9.3. Úplná lineární rovnice s konstantními koeficienty

Cíle

Nyní přejdeme k řešení úplné lineární rovnice druhého řádu. I v tomto případě si nejprve ujasníme, v jakém tvaru můžeme očekávat řešení, poté se zaměříme na rozšíření metody variace konstant na rovnice druhého řádu.

Výklad

Věta 9.3.1.
Obecné řešení úplné lineární rovnice druhého řádu

$$a_2(x)\ y''(x) + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)\ y(x) = b(x)$$

má tvar

$$y(x) = \tilde{y}(x) + v(x)\ ,$$

kde $\tilde{y}(x)$ je obecné řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení (tzv. **partikulární integrál**) úplné rovnice.

Důkaz: Podle předpokladů je

$a_2\tilde{y}'' + a_1\tilde{y}' + a_0\tilde{y} = 0$, neboť se jedná o obecné řešení zkrácené rovnice,

$a_2v'' + a_1v' + a_0v = b$, protože $v(x)$ je řešením úplné rovnice.

Dosadíme-li do rovnice $a_2y'' + a_1y' + a_0y = b$ předpokládané řešení, bude

$$a_2(\tilde{y}'' + v'') + a_1(\tilde{y}' + v') + a_0(\tilde{y} + v) = b\ ,$$

$$\text{tj.} \qquad a_2\tilde{y}'' + a_1\tilde{y}' + a_0\tilde{y} + a_2v'' + a_1v' + a_0v = b.$$

Uplatníme-li oba uvedené předpoklady, je tato rovnost identicky splněna.

Výklad

Máme řešit úpnou lineární rovnici druhého řádu

$$a_2(x)\ y''(x) + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)\ y(x) = b(x)$$

za předpokladu, že známe řešení zkrácené rovnice

$$\hat{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\ .$$

Stejně jako u lineárních rovnic prvního řádu budeme předpokládat, že obecné řešení úplné rovnice má stejný tvar jako řešení zkrácené rovnice, kde však figurují namísto konstant vhodné funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$. Tento postup se i zde označuje jako **metoda variace konstant**. Hledaný tvar řešení bude tedy

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)\ ,$$

a jeho první derivace

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'\ .$$

Volba dvojice nových funkcí dovoluje stanovit vhodnou doplňující podmínku pro jejich vzájemný vztah. Nejvýhodnější – pro snadný další postup – je požadavek, aby

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0\ .$$

Po dosazení do derivace bude tedy pouze

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

a můžeme vyčíslit druhou derivaci

$$y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''\ .$$

Získané vztahy pro funkci $y(x)$ a její derivace dosadíme do úplné rovnice a upravíme:

$$C_1(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + C_2(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + a_2(C_1' y_1' + C_2' y_2') = b\ .$$

Výrazy v prvních dvou závorkách jsou rovny nule, neboť jak y_1, tak y_2 jsou řešením zkrácené rovnice. Zůstává tedy pouze rovnost $a_2(C_1'y_1'+C_2'y_2') = b$, kterou v mírně upravené podobě zapíšeme spolu s dříve zvolenou podmínkou:

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0\ , \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= \frac{b}{a_2}\ . \end{aligned}$$

Získali jsme algebraickou soustavu rovnic pro derivace hledaných funkcí $C_1(x)$, $C_2(x)$, kterou musíme vyřešit. V prvé řadě vidíme, že determinant této soustavy je vlastně wronskianem $W(x)$ fundamentálního systému zkrácené rovnice (je proto nenulový). Z něj snadno zkonstruujeme determinanty $W_1(x)$, $W_2(x)$ tak, že příslušný sloupec nahradíme sloupcem pravých stran soustavy:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{b}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}\ , \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{b}{a_2} \end{vmatrix}\ .$$

Výrazy pro derivace $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ získáme snadno pomocí Cramerových vzorců známých z lineární algebry:

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}\ , \qquad C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}\ .$$

Odtud integrací obdržíme

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,dx + K_1\ , \qquad C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,dx + K_2\ ,$$

kde K_1, K_2 jsou reálné konstanty. Závěrečným krokem je zpětné dosazení těchto výsledků do původního výrazu $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, odkud obdržíme finální tvar obecného řešení úplné rovnice:

$$y(x) = \left(\int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,dx + K_1\right)\ y_1(x) + \left(\int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,dx + K_2\right)\ y_2(x)\ .$$

Předchozí výsledek můžeme zapsat i v poněkud odlišném uspořádání, z kterého je vidět, že podoba získaného řešení je v souladu s větou 9.3.1.:

$$y(x) = \underbrace{K_1y_1(x) + K_2y_2(x)}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,dx}_{v(x)}\ . \qquad (*)$$

Poznámka

Třebaže se odvození základních vztahů pro metodu variace konstant jeví komplikovaně, je její aplikace velmi přehledná, jak ukazují následující řešené úlohy. Jisté problémy mohou však nastat při výpočtu integrálů.

Řešené úlohy

Příklad 9.3.1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' - 8y = 30\mathrm{e}^{3x}$.

Řešení:

1. Nejprve vyřešíme zkrácenou rovnici $y'' - 2y' - 8y = 0$. Charakteristická rovnice $r^2 - 2r - 8 = 0$ má kořeny $r_1 = -2$, $r_2 = 4$, proto funkce fundamentálního systému budou

$$y_1 = \mathrm{e}^{-2x}, \; y_2 = \mathrm{e}^{4x}.$$

2. Nyní realizujeme algoritmus metody variace konstant. Nejprve vyčíslíme wronskian a odvozené determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{4x} \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & 4\mathrm{e}^{4x} \end{vmatrix} = 6\mathrm{e}^{2x} \;,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{4x} \\ 30\mathrm{e}^{3x} & 4\mathrm{e}^{4x} \end{vmatrix} = -30\mathrm{e}^{7x} \;,$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{4x} \\ 0 & 30\mathrm{e}^{3x} \end{vmatrix} = 30\mathrm{e}^{x} \;.$$

Pro funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ tak obdržíme integrály

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\, dx = -5 \int \mathrm{e}^{5x}\, dx = -\mathrm{e}^{5x} + K_1 \;,$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\, dx = 5 \int \mathrm{e}^{-x}\, dx = -5\mathrm{e}^{-x} + K_2 \;.$$

3. Výslednou podobu hledaného řešení vytvoříme na základě formule (∗):

$$y(x) = K_1 e^{-2x} + K_2 e^{4x} + e^{-2x}(-e^{5x}) + e^{4x}(-5e^{-x}) = K_1 e^{-2x} + K_2 e^{4x} - 6e^{3x} \ .$$

Příklad 9.3.2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

Řešení:

1. Charakteristická rovnice $r^2 - 2r + 1 = 0$ má dvojnásobný kořen $r = 1$, což vede k fundamentálnímu systému $y_1 = e^x, \ y_2 = xe^x$.

2. Wronskian a odvozené determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \ ,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{x^2+1} & (x+1)e^x \end{vmatrix} = -\frac{xe^{2x}}{x^2+1} \ ,$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x^2+1} \ .$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\, dx = -\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + K_1 \ ,$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\, dx = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + K_2 \ .$$

3. Výsledné řešení opět podle obecné formule (∗):

$$y(x) = e^x(K_1 + K_2 x) - \frac{1}{2}e^x \ln(x^2+1) + xe^x \operatorname{arctg} x \ .$$

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Popište strukturu obecného řešení úplné LDR druhého řádu.*

Otázka 2. *Vysvětlete základní princip metody variace konstant pro rovnici 2. řádu.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = x\mathrm{e}^x$.

2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 12y = 14\mathrm{e}^x$.

3. Najděte při počátečních podmínkách $y(1) = \mathrm{e},\ y'(1) = 2\mathrm{e}$ řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = 3\sqrt{x}\mathrm{e}^x \ .$$

4. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + 1} \ .$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 - x\mathrm{e}^x$.

2. $y = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} - \frac{7}{6}\mathrm{e}^x$.

3. $y = \frac{\mathrm{e}^x}{10}(8\sqrt{x^5} + 5x - 3)$.

4. $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{-2x}\ln(1 + \mathrm{e}^x)$.