Diferenciální rovnice

Průvodce studiem

Touto kapitolou se náplň základního kurzu bakalářské matematiky uzavírá. Je tomu tak mimo jiné proto, že jsou zde souhrnně využívány poznatky získané studiem předchozích témat. Neméně významná je i skutečnost, že diferenciální rovnice a jejich řešení tvoří jeden z pilířů matematického popisu dějů, s nimiž se setkáváme ve většině technických disciplin.

Téma *Diferenciální rovnice* je rozděleno do tří částí číslovaných v kontextu předmětu *Bakalářská matematika II*:

7. Úvod do problematiky diferenciálních rovnic

8. Metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

9. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

V jednotlivých podkapitolách jsou předkládány základní teoretické poznatky, které jsou doplněny řešenými úlohami a příklady k samostatnému procvičení. V sekcích 8.1, 8.4, 9.2 a 9.6 jsou zařazeny kontrolní testy, které by měly sloužit k průběžnému ověření stupně zvládnutí příslušné problematiky.

Předpokládané znalosti

Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné, funkce dvou proměnných - v rozsahu odpovídajícím předmětu *Bakalářská matematika I* a kapitolám 5 a 6 *Bakalářské matematiky II*.

Literatura

Pro doplnění a rozšíření poznatků o diferenciálních rovnicích, jejich řešení a aplikacích lze čerpat z celé řady zdrojů. Na některé z nich je odkazováno v tomto textu ([17], [18]), jako další lze doporučit například [2], [10], [14].

7. Úvod do problematiky diferenciálních rovnic

Cíle

V úlohách, na které se zaměříme, je úkolem nalézt neznámou funkci jedné proměnné řešením rovnice, v níž se vyskytují také její derivace. Úvodem vysvětlíme základní pojmy používané v této partii matematiky, poté se budeme věnovat klasifikaci základních typů rovnic prvního řádu a metodám jejich řešení.

Z rovnic druhého řádu se zaměříme pouze na rovnice s konstantními koeficienty a v závěru připojíme stručný úvod do řešení jednoduchých soustav diferenciálních rovnic.

7.1. Zavedení diferenciálních rovnic a typy jejich řešení

Výklad

Jako motivaci pro následující výklad uveďme dva příklady, které reprezentují velmi širokou škálu aplikací, v nichž se můžeme s diferenciálními rovnicemi setkat.

Řešené úlohy

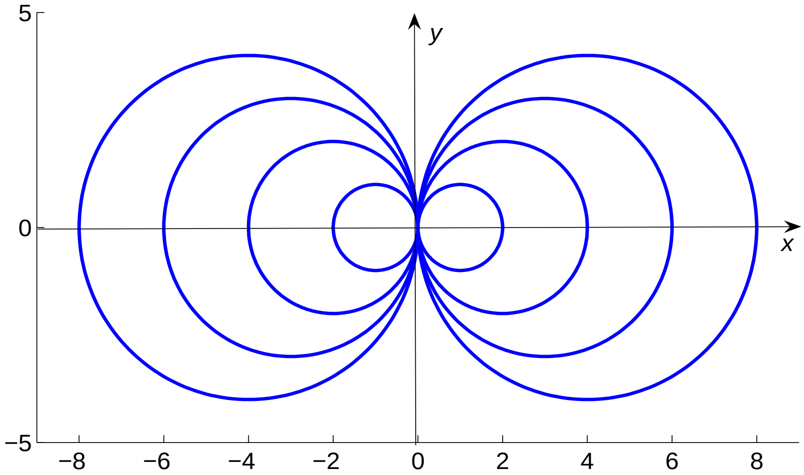
Příklad 7.1.1. Libovolná kružnice v rovině mající střed na ose x, která se dotýká v počátku souřadného systému osy y, má rovnici

$$(x-C)^2+y^2=C^2 \qquad \text{neboli} \qquad x^2+y^2=2Cx\,.$$

Ukážeme jiný způsob, jakým lze systém těchto křivek vyjádřit - viz obr. 7.1.1.

Řešení: Nejprve budeme rovnici vpravo derivovat jako implicitně zadanou funkci $y(x)$. Po vydělení dvěma obdržíme vztah $x+yy'=C$, do kterého dosadíme konstantu C vyjádřenou z původní rovnice:

$$C=\frac{x^2+y^2}{2x}\,.$$



Obr. 7.1.1. Svazek kružnic – k příkladu 7.1.1. pro hodnoty
$C = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4.$

Výsledek můžeme zapsat opět jako rovnici

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0\,, \qquad \text{resp.} \qquad y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}\ ,$$

která představuje hledaný výsledek.

Příklad 7.1.2. Z fyziky je známo, že vlastní kmity mechanické soustavy v odporujícím prostředí lze popsat diferenciální rovnicí pro okamžitou výchylku $y(t)$, která je funkcí času t:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0\ .$$

Zde jsou a koeficient odporu prostředí a ω úhlová frekvence kmitů. Máme dokázat, že v případě netlumených kmitů $(a = 0)$ má řešení této rovnice tvar

$$y(t) = A.\sin(\omega t + \varphi)\,,$$

kde A, φ jsou libovolné konstanty představující amplitudu a fázi kmitavého pohybu.

Řešení: Snadno se postupným výpočtem přesvědčíme, že pro druhou derivaci okamžité výchylky platí $y''(t) = -\omega^2 A.\sin(\omega t + \varphi)$, takže nezávisle na hodnotách konstant A, φ pro netlumené kmity platí $y'' + \omega^2 y = 0$, což jsme měli potvrdit.

Výklad

V předchozích řešených úlohách jsem se seznámili s novými pojmy, které používáme při popisu diferenciálních rovnic a jejich řešení. Následující definice shrnuje nejdůležitější z nich.

Definice 7.1.1.

Rovnice tvaru $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots, y', y, x) = 0$ se nazývá **diferenciální rovnice** n**-tého řádu** pro funkci $y = y(x)$. Speciálně je

$$F(y', y, x) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y' = f(x, y)$$

diferenciální rovnice prvního řádu.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace hledané funkce $y(x)$.

Řešením diferenciální rovnice je každá funkce, která rovnici vyhovuje (na zadané množině).

Graf konkrétního řešení rovnice se nazývá **integrální křivka**.

Poznámka

*Rovnice zavedené předchozí definicí se často označují jako **obyčejné** na rozdíl od rovnic **parciálních**, v nichž hledáme funkci více proměnných.*

*Čeština – na rozdíl od většiny jiných jazyků – má označení **řešení** jak pro postup, tak pro jeho výsledek. Proto je třeba věnovat textu větší pozornost a předcházet nedorozuměním.*

Výsledná rovnice v příkladu 7.1.1. je prvního řádu, příklad 7.1.2. je ukázkou rovnice 2. řádu, kterou můžeme psát také ve tvaru $y'' + 2ay' + \omega^2 y = 0$.

Výklad

V následujícím výkladu se budeme věnovat pouze rovnicím prvního řádu. Rovnici považujeme za vyřešenou, známe-li všechna její řešení. Ta rozdělujeme do několika typů:

- **obecné řešení** rovnice 1. řádu představuje množinu funkcí tvaru

$$\phi(x, y, C) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y = \varphi(x, C)\,;$$

- **partikulární řešení** je konkrétní funkce získaná z obecného řešení volbou nebo výpočtem konstanty C;
- **výjimečné řešení** nelze získat z obecného pro žádnou hodnotu C; existuje pouze u některých typů rovnic a v tomto textu se jím nebudeme až na výjimky zabývat.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte diferenciální rovnici pro zadaný systém rovinných křivek:

a) paraboly $y = x^2 - 2Cx$, b) logaritmické křivky $y = \ln(Cx + 1)$.

c) kružnice $x^2 + y^2 = C^2$ (derivujte jako implicitně zadanou funkci).

2. Přesvědčte se, že uvedená funkce je řešením dané diferenciální rovnice (na vhodném intervalu):

a) $x^2 - xy + y^2 = C^2$, $(x - 2y)y' = 2x - y$,

b) $xy + \ln y = 0$, $(1 + xy)y' = y^2$,

c) $y = x \sin(\ln x + C)$, $xy' - y - \sqrt{x^2 - y^2} = 0$,

3. Ukažte, že poslední rovnice z předchozího příkladu má výjimečné řešení $y = x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $xy' - x^2 - y = 0$, b) $xy' = 1 - \mathrm{e}^{-y}$, c) $x + yy' = 0$.

2. Funkce $y = x$ rovnici vyhovuje, avšak není součástí obecného řešení pro žádné C.