

## 9.6. Shrnutí ke kapitole 9

### Shrnutí lekce



Postup při řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty sestává ze dvou kroků:

1. vyřešíme zkrácenou rovnici prostřednictvím kořenů charakteristické rovnice  
→  $\hat{y}(x)$  (kap. 9.2);
2. najdeme partikulární integrál  $v(x)$  úplné rovnice  
→  $y(x) = \hat{y} + v(x)$ .

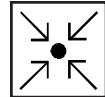
Tvar partikulárního integrálu  $v(x)$  závisí současně

♣ na kořenech charakteristické rovnice,

♣ na podobě pravé strany  $b(x)$ :

- $b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos \omega x + q_n(x) \sin \omega x)$  ,  
kde  $p_m(x)$ ,  $q_n(x)$  jsou mnohočleny → řešíme metodou neurčitých koeficientů (kap. 9.4),
- $b(x)$  má jiný tvar (obsahuje například zlomky, odmocniny nebo jiné než výše uvedené funkce) → řešíme metodou variace konstant (kap. 9.3).

Soustavy dvou LDR prvního řádu převádíme eliminační metodou na řešení jediné rovnice druhého řádu - kap. 9.5.

**Úlohy k samostatnému řešení**

**1.** Najděte obecná řešení rovnic:

a)  $y'' + y' - 2y = 0 ,$

b)  $y'' + 6y' + 13y = 0 ,$

c)  $4y'' - 20y' + 25y = 0 .$

**2.** Najděte řešení počátečních úloh:

a)  $y'' - 4y' + 3y = 0 , \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10 ,$

b)  $y'' + 4y' + 29y = 0 , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15 ,$

c)  $4y'' + 4y' + y = 0 , \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 .$

**3.** Najděte obecná řešení rovnic:

a)  $2y'' + y' - y = 2e^x ,$

b)  $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2} \cos 2x ,$

c)  $y'' + y = -\cot^2 x ,$

d)  $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3 .$

**4.** Najděte řešení počátečních úloh:

a)  $y'' - y = 2(1-x) , \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 ,$

b)  $y'' + y = -\sin 2x , \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 1 ,$

c)  $y'' + 4y = \sin^2 x , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 .$

**Výsledky úloh k samostatnému řešení**

**1.** a)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x},$       b)  $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x),$

c)  $y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{5}{2}x}.$

**2.** a)  $y = 4e^x + 2e^{3x},$       b)  $y = 3e^{-2x} \sin 5x,$       c)  $y = e^{-\frac{x}{2}}(x+2).$

- 3.** a)  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x,$   
b)  $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x,$   
c)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2 + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|,$   
d)  $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$
- 4.** a)  $y = e^x + x^2,$   
b)  $y = \frac{1}{3} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x - \cos x,$   
c)  $y = \frac{1}{8}(1 - x \sin 2x - \cos^3 2x).$

**Kontrolní test**

**Úloha 1.** Funkce  $y(x)$  je řešením počáteční úlohy

$$y'' = 2, \quad y(-2) = 0, \quad y'(-2) = -1 .$$

Její funkční hodnota v bodě  $x = -1$  je

- a) 1 ,      b) -1 ,      c) 0 ,      d) 2 .

**Úloha 2.** Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je obecným řešením rovnice

$$y'' + y = \cos^2 x .$$

(Pozn.: po vhodné úpravě lze řešit i jako rovnici se speciální pravou stranou.)

- a)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}(\sin 2x - 11 \cos 2x)$  ,  
 b)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}(1 + \sin^2 x)$  ,  
 c)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}(1 + \sin^2 x)$  ,  
 d)  $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{3}(\sin 2x - 11 \cos 2x)$  .

**Úloha 3.** Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je řešením počáteční úlohy

$$y'' - y = -\frac{16}{(e^x + e^{-x})^3} , \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0 .$$

- a)  $y = e^x - e^{-x} + \frac{2}{e^x - e^{-x}}$  ,  
 b)  $y = e^x + e^{-x} + 2x(e^x - e^{-x})$  ,  
 c)  $y = e^x - e^{-x} - 2x(e^x + e^{-x})$  ,  
 d)  $y = e^x + e^{-x} + \frac{2}{e^x + e^{-x}}$  .

**Úloha 4.** Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je řešením počáteční úlohy

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} , \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 .$$

- a)  $y = (1-x)\cos x - \sin x \ln \cos x$  ,  
 b)  $y = (1-x)\cos x + \sin x \ln \cos x$  ,  
 c)  $y = (1+x)\cos x + \cos x \ln \cos x$  ,  
 d)  $y = (1+x)\cos x - \cos x \ln \cos x$  .

**Úloha 5.** Jsou dány rovnice I – IV se speciální pravou stranou a partikulární integrály  $v_1(x)$  až  $v_4(x)$ :

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & y'' - y' - 2y = xe^{-x}, & v_1(x) = (Ax + B)e^{-x}, \\ \text{II.} & y'' + y' - 2y = e^{-x}, & v_2(x) = (Ax^2 + Bx)e^{-x}, \\ \text{III.} & y'' + y' - 2y = xe^{-x}, & v_3(x) = Ae^{-x}, \\ \text{IV.} & y'' - y' - 2y = e^{-x}, & v_4(x) = Axe^{-x}. \end{array}$$

Které dvojice k sobě náleží při řešení rovnic metodou neurčitých koeficientů?

- a)  $I - v_1, \quad II - v_3, \quad III - v_2, \quad IV - v_4,$   
 b)  $I - v_2, \quad II - v_4, \quad III - v_2, \quad IV - v_1,$   
 c)  $I - v_2, \quad II - v_3, \quad III - v_1, \quad IV - v_4,$   
 d)  $I - v_4, \quad II - v_3, \quad III - v_1, \quad IV - v_2.$

**Úloha 6.** Určete, který z uvedených výsledků je obecným řešením diferenciální rovnice  $4y'' + 4y' + 17y = 289x^2 + 19$ :

- a)  $y = e^{2x}(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}) - 17x^2 + 8x + 5$  ,  
 b)  $y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 17x^2 - 8x - 5$  ,  
 c)  $y = e^{-2x}(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}) - 17x^2 + 8x + 5$  ,  
 d)  $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-2x} + 17x^2 - 8x - 5$  .

**Úloha 7.** Určete, který z uvedených výsledků je řešením počáteční úlohy

$$y'' - 4y' + 3y = 72 \sin 3x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3.$$

- a)  $y = 5e^x - 3e^{3x} + 3 \cos 3x - 5 \sin 3x ,$   
 b)  $y = -3e^x + 5e^{3x} + 3 \cos 3x + 5 \sin 3x ,$   
 c)  $y = 5e^x + 3e^{3x} - 3 \cos 3x - 5 \sin 3x ,$   
 d)  $y = 3e^x + 5e^{3x} - 3 \cos 3x - 5 \sin 3x .$

**Úloha 8.** Funkce  $y(t)$  je řešením počáteční úlohy

$$y'' + 6y' + 9y = 18e^{-3t}, \quad y(0) = -3 , \quad y'(0) = 12.$$

V bodě  $t = \frac{1}{3}$  nabývá hodnoty

- a)  $\frac{1}{e},$       b)  $\frac{e}{3},$       c)  $-\frac{3}{e},$       d)  $-\frac{1}{e},$

**Úloha 9.** Funkce  $y(t)$  je řešením počáteční úlohy

$$16y'' + 9y = 11 \cos 2x, \quad y(2\pi) = 0 , \quad y'(2\pi) = 0.$$

V bodě  $x = \frac{2\pi}{3}$  nabývá hodnoty

- a)  $-0,1 ,$       b)  $0 ,$       c)  $0,01 ,$       d)  $-0,01 .$

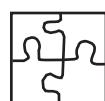
**Úloha 10.** Funkce  $y(t)$  a  $z(t)$  spolu splňují soustavu

$$\begin{aligned} y' - z' + 2y &= -t - 2 , \\ z' - 3y' + z &= 3 . \end{aligned}$$

a počáteční podmínky  $y(0) = -1 , z(0) = 2.$  Vypočteme-li obě funkce a vyjádříme výraz  $z(t) - 2y(t),$  obdržíme jeden z následujících výsledků:

- a)  $t + 3 ,$       b)  $-t - 3 ,$       c)  $t ,$       d)  $3 .$

### Výsledky testu



Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Správná odpověď	c)	b)	d)	a)	c)	b)	d)	d)	a)	a)