9.5. Soustavy diferenciálních rovnic

Cíle

Budeme se nyní zabývat úlohami, v nichž je cílem najít dvojici funkcí $y(x),\ z(x)$, pro které jsou zadány dvě lineární rovnice prvního řádu, obsahující tyto funkce a jejich derivace.

Výklad

Omezíme-li se na **lineární soustavy s konstantními koeficienty**, můžeme základní úlohu zadat ve tvaru

$$\begin{aligned} a_1y' + a_2z' + a_3y + a_4z &= b_1(x)\ , \\ c_1y' + c_2z' + c_3y + c_4z &= b_2(x)\ , \end{aligned}$$

kde $a_1, \ldots, a_4,\ c_1, \ldots, c_4$ jsou reálné konstanty a $b_1(x),\ b_2(x)$ známé funkce (pravé strany soustavy). Je-li specielně $b_1(x) = b_2(x) = 0$, hovoříme o **homogenní soustavě rovnic**.

Řešení takovéto (malé) soustavy nevyžaduje hlubší teoretické poznatky nezbytné pro úlohy s větším počtem neznámých, tj. i rovnic. **Eliminační metodou** můžeme totiž tuto soustavu převést na diferenciální rovnici druhého řádu pro jednu z neznámých funkcí a využít tak dříve získané znalosti. Postup bude zřejmý po prostudování následujících řešených úloh.

Řešené úlohy

Příklad 9.5.1. Máme najít funkce $y(x)$ a $z(x)$, které jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} y' - 4z' + 2y - 8z &= 0, \\ z' - y + z &= 0 \end{aligned}$$

při těchto počátečních podmínkách: $y(0) = 3,\ z(0) = 2$.

Řešení: Druhá z rovnic této homogenní soustavy je podstatně jednodušší, proto z ní snadno vyjádříme funkci y a následně její derivaci:

$$y = z' + z\,, \qquad y' = z'' + z'\,.$$

Po dosazení do první rovnice a úpravě máme diferenciální rovnici druhého řádu bez pravé strany pro funkci $z(x)$:

$$z'' - z' - 6z = 0\,.$$

Její charakteristická rovnice $r^2 - r - 6 = 0$ má kořeny $r_1 = -2$, $r_2 = 3$, kterým odpovídá obecné řešení

$$z(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x} \quad \text{a jeho derivace} \quad z'(x) = -2C_1\,\mathrm{e}^{3x} + 3C_2\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Funkci $y(x)$ vytvoříme pomocí vztahu, který jsme použili úvodem při eliminaci:

$$y(x) = z' + z = -C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + 4C_2\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Nyní zbývá určit z počátečních podmínek konstanty C_1 a C_2. Položíme-li $x = 0$ v obecném řešení

$$\begin{aligned} y(x) &= -C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + 4C_2\,\mathrm{e}^{3x}\,, \\ z(x) &= C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\,, \end{aligned}$$

obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} 3 &= -C_1 + 4C_2\,, \\ 2 &= C_1 + C_2\,. \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou hodnoty $C_1 = C_2 = 1$, takže můžeme napsat hledaný výsledek počáteční úlohy:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= 4\,\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-2x}\,, \\ z_p(x) &= \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Příklad 9.5.2. Máme najít obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} y' + y - z &= -\cos x\,, \\ z' + 2y - z &= -\sin x\,. \end{aligned}$$

Řešení: Tentokrát jde o nehomogenní soustavu s pravými stranami tvořenými goniometrickými funkcemi. Pro eliminaci je nejvýhodnější vyjádřit z první rovnice funkci $z(x)$:

$$z = y' + y + \cos x\,, \qquad z' = y'' + y' - \sin x\ .$$

Dosazením do druhé rovnice získáme po úpravě diferenciální rovnici druhého řádu s pravou stranou

$$y'' + y = \cos x\ .$$

Charakteristická rovnice $r^2+1 = 0$ má kořeny $r_{1,2} = \pm\mathrm{i}$, kterým odpovídá obecné řešení zkrácené rovnice $y'' + y = 0$ ve tvaru lineární kombinace goniometrických funkcí

$$\hat{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

(protože $\alpha = 0$, $\beta = 1$ – viz kap. 9.2). Úplnou rovnici můžeme řešit metodou neurčitých koeficientů, neboť na pravé straně je funkce $\cos x$. Pro ni ale vychází $\lambda = 0 = \alpha$, $\omega = 1 = \beta$, a proto musíme v souladu s teorií v kapitole 9.4 zvolit partikulární řešení ve tvaru

$$v(x) = x(A\cos x + B\sin x)\ .$$

Protože její druhá derivace je (ověřte samostatně výpočtem)

$$v''(x) = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x)\ ,$$

dostáváme po dosazení do úplné rovnice

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x\ .$$

Zde porovnáme koeficienty u jednotlivých goniometrických funkcí:

$$\begin{array}{lrcl} \cos x\ : & 2B & = & 1\ , \\ \sin x\ : & -2A & = & 0\ , \end{array}$$

takže $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $v(x) = \frac{1}{2}x\sin x$ a můžeme napsat výsledný tvar funkce $y(x)$:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x\ .$$

Výpočet funkce $z(x)$ ze vztahu $z = y' + y + \cos x$ je už pouze technický problém, který vede k výsledku

$$z = (C_2 + C_1)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x + \frac{1}{2}(x+1)\sin x + \frac{1}{2}(2x+1)\cos x\ .$$

Závěrem je vhodné si povšimnout, že podobně jako byly v zadání funkce $y(x)$ a $z(x)$ spolu vázány v rovnicích, jsou jejich výsledené tvary propojeny prostřednictvím konstant.

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Popište rozdíl mezi homogenní a nehomogenní soustavou lineárních diferenciálních rovnic.*

Otázka 2. *Jaký je účel použití eliminační metody při řešení soustav rovnic?*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Řešte homogenní soustavy:

a) $$\begin{aligned} y' &= 2y + z, \\ z' &= 3y + 4z \end{aligned}$$
b) $$\begin{aligned} y' + z' &= 4y - 2z, \\ y' - z' &= -2y - 4z \end{aligned}$$

2. Řešte nehomogenní soustavy:

a) $$\begin{aligned} y' + 2z' - y + 6z &= -\mathrm{e}^{2t}, \\ z' + y - z &= \mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$
b) $$\begin{aligned} 2y' + z' - 3z - y &= 2x - 1, \\ y' - z' + 4y &= x + 1 \end{aligned}$$

3. Najděte řešení soustav při zadaných počátečních podmínkách:

a) $$\begin{aligned} y' + z' &= y + 5z, \\ z' &= -y + 4z \end{aligned} \qquad y(0) = 1\,, z(0) = 2$$

b) $$\begin{aligned} y' - z &= \mathrm{tg}^2 x + 1, \\ z' + y &= \mathrm{tg}\, x \end{aligned} \qquad y(0) = 2\,, z(0) = -2$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{5x}\,, \quad z = -C_1 \mathrm{e}^{x} + 3C_2 \mathrm{e}^{5x}$

b) $y = C_1 \mathrm{e}^{x} \cos 3x + C_2 \mathrm{e}^{x} \sin 3x\,, \quad z = C_1 \mathrm{e}^{x} \sin 3x - C_2 \mathrm{e}^{x} \cos 3x$

2. a) $y = -4C_1 \mathrm{e}^{5x} + 2C_2 \mathrm{e}^{-x} + \frac{11}{9} \mathrm{e}^{2x}\,, \quad z = C_1 \mathrm{e}^{5x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} - \frac{2}{9} \mathrm{e}^{2x}$

b) $y = C_1 \mathrm{e}^{x} \cos 3x + C_2 \mathrm{e}^{x} \sin 3x\,, \quad z = C_1 \mathrm{e}^{x} \sin 3x - C_2 \mathrm{e}^{x} \cos 3x$

3. a) $y = (x+1)\mathrm{e}^{3x}\,, \quad z = (x+2)\mathrm{e}^{3x}$

b) $y = -4 \sin x + \operatorname{tg} x\,, \quad z = -4 \cos x + 2$