9.4. Rovnice se speciální pravou stranou

Cíle

V řadě případů lze poměrně pracný výpočet metodou variace konstant nahradit jednodušším postupem, kterému je věnována tato kapitola.

Výklad

Při pozorném studiu předchozího textu pozornějšího studenta zaujme, že ve fundamentálním systému kterékoli lineární rovnice s konstantními koeficienty se mohou vyskytnout pouze přirozené exponenciální funkce, polynomy nebo goniometrické funkce sinus či kosinus, případně jejich součiny. Rovněž lze snadno ukázat, že i derivace jmenovaných funkcí budou téhož typu.

Je-li také pravá strana $b(x)$ funkce exponenciální, goniometrická, popřípadě polynom, lze partikulární integrál $v(x)$ úplné rovnice nalézt jednodušší cestou, než je variace konstant. V principu lze postupovat tak, ža partikulární integrál zvolíme předem, a to téhož typu, jako je pravá strana rovnice, avšak s obecnými koeficienty. Ty následně určíme po dosazení partikulárního integrálu do rovnice porovnáním obou jejích stran. Než tento postup formálně zobecníme, ukážeme jeho realizaci na několika řešených ukázkách.

Řešené úlohy

Příklad 9.4.1. V úloze 9.3.1 v předchozí kapitole jsme hledali obecné řešení rovnice $y'' - 2y' - 8y = 30\mathrm{e}^{3x}$. Provedeme výpočet jiným postupem.

Řešení: Úvodní krok ponecháme beze změny, takže pro kořeny charakteristické rovnice $r_1 = -2,\ r_2 = 4$ můžeme ihned napsat obecné řešení zkrácené rovnice:

$$\hat{y}(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{4x}\ .$$

Partikulární integrál $v(x)$ pro řešení úplné rovnice však nebudeme hledat metodou variace konstant, nýbrž jeho tvar zvolíme ve stejné podobě jako má pravá strana rovnice, tj.

$$v(x) = A\,\mathrm{e}^{3x} \ ,$$

kde A je konstanta, kterou musíme nyní určit. Provedeme to dosazením funkce $v(x)$ a jejích derivací $v' = 3A\,\mathrm{e}^{3x}$, $v'' = 9A\,\mathrm{e}^{3x}$ do úplné rovnice:

$$9A\,\mathrm{e}^{3x} - 6A\,\mathrm{e}^{3x} - 8A\,\mathrm{e}^{3x} = A\,\mathrm{e}^{3x}$$

a po vydělení výrazem e^{3x} dostáváme

$$9A - 6A - 8A = 30 \quad \Rightarrow \quad A = -6 \ .$$

Nalezený partikulární integrál $v(x) = -6\,\mathrm{e}^{3x}$ je identický s výsledkem získaným výrazně pracnějším způsobem v příkladu 9.3.1.

Příklad 9.4.2. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 4y' - 5y = 5x - 6$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 4r - 5 = 0$ má kořeny $r_1 = 5$, $r_2 = -1$, takže obecné řešení zkrácené rovnice je

$$\hat{y}(x) = C_1\mathrm{e}^{5x} + C_2\mathrm{e}^{-x} \ .$$

Na pravé straně zadané rovnice je nyní polynom prvního stupně – zvolíme proto i partikulární integrál v podobě takového polynomu:

$$v(x) = Ax + B \quad \text{a dále} \quad v' = A,\ v'' = 0.$$

Po dosazení do rovnice obdržíme rovnost dvou polynomů

$$-4A - 5Ax - 5B = 5x - 6 \ ,$$

ve které se musí rovnat koeficienty u stejných mocnin proměnné x:

$$\begin{aligned} x^1 &: & -5A &= 5 \ , \\ x^0 &: & -4A - 5B &= -6 \ . \end{aligned}$$

Z této soustavy snadno vypočteme $A = -1,\ B = 2$, takže

$$v(x) = -x + 2$$

a hledané obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} - x + 2\ .$$

Příklad 9.4.3. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 4y' - 5y = 26\cos x$.

Řešení: Zkrácená rovnice je táž jako v předchozí úloze, stejné bude i její řešení $\hat{y}(x)$. Na pravé straně je však goniometrická funkce $b(x) = 26\cos x$, takže i partikulární integrál očekáváme vytvořený z goniometrických funkcí (budou stejného argumentu, ale s obecnými konstantami, z nichž jedna může vyjít nulová):

$$v(x) = A\cos x + B\sin x\ .$$

Tuto funkci a její derivace dosadíme do zadané rovnice:

$$\underbrace{-A\cos x - B\sin x}_{v''} - 4(\underbrace{-A\sin x + B\cos x}_{v'}) - 5(\underbrace{A\cos x + B\sin x}_{v}) = 26\cos x\ .$$

Porovnáme-li nyní koeficienty u goniometrických funkcí stejného typu, obržíme soustavu dvou rovnic pro neznámé $A,\ B$

$$\begin{aligned} \cos x &: & -6A - 4B &= 26\ , \\ \sin x &: & 4A - 6B &= 0\ , \end{aligned}$$

která má jediné řešení $A = -3,\ B = -2$, takže získaný partikulární integrál $v(x) = -3\cos x - 2\sin x$ dává spolu s řešením zkrácené rovnice konečný výsledek

$$y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} - 3\cos x - 2\sin x\ .$$

Výklad

Konstanty, které jsme určovali v předchozích příkladech, byly v podstatě koeficienty polynomů (samotnou konstantu můžeme pokládat za polynom nultého stupně). Odtud pochází nejčastěji užívaný název tohoto postupu – **metoda neurčitých koeficientů**. Její základní variantu lze formulovat takto:
má-li pravá strana lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvar

$$b(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left(p_m(x)\cos\omega x + q_n(x)\sin\omega x\right) ,$$

kde $p_m(x)$, $q_n(x)$ *jsou polynomy stupňů* m, n *se zadanými koeficienty, volíme partikulární integrál ve tvaru*

$$v(x) = x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left(P_M(x)\cos\omega x + Q_M(x)\sin\omega x\right) ,$$

kde M *je rovno většímu z čísel* m, n. *Koeficienty polynomů* $P_M(x)$, $Q_M(x)$ *určíme porovnávací metodou po dosazení partikulárního integrálu dozadané rovnice. Činitel* x^k *souvisí s násobností kořenů charakteristické rovnice – viz případ (IIb) na další straně.*

Posoudíme-li z tohoto pohledu znovu pravé strany trojice předchozích řešených úloh, vidíme, že je

- $\lambda = 3$, $\omega = 0$, $p_0(x) = 30$ pro $v(x) = 30\mathrm{e}^{3x}$,
- $\lambda = 0$, $\omega = 0$, $p_1(x) = 5x - 6$ pro $v(x) = 5x - 6$,
- $\lambda = 0$, $\omega = 1$, $p_0(x) = 26$ pro $v(x) = 26\cos x$.

Povšimněme si těchto typických základních variant blíže, přičemž je třeba zvlášť upozornit na situace, kdy je výraz $\lambda \pm \mathrm{i}\omega$ roven některému z kořenů charakteristické rovnice $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$.

(I) Pravá strana rovnice je exponenciální funkce $c.\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda \neq 0$:

(a) Jestliže λ není kořenem charakteristické rovnice, pak $v(x) = A\mathrm{e}^{\lambda x}$.

(b) Je-li λ kořenem charakteristické rovnice, pak $v(x) = Ax^k e^{\lambda x}$, kde k je násobnost kořene λ.

Konstantu A určíme po dosazení do rovnice porovnáním koeficientů u výrazů $e^{\lambda x}$. Variantu (Ia) jsme viděli v příkladu 9.4.1., variantu (Ib) demonstruje úloha 9.4.4.

(II) Pravá strana rovnice je polynom m-tého stupně

$$b(x) = p_m(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

(je tedy $\lambda = \omega = 0$).

(a) Jestliže $\lambda = 0$ není kořenem charakteristické rovnice, pak

$$v(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \;;$$

(b) Je-li $\lambda = 0$ kořenem charakteristické rovnice, pak

$$v(x) = x^k \left(A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \right) \;,$$

kde $k = 1, 2$ je násobnost nulového kořene. Koeficienty $A_0, \ldots, A_m$ určíme v obou případech po dosazení do rovnice porovnáním koeficientů u stejných mocnin x. Variantu (IIa) jsme řešili v příkladu 9.4.2., s variantou (IIb) se můžeme seznámit v úloze 9.4.5.

(III) Pravá strana rovnice je výraz obsahující goniometrické funkce ve tvaru

$$b(x) = c \cos \omega x + d \sin \omega x \;,$$

v němž jedno z čísel c, d může být rovno nule.

(a) Není-li číslo $\mathrm{i}\omega$ kořenem charakteristické rovnice, pak

$$v(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x \;;$$

(b) Je-li číslo $\mathrm{i}\omega$ kořenem charakteristické rovnice, pak

$$v(x) = x \left(A \cos \omega x + B \sin \omega x \right) \;.$$

Konstanty A, B se určí po dosazení do rovnice porovnáním koeficentů u funkcí $\sin \omega x$ a $\cos \omega x$. Jako ukázku prvního typu jsme uvedli příklad 9.4.3., varianta (IIIb) je součástí řešené úlohy na soustavu diferenciálních rovnic v další kapitole.

Řešené úlohy

Příklad 9.4.4. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - y' - 12y = 7\mathrm{e}^{-3x}$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - r - 12 = 0$ má kořeny $r_1 = 4,\ r_2 = -3$, řešení zkrácené rovnice je

$$\hat{y}(x) = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{-3x}\ .$$

Pravá strana $b(x) = 7\mathrm{e}^{-3x}$ vede na první pohled k odhadu partikulárního integrálu $v(x) = A\mathrm{e}^{-3x}$. Provedeme-li ovšem jeho dosazení do rovnice, dostáváme

$$9A\mathrm{e}^{-3x} + 3A\mathrm{e}^{-3x} - 12A\mathrm{e}^{-3x} = 7\ , \qquad \text{tj.} \quad 0 = 7.$$

Odtud ovšem nelze koeficient A určit. Důvodem je skutečnost, že pro kořen charakteristické rovnice $r_2 = -3$ máme stejné hodnoty parametrů, jaké má pravá strana $b(x) = 7\mathrm{e}^{-3x}$, kde $\lambda = -3 = \alpha,\ \omega = 0 = \beta$. Potvrzuje to skutečnost, že funkce e^{-3x} již patří do fundamentálního systému zkrácené rovnice. Zvolíme-li však

$$v(x) = Ax\mathrm{e}^{-3x}$$

(analogicky jako v případě násobného kořene), bude

$$v' = A\mathrm{e}^{-3x}(1 - 3x), \qquad v'' = -3A\mathrm{e}^{-3x}(2 - 3x)\ ,$$

a po dosazení do rovnice

$$-3A\mathrm{e}^{-3x}(2 - 3x) - A\mathrm{e}^{-3x}(1 - 3x) - 12Ax\mathrm{e}^{-3x} = 7\mathrm{e}^{-3x}\ .$$

Po roznásobení se vyruší členy obsahující výraz $x\mathrm{e}^{-3x}$ a zůstane rovnice

$$-7A\mathrm{e}^{-3x} = 7\mathrm{e}^{-3x}\,, \qquad \text{odkud} \qquad A = -1\,.$$

Výsledkem je tudíž partikulární integrál $v(x) = -x\mathrm{e}^{-3x}$ a obecné řešení ve tvaru

$$y(x) = \hat{y} + v(x) = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} - x\mathrm{e}^{-3x}\,.$$

Příklad 9.4.5. Najděme obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = x$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 2r = 0$ má kořeny $r_1 = 2,\ r_2 = 0$, řešení zkrácené rovnice je

$$\hat{y}(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\,.$$

Pravá strana $b(x) = x$ je polynom prvního stupně, proto by bylo logické zvolit partikulární integrál $v(x) = A_1x + A_0$. Protože je však $\lambda = 0 = r_2$, musíme podle varianty (IIb) vzít

$$v(x) = x(A_1x + A_0) = A_1x^2 + A_0x\,.$$

Derivace této funkce snadno vypočteme a dosadíme do rovnice:

$$2A_1 - 2(2A_1x + A_0) = x\,,$$

odkud $A_1 = -\frac{1}{4},\ A_0 = \frac{1}{4}$. Konečná podoba řešení pak bude

$$y(x) = \hat{y} + v(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\,.$$

Poznámka

Metoda neurčitých koeficientů připouští i pravé strany ve tvaru součtů exponenciálních a goniometrických funkcí a polynomů. Pod názvem ***princip superpozice*** *se s tímto zobecněním můžete seznámit v doporučené literatuře.*

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Jaké typy funkcí zahrnujeme pod označení speciální pravá strana a proč?*

Otázka 2. *V čem spočívá použití metody neurčitých koficientů při řešení LDR se speciální pravou stranou?*

Otázka 2. *Jak souvisí kořeny charakteristické rovnice s volbou partikulárního integrálu?*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 5y' + 6y = b(x)$, je-li

a) $b(x) = x^2 + 5x - 3$, b) $b(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$.

2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = b(x)$, je-li

a) $b(x) = x^3 + 1$, b) $b(x) = (x + 1)\mathrm{e}^x$.

3. Najděte obecná řešení rovnic:

a) $y'' - 2y' + 10y = 39 \sin 2x$, b) $4y'' - 4y' + y = 17 \cos 2x$.

4. Zdůvodněte, proč lze ve cvičných úlohách 1 a 2 na konci kapitoly 9.3 postupovat také metodou neurčitých koeficientů. Najděte touto metodou jejich řešení.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + v(x)$, kde

a) $v(x) = \frac{1}{54}(9x^2 + 30x - 55)$, b) $v(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\mathrm{e}^{-2x}$.

2. $y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 x \mathrm{e}^{2x} + v(x)$, kde

a) $v(x) = \frac{1}{8}(2x^3 + 6x^2 + 9x + 8)$, b) $v(x) = (x+3)\mathrm{e}^x$.

3. a) $y = \mathrm{e}^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 2\cos 2x + 3 \sin 2x$,

b) $y = C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{15}{17}\cos 2x - \frac{8}{17}\sin 2x$.