8.3. Lineární diferenciální rovnice

Cíle

Přehled základních typů diferenciálních rovnic prvního řádu zakončíme pojednáním o lineárních rovnicích, které patří v praktických úlohách k nejfrekventovanějším. Ukážeme například, že

- jejich řešení má předem danou pevnou strukturu,
- řešení lze zapsat v obecném uzavřeném tvaru (na rozdíl od jiných typů rovnic),
- postupy při jejich řešení mají určité univerzální rysy, které lze uplatnit i u lineárních rovnic vyšších řádů.

Výklad

Definice 8.3.1.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR) je každá rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)\,,$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou funkce spojité na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, v níž hledáme řešení. Je-li $q(x) = 0$ na M, nazývá se

$$y' + p(x)y = 0$$

zkrácenou lineární rovnicí nebo také rovnicí **bez pravé strany**. V opačném případě hovoříme o **úplné lineární rovnici**.

Věta 8.3.1.

Zkrácená lineární rovnice má obecné řešení

$$\hat{y}(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

Důkaz: Ve zkrácené rovnici lze proměnné snadno separovat, a proto

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \int p(x)\,dx + \ln C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

Věta 8.3.2.

Obecné řešení úplné lineární rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x)\,,$$

kde $\hat{y}(x)$ je řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení úplné lineární rovnice.

Důkaz: Z předpokladů věty je zřejmé, že

$$\hat{y}' + p(x)\hat{y} = 0 \qquad \text{a dále} \qquad v' + p(x)v = q(x).$$

Po dosazení za y do úplné rovnice dostáváme:

$$(\hat{y} + v)' + p(x)(\hat{y} + v) = q(x)\,,$$

$$\hat{y}' + p(x)\hat{y} + v' + p(x)v = q(x)\,.$$

Součet prvních dvou členů je podle prvního předpokladu roven nule a zbývající rovnost platí podle druhého předpokladu. Tím je důkaz podán.

Poznámka

Funkce $v(x)$ z předchozí věty bývá také označována jako ***partikulární integrál úplné lineární rovnice****.*

Výklad

Umíme-li stanovit řešení zkrácené LDR (zpravidla to není obtížné), zbývá nalézt způsob určení partikulárního integrálu $v(x)$. Seznámíme se s postupem nazývaným

metoda variace konstanty. Její princip spočívá v realizaci předpokladu, že řešení zkrácené rovnice

$$\hat{y}(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

bude vyhovovat rovnici úplné, jestliže nahradíme konstantu C vhodnou funkcí, kterou určíme výpočtem. Budeme tedy předpokládat, že

$$y(x) = C(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

je hledaným řešením a dosadíme tuto funkci do úplné rovnice:

$$\underbrace{C'(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} - C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}.p(x)}_{y'(x)} + \underbrace{C(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}}_{y(x)}.p(x) = q(x)\,.$$

Na levé straně se odečtou členy obsahující funkci $C(x)$, takže zůstane pouze vztah

$$C'(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} = q(x)\,, \qquad \text{odkud} \qquad C'(x) = q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\,.$$

Finální tvar funkce $C(x)$ stanovíme opět integrací:

$$C(x) = \int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + K$$

s definitivní konstantou K. Tento výsledek nyní dosadíme do výrazu pro řešení zkrácené rovnice, abychom získali obecné řešení úplné rovnice:

$$y(x) = \left(\int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + K\right).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

Po roznásobení obdržíme konečnou podobu hledaného řešení, která odpovídá očekávanému tvaru:

$$y(x) = \underbrace{K.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}.\int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}}_{v(x)}\,.$$

Tím jsme v podstatě provedli konstruktivní důkaz následujícího tvrzení o podobě řešení lineární rovnice.

Věta 8.3.3.

Úplná lineární rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ má obecné řešení $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$ tvořené součtem řešení zkrácené rovnice a partikulárního integrálu

$$v(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} . \int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} .$$

Poznámka

Skutečnost, že se při výpočtu vyruší členy obsahující funkci $C(x)$ není náhodná. Z provedeného důkazu plyne, že tomu tak musí být vždy, pokud jsou ostatní kroky provedeny korektně. Proto může tato okolnost sloužit jako jistá kontrola správnosti výpočtu.

Výsledný vzorec má sice univerzální platnost pro všechny lineární rovnice, avšak v praxi se doporučuje postupovat v jednotlivých krocích, jimiž byl odvozen. Výpočet je přehlednější a lze se snáze vyvarovat chyb. Věnujte proto pozornost následujícím řešeným příkladům.

Řešené úlohy

Příklad 8.3.1. Najděte obecné řešení rovnic $xy' - y = 2x^3$.

Řešení: Přepíšeme-li zadání do tvaru

$$y' - \frac{1}{x}y = 2x^2 ,$$

vidíme, že jde o lineární rovnici, v níž $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = 2x^2$. Při jejím řešení budeme postupovat podrobně podle kroků popsaných v odvození.

1. Nejprve vyřešíme separací proměnných zkrácenou rovnici:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x| + C ,$$

odkud

$$\hat{y} = Cx .$$

2. Nyní přistoupíme k variaci konstanty, při níž budeme předpokládat, že $y(x) = C(x).x$. Tuto funkci a její derivaci $y'(x) = C'(x).x + C(x)$ dosadíme do úplné rovnice:

$$x.\,(C'(x).x + C(x)) - C(x).x = 2x^3\,.$$

Vzhledem k tomu, že byl dosavadní postup správný, vyruší se členy $\pm C(x).x$ a lze pokračovat dalšími kroky:

$$C'(x).x^2 = 2x^3 \qquad \Longrightarrow \qquad C(x) = \int 2x\,dx = x^2 + K\,.$$

3. Získaný výsledek dosadíme zpět do řešení zkrácené rovnice a po drobné úpravě dostáváme hledané obecné řešení:

$$y(x) = (x^2 + K).x = Kx + x^3\,.$$

4. Na závěr provedeme zkoušku dosazením do levé strany zadané rovnice:

$$x(K + 3x^2) - Kx - x^3 = 2x^3\,,$$

což je rovno výrazu na pravé straně.

Příklad 8.3.2. Řešte počáteční úlohu $y' \sin x - y \cos x = \sin^3 x$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

Řešení: Opět se nejprve ujistíme, že jde o lineární rovnici:

$$y' - y\,\frac{\cos x}{\sin x} = \sin^2 x\,, \qquad \text{tj.} \quad p(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}\,, \quad q(x) = \sin^2 x\,.$$

1. Zkrácená rovnice:

$$y' = y\,\frac{\cos x}{\sin x} \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C\,.$$

Řešení zkrácené rovnice:

$$\hat{y} = C.\sin x\,.$$

2. Variace konstanty:

$$y = C(x).\sin x\,, \qquad y' = C'.\sin x + C.\cos x\,.$$

Dosazení do úplné rovnice:

$$(C'.\sin x + C.\cos x).\sin x - C.\sin x.\cos x = \sin^3 x\ ,$$

$$C'\sin^2 x = \sin^3 x \qquad \Longrightarrow \qquad C(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + K\ .$$

3. Zpětné dosazení:

$$y(x) = (-\cos x + K).\sin x = K\sin x - \sin x\cos x\ .$$

4. Počáteční úloha pro $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = K\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2} = K\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad K = \sqrt{2}\,.$$

Výsledné řešení má tedy tvar

$$y_p(x) = \sqrt{2}\sin x - \sin x\cos x\ .$$

Příklad 8.3.3. Elektrický obvod se skládá z ohmického odporu R a cívky s indukčností L. Připojíme-li k němu napětí $U(t)$, je závislost procházejícího proudu I na čase t popsána rovnicí

$$L\,\frac{dI(t)}{dt} + R\,I(t) = U(t)\ .$$

Najděte řešení této rovnice, je-li připojeno střídavé napětí $U(t) = U_0\sin\omega t$ o úhlovém kmitočtu ω s počáteční hodnotou $U(t=0) = 0$.

Řešení: Rovnice je lineární s konstantními koeficienty R a L.

1. Zkrácená rovnice po separaci

$$L\,\frac{dI}{dt} = -R\,dt$$

má řešení

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln C \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{I}(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ .$$

2. Variace konstanty: $I(t) = C(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$. Po dosazení do úplné rovnice dostáváme

$$C'(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = U_0 \sin \omega t \ ,$$

odkud

$$C(t) = U_0 \int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t \, dt = \frac{U_0 L \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + K \, .$$

3. Obecné řešení získáme zpětným dosazením tohoto výsledku do řešení zkrácené rovnice:

$$I(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0 L}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + K \, .$$

4. Počáteční úloha pro $U(t = 0) = 0$ vede k rovnosti

$$0 = K - \frac{U_0 \omega L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad \Longrightarrow \qquad K = \frac{U_0 \omega L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \, .$$

Hledaný časový průběh proudu je tedy popsán funkcí, která má po úpravě tvar

$$I(t) = \frac{U_0 \omega L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \left[\omega L \left(\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} - \cos \omega t \right) + R \sin \omega t \right] \, .$$

Kontrolní otázky

?

Otázka 1. *Vysvětlete pojem „lineární" v názvu tohoto typu diferenciálních rovnic.*

Otázka 2. *Jaký je obecný tvar lineární diferenciální rovnice?*

Otázka 3. *Popište strukturu obecného řešení lineární rovnice.*

Otázka 4. *Objasněte princip metody variace konstanty.*

Otázka 5. *Zdůvodněte, proč má lineární diferenciální rovnice vždy řešení, které je navíc jednoznačné na oboru řešitelnosti.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecné řešení:

a) $y' - y = \mathrm{e}^{2x}$,

b) $y' - \frac{x+1}{x} y = x^2$,

c) $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2$.

2. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $xy' - y = \sqrt{x}, \quad y(4) = 12$,

b) $y' + y.\operatorname{cotg} x = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$,

c) $x^2 y' + xy = \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y = K\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$, b) $y = Kx\mathrm{e}^x - x^2 - x$,

c) $y = K(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x - \operatorname{arctg} x)$.

2. a) $y = 4x - 2\sqrt{x}$, b) $y = -\operatorname{cotg} x$, c) $y = \frac{1+\ln^2 x}{2x}$.