometrický význam vázaných extrémů?
8. Jaký je princip Lagrangeovy metody?
9. Co jsou to globální extrémy?
10. Zformulujte postup při hledání globálních extrémů.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme se naučili hledat tři druhy extrémů. Jednalo se o extrémy lokální, vázané a globální. Všimněme si ještě, že určování globálních extrémů zahrnuje hledání jak extrémů lokálních, tak extrémů vázaných.