9. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Cíle

Diferenciální rovnice, v nichž hledaná funkce vystupuje ve druhé či vyšší derivaci, nazýváme diferenciálními rovnicemi druhého a vyššího řádu. Analogicky jako u rovnic 1. řádu pro ně můžeme definovat obecné, partikulární a výjimečné řešení, popřípadě se zabývat existencí a jednoznačností výsledku. V našem výkladu se zaměříme na nejrozšířenější kategorii rovnic vyšších řádů - na rovnice lineární. Využijeme přitom dřívějších poznatků o lineární rovnici prvního řádu (kapitola 8.3). S ohledem na jednoduchost a názornost je výhodné seznámit se s touto problematikou prostřednictvím rovnic druhého řádu.

9.1. Zkrácená rovnice 2.řádu

9.1.1. Základní pojmy a vztahy

Cíle

Než přistoupíme k popisu metod řešení, seznámíme se s důležitými pojmy a vztahy, které tvoří základ potřebné teorie.

Výklad

Definice 9.1.1.

Lineární diferenciální rovnice (LDR) **druhého řádu** má tvar

$$a_2(x).y''(x) + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = b(x)\ ,$$

kde funkce (nebo konstanty) $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ jsou **koeficienty rovnice** a funkci $b(x)$ nazýváme **pravou stranou** rovnice. Je-li na nějakém intervalu $b(x) = 0$, jedná se o **zkrácenou** (**homogenní**) LDR, je-li $b(x) \neq 0$, hovoříme o rovnici **nezkrácené** (**úplné**).

Výklad

Známe-li některou z funkcí, která je řešením zadané LDR druhého řádu, můžeme využít postupu, který nabízí následující věta a navazující příklad.

Věta 9.1.1.

Nechť $v(x)$ je spojitá funkce a $y_1(x)$ jedno z nenulových řešení homogenní rovnice

$$a_2(x).y''(x) + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = 0\ .$$

Pak substitucí

$$y(x) = y_1(x) \int v(x)\, dx$$

přejde úplná rovnice druhého řádu v rovnici prvního řádu.

Důkaz: Vypočteme derivace

$$y' = y_1' \int v\, dx + y_1 v, \quad y'' = y_1'' \int v\, dx + 2y_1' v + y_1 v'$$

a dosadíme je do úplné rovnice. Po úpravě a přeskupení členů obdržíme rovnost

$$(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) \int v\, dx + (2a_2 y_1' + a_1 y_1)\ v + a_2 y_1 v' = b(x)\ ,$$

v níž je výraz v první závorce nulový (jde o levou stranu homogenní rovnice). Výsledná rovnice

$$a_2 y_1 v' + (2a_2 y_1' + a_1 y_1)\ v = b(x)$$

je lineární prvního řádu pro funkci $v(x)$, což jsme měli dokázat.

Příklad 9.1.1. Určete obecné řešení rovnice $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$, víte-li, že jedním z jejích řešení je funkce $y = x$.

Řešení: Podle předchozí věty položíme

$$y = x \int v\, dx, \quad y' = \int v\, dx + xv, \quad y'' = 2v + xv'$$

a dosadíme do zadané rovnice:

$$x^2(2v + xv') - x\left(\int v\, dx + xv\right) + x \int v\, dx = 8x^3\ .$$

Po roznásobení a úpravě vyjde LDR 1. řádu

$$xv' + v = 8x.$$

Její obecné řešení (umíme ho nalézt metodou variace konstanty) má tvar

$$v(x) = \frac{C_1}{x} + 4x$$

a jeho dosazením do původního vzrahu pro $y(x)$ dostáváme

$$y(x) = x \int v(x)\, dx = x \int \left(\frac{C_1}{x} + 4x \right) dx = C_1 x \ln x + 2x^3 + C_2 x\ ,$$

což je obecné řešení původní rovnice.

Výklad

Skutečnost, že obecné řešení LDR druhého řádu obsahuje dvě konstanty, není náhodná. Než ji ozřejmíme dalším výkladem, ukážeme obecnou formulaci počáteční úlohy, která vede k určení těchto konstant.

Definice 9.1.2.

Počáteční úlohou pro rovnici $a_2(x).y'' + a_1(x).y' + a_0(x).y = b(x)$ nazýváme zadání najít takové řešení $y(x)$ této rovnice, které splňuje podmínky

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1\ .$$

Podobně jako u lineárních rovnic prvního řádu platí i zde, že při spojitých koeficientech řešení počáteční úlohy existuje a je jednoznačné všude, kde jsou koeficienty definovány.

Při řešení počáteční úlohy postupujeme tak, že dosazením zadaných podmínek do obecného řešení a do jeho první derivace získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých pro konstanty C_1 a C_2. Ukázkou je následující příklad.

Příklad 9.1.2. Určete partikulární řešení rovnice $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$ z předchozí úlohy při počátečních podmínkách $y(1) = 4,\ y'(1) = 5$.

Řešení: Obecné řešení je

$$y(x) = C_1 x \ln x + 2x^3 + C_2 x\ ,$$

jeho derivace

$$y'(x) = C_1 \ln x + C_1 + 6x^2 + C_2 \ .$$

Dosazením počátečních podmínek pro $x = 1$ obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + C_2 \ , \\ 5 &= C_1 + 6 + C_2 \ . \end{aligned}$$

Odtud snadno vypočteme $C_1 = -3$, $C_2 = 2$, takže partikulárním řešením bude funkce

$$y(x) = -3x \ln x + 2x^3 + 2x \ .$$

Výklad

Označení „lineární" v názvu rovnice ukazuje mimo jiné na souvislost s tím, že levá strana je lineární kombinací funkcí y, y', y''. S tímto pojmem jsme se již setkali u vektorů, kde úzce souvisí s lineární závislostí a nezávislostí. Tyto vlastnosti hrají významnou roli také v souvislosti s funkcemi při popisu struktury řešení lineárních rovnic, proto je nyní budeme stručně aktualizovat. Jak již bylo uvedeno úvodem, je výklad veden pro rovnice druhého řádu, u nichž vystačíme se zavedením potřebných pojmů pro dvojici funkcí. Případné zobecnění pro úlohy vyššího řádu není obtížné – viz např. [18].

Definice 9.1.3.

Výraz $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ nazýváme **lineární kombinací** funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ s koeficienty C_1, C_2.

Řekneme, že funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$ jsou na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ **lineárně závislé**, existují-li takové konstanty C_1, C_2, z nichž alespoň jedna je nenulová, že platí

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0 \ .$$

V opačném případě řekneme, že funkce jsou **lineárně nezávislé**.

Často je potřeba nezávislost funkcí ověřit. K tomu lépe než výše uvedená definice slouží následující věta.

Věta 9.1.2.
Je-li v některém bodě $x \in \langle a,\, b\rangle$ determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

různý od nuly, jsou funkce $y_1(x),\ y_2(x)$ na tomto intervalu lineárně nezávislé. Determinant $W(x)$ se nazývá **Wronského determinant** nebo zkráceně **wronskian** této dvojice funkcí.

9.1.2. Struktura řešení zkrácené lineární rovnice

Výklad

Vraťme se nyní zpět k diferenciálním rovnicím bez pravé strany. Než ukážeme postup, jakým se hledá jejich řešení, popíšeme obecně strukturu výsledku, kterého chceme dosáhnout.

Věta 9.1.3.
Jsou-li $y_1(x),\ y_2(x)$ dvě lineárně nezávislá řešení zkrácené rovnice

$$a_2(x).y''(x) + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = 0\ ,$$

má její obecné řešení tvar $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, kde $C_1,\ C_2$ jsou libovolné konstanty.

Důkaz: Dosadíme-li předpokládané obecné řešení do levé strany rovnice, obdržíme jednoduchým uspořádáním členů tvar

$$C_1(a_2.y_1'' + a_1.y_1' + a_0.y_1) + C_2(a_2.y_2'' + a_1.y_2' + a_0.y_2)\ .$$

Protože každá z funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ je řešením rovnice, jsou členy v závorkách nulové a tedy celý výraz rovněž. To znamená, že tvrzení věty platí.

Výklad

Požadavek lineární nezávislosti dvojice funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ v obecném řešení je podstatný, neboť jen v takovém případě můžeme jejich lineární kombinací vyjádřit libovolná další řešení. Každá taková dvojice lineárně nezávislých řešení se nazývá **fundamentální systém řešení** této rovnice.

Příklad 9.1.3. Dokažte, že funkce $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$ tvoří (pro $x \neq 0$) fundamentální systém řešení rovnice

$$x^2y'' + xy' - y = 0\,.$$

Řešení:

1. Dosazením snadno ověříme, že každá z funkcí rovnici vyhovuje, tj. je jejím řešením.

2. Vypočteme wronskian této dvojice:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}\,.$$

Protože $W(x) \neq 0$ pro každé $x \neq 0$, jsou funkce y_1 a y_2 lineárně nezávislé. Tvoří tedy fundamentální systém řešení zadané rovnice.

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Jaký je rozdíl mezi zkrácenou a úplnou lineární rovnicí?*

Otázka 2. *Vysvětlete pojem „lineární kombinace funkcí”.*

Otázka 3. *Co představuje wronskian a k čemu slouží?*

Otázka 4. *Jaká je obecná struktura řešení zkrácené LDR druhého řádu?*

Otázka 5. *Objasněte pojem „fundamentální systém řešení”.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 3y = 0$, víte-li, že jedno z jejích řešení je $y = \mathrm{e}^x$.

2. Dokažte, že funkce $y_1 = x$, $y_2 = x^2 + 1$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0\,.$$

Vypočtěte partikulární řešení této rovnice pro podmínky $y(-2) = 6$, $y'(-2) = 3$.

3. Ze kterých dvojic vybraných z funkcí $y_1 = \mathrm{e}^{-2x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_3 = \sin 2x$ lze vytvořit obecné řešení rovnice $y'' - 4y = 0$?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{3x}$.

2. $y(x) = -4x^2 - 13x - 4$.

3. Pouze y_1, y_2 ; $\quad y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$.