7.2. Existence a jednoznačnost řešení

Cíle

Naše nejbližší cíle spočívají v odpovědích na základní otázky, které si klademe v souvislosti s diferenciálními rovnicemi:

1. Má rovnice řešení?
2. Kolik je řešení a jakého jsou typu?
3. Jak se tato řešení najdou?

Výklad

Začneme odpovědí na poslední z nich pro nejjednodušší případ, kterým je **rovnice se separovanými proměnnými**

$$Q(y)y' = P(x)\,, \qquad \text{tj.} \qquad Q(y)\,dy = P(x)\,dx\,,$$

nahradíme-li derivaci y' podílem dy/dx. Zde jsou proměnné odděleny (separovány) na jednotlivé strany a můžeme provést integraci, která nás přivede přímo k výsledku:

$$\int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx + C\,.$$

Primitivním funkcím na obou stranách rovnosti teoreticky náležejí dvě integrační konstanty, které však spojujeme do jediné, kterou zpravidla píšeme k výrazu s nezávisle proměnnou. Podle okolností můžeme po integraci vhodnými úpravami vyjádřit obecné řešení explicitně jako $y = \varphi(x, C)$. Integrační konstanta C je organickou součástí řešení, je proto nutno ji začlenit do příslušného výrazu v okamžiku, kdy je provedena integrace.

Příklad 7.2.1. Je dána rovnice $y' = -2x$. Určete

a) její obecné řešení,

b) partikulární řešení určené podmínkou $y(1) = 2$.

Řešení:

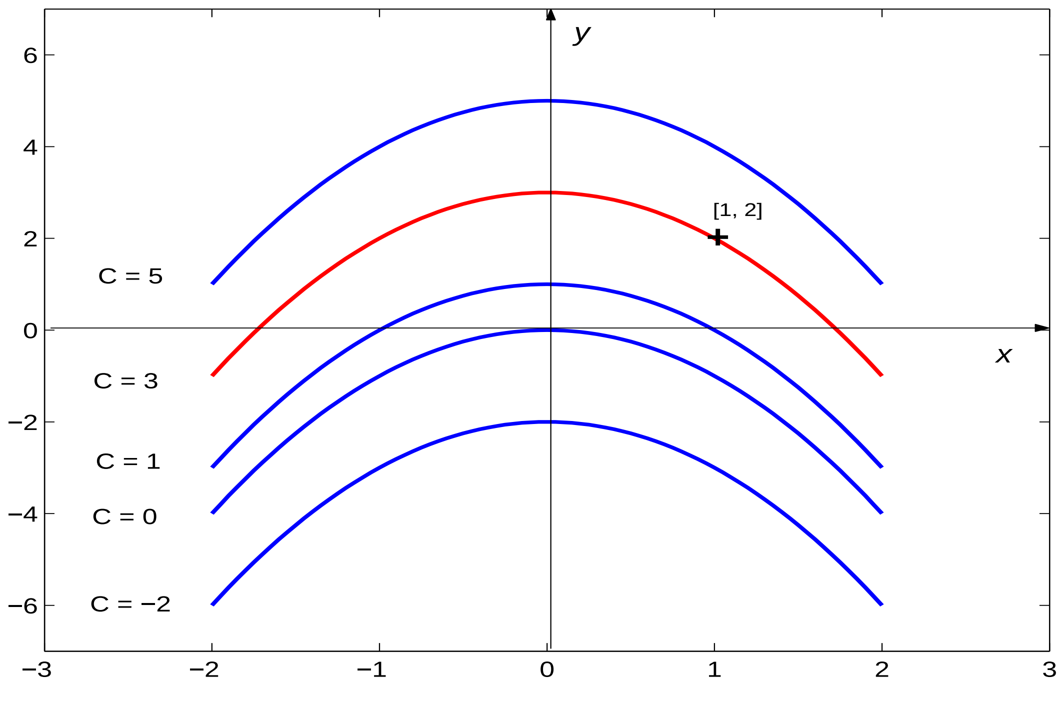
a) $y(x) = \int(-2x)\,dx = -x^2 + C$, proto soustava parabol o rovnicích $y = C - x^2$ (obr. 7.2.1) představuje obecné řešení úlohy. O jeho správnosti se lze snadno přesvědčit zkouškou.

b) Zadaná podmínka znamená, že hledáme integrální křivku, která prochází bodem $[1, 2]$. Dosazením těchto souřadnic do obecného řešení dostáváme

$$2 = C - 1^2\,, \qquad \text{odkud} \qquad C = 3\,.$$

Výsledným partikulárním řešením je tedy parabola (na obr. 7.2.1 červeně)

$$y_p = 3 - x^2\,.$$



Obr. 7.2.1. Integrální křivka partikulárního řešení příkladu 7.2.1. a několik dalších parabol z obecného řešení.

Výklad

Složitější typy rovnic vyžadují přirozeně odpovídající postupy. Často je jejich cílem převedení zadané rovnice do separovaného tvaru. Vybranými typy rovnic a metodami jejich řešení se zabýváme v další kapitole.

Obecná formulace zadání z předchozího příkladu b) se nazývá **počáteční úloha pro diferenciální rovnici**. Jedná se tedy o rovnici doplněnou podmínkou, z níž určujeme partikulární řešení procházející bodem $[x_0, y_0]$:

$$y' = f(x,y)\,, \qquad y(x_0) = y_0\,.$$

Poznámka

*Termín **počáteční úloha** odkazuje k historii, kdy se diferenciální rovnice řešily nejčastěji pro děje závislé na čase. Dnes má obecný význam, který podtrhuje další používané označení – **Cauchyho úloha**.*

Zbývá odpovědět na první dvě otázky formulované v úvodu kapitoly: kdy řešení rovnice existuje a je-li jednoznačné, tj. zda zadaným bodem prochází jedna nebo více integrálních křivek. Teorie dává odpověď ve formě následující věty, kterou uvádíme bez důkazu.

Věta 7.2.1.

Nechť je dána rovnice $y' = f(x,y)$ a bod $A = [x_0, y_0]$. Je-li funkce (dvou proměnných) $f(x,y)$ spojitá v bodě A a určitém jeho okolí, pak v tomto okolí existuje řešení rovnice $y' = f(x,y)$, které splňuje podmínku $y(x_0) = y_0$. Je-li spojitá také derivace $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, pak je řešení právě jediné.

Příklad 7.2.2. Je dána rovnice

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}\,.$$

Vyšetřete množinu, na níž řešení existuje, a dále jednoznačnost tohoto řešení. Najděte obecné řešení a znázorněte graficky několik integrálních křivek.

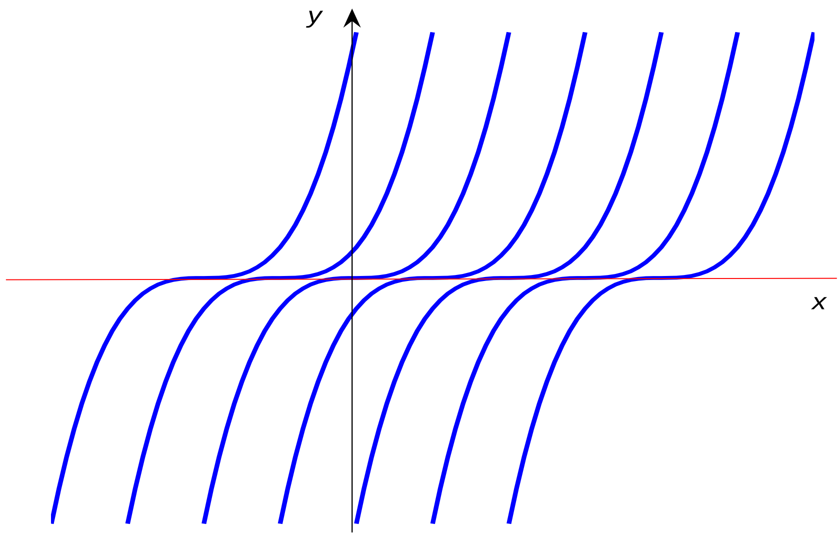
Řešení: Rovnici snadno zapíšeme v separovaném tvaru a přejdeme přímo k integraci:

$$\int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = \int dx \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[3]{y} = x + C \qquad \Longrightarrow \qquad y = (x + C)^3 .$$

V zadané rovnici je funkce $f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ spojitá v libovolném bodě $[x, y]$, řešení tedy existuje v celé rovině. Derivace

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

však není definována pro $y = 0$ (na ose x), kde proto řešení není jednoznačné. Situace je zřejmá z obr. 7.2.2, na němž vidíme několik integrálních křivek reprezentujících obecné řešení. Všechny mají v ose x společnou inflexní tečnu. Každým jejím bodem tedy procházejí dvě řešení, zatímco všemi ostatními body v rovině právě jedna integrální křivka. Funkce $y = 0$ rovnici rovněž vyhovuje, ačkoli není součástí obecného řešení (jedná se o řešení výjimečné).



Obr. 7.2.2. Integrální křivky řešení příkladu 7.2.2. Jedná se o kubické paraboly pro $C = -2, -1, \ldots, 4$ a osu x jako graf výjimečného řešení.

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Čím je určen řád diferenciální rovnice?*

Otázka 2. *Uveďte typy řešení diferenciální rovnice a jejich vzájemný vztah.*

Otázka 3. *Vysvětlete pojem „počáteční úloha".*

Otázka 4. *Uveďte podmínky existence a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice prvního řádu.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Je dána rovnice $y' = x - \sqrt{x^2 - 2y}$. Ukažte, že funkce $y = \varphi(x, C) = Cx - \frac{1}{2}C^2$ je jejím obecným řešením a najděte oblast, na níž řešení existuje. Dále ověřte, že rovnice má výjimečné řešení $y = \frac{1}{2}x^2$, přičemž každým bodem této paraboly procházejí dvě integrální křivky. Znázorněte graficky.

2. Určete oblast, kde má zadaná rovnice řešení a vyšetřete jeho jednoznačnost:

a) $y' = xy$ b) $y' = \sqrt{x - y}$.

3. Najděte obecné řešení rovnic:

a) $(1 - 2y)y' = 2x$ b) $y' \cos y = \sin x$.

4. Řešte počáteční úlohy:

a) $\frac{y'}{y^2} = 2x, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$, b) $y'.\mathrm{e}^y = 1, \quad y(1) = 0.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. Funkce $f(x, y) = x - \sqrt{x^2 - 2y}$ je definovaná a spojitá pouze pro $x^2 - 2y \geq 0$, tj. $y \leq \frac{1}{2}x^2$. Proto řešení rovnice existuje pouze na oblasti ohraničené shora touto parabolou. Funkce $y = \frac{1}{2}x^2$ rovněž rovnici vyhovuje (přesvědčte se dosazením), avšak zjevně ji nelze získat z obecného řešení pro žádné C. Jde tedy o výjimečné řešení. Ukážeme, že přímky tvořící obecné řešení jsou tečnami k této parabole (ta tvoří jejich tzv. **obálku**), jak je znázorněno na obr. 7.2.3. Zvolíme na parabole libovolný bod $x = x_0$, $y = \frac{1}{2}x_0^2$. Směrnice tečny v tomto bodě je $y'(x_0) = x_0$, takže pro tečnu dostáváme rovnici

$$y - \frac{1}{2}x_0^2 = x_0(x - x_0)\,, \qquad \text{neboli} \qquad y = x_0 x - \frac{1}{2}x_0^2\,.$$

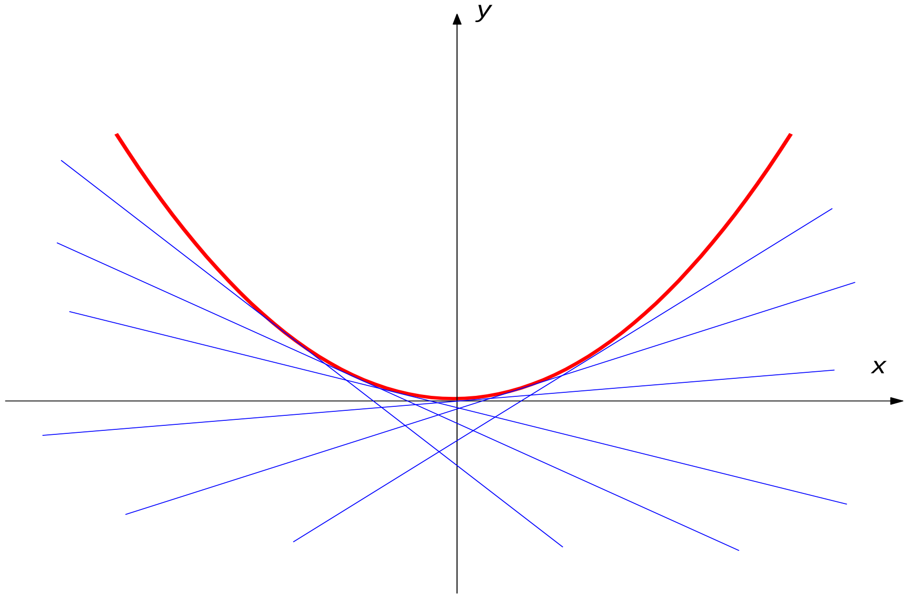
Jak je patrno, jde právě o jednu z přímek náležejících do obecného řešení. Zvoleným bodem (a každým dalším bodem paraboly) procházejí dvě integrální křivky.

2. a) Řešení existuje v celé rovině a jednoznačné.

b) Řešení existuje pro $y \leq x$, jednoznačné je pro $y < x$.

3. a) $y - y^2 = x^2 + C\,,$ b) $y = \arcsin(C - \cos x)$.

4. a) $y = \frac{1}{x^2-2}\,,$ b) $y = \ln x$.



Obr. 7.2.3. Výjimečné (červeně) a obecné řešení – k úloze 1.