9.6. Shrnutí ke kapitole 9

Σ

Shrnutí lekce

Postup při řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty sestává ze dvou kroků:

1. vyřešíme zkrácenou rovnici prostřednictvím kořenů charakteristické rovnice

$\longrightarrow$ $\hat{y}(x)$ (kap. 9.2);

2. najdeme partikulární integrál $v(x)$ úplné rovnice

$\longrightarrow$ $y(x) = \hat{y} + v(x)$.

Tvar partikulárního integrálu $v(x)$ závisí současně

♣ na kořenech charakteristické rovnice,

♣ na podobě pravé strany $b(x)$:

- $b(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \left(p_m(x) \cos \omega x + q_n(x) \sin \omega x \right)$,

  kde $p_m(x)$, $q_n(x)$ jsou mnohočleny $\longrightarrow$ řešíme metodou neurčitých koeficientů (kap. 9.4),

- $b(x)$ má jiný tvar (obsahuje například zlomky, odmocniny nebo jiné než výše uvedené funkce) $\longrightarrow$ řešíme metodou variace konstant (kap. 9.3).

Soustavy dvou LDR prvního řádu převádíme eliminační metodou na řešení jediné rovnice druhého řádu - kap. 9.5.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecná řešení rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & y'' + y' - 2y = 0\,, \\ \text{b)} \quad & y'' + 6y' + 13y = 0\,, \\ \text{c)} \quad & 4y'' - 20y' + 25y = 0\,. \end{aligned}$$

2. Najděte řešení počátečních úloh:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & y'' - 4y' + 3y = 0\,, && y(0) = 6, && y'(0) = 10\,, \\ \text{b)} \quad & y'' + 4y' + 29y = 0\,, && y(0) = 0, && y'(0) = 15\,, \\ \text{c)} \quad & 4y'' + 4y' + y = 0\,, && y(0) = 2, && y'(0) = 0\,. \end{aligned}$$

3. Najděte obecná řešení rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^x\,, \\ \text{b)} \quad & y'' + 2y' + 5y = -\tfrac{17}{2}\cos 2x\,, \\ \text{c)} \quad & y'' + y = -\mathrm{cotg}^2\, x\,, \\ \text{d)} \quad & y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3\,. \end{aligned}$$

4. Najděte řešení počátečních úloh:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & y'' - y = 2(1-x)\,, && y(0) = 1, && y'(0) = 1\,, \\ \text{b)} \quad & y'' + y = -\sin 2x\,, && y(\pi) = 1, && y'(\pi) = 1\,, \\ \text{c)} \quad & y'' + 4y = \sin^2 x\,, && y(0) = 0, && y'(0) = 0\,. \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x}$, b) $y = \mathrm{e}^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$,
c) $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}$.

2. a) $y = 4\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{3x}$, b) $y = 3\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x$, c) $y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+2)$.

3. a) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^x$,

b) $y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x$,

c) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2 + \cos x\, \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|$,

d) $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

4. a) $y = \mathrm{e}^x + x^2$,

b) $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x$,

c) $y = \frac{1}{8}(1 - x\sin 2x - \cos^3 2x)$.

Kontrolní test

Úloha 1. Funkce $y(x)$ je řešením počáteční úlohy

$$y'' = 2, \quad y(-2) = 0, \quad y'(-2) = -1 \ .$$

Její funkční hodnota v bodě $x = -1$ je

a) 1 , b) -1 , c) 0 , d) 2 .

Úloha 2. Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je obecným řešením rovnice

$$y'' + y = \cos^2 x \ .$$

(Pozn.: po vhodné úpravě lze řešit i jako rovnici se speciální pravou stranou.)

a) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}(\sin 2x - 11 \cos 2x)$,

b) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}(1 + \sin^2 x)$,

c) $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{3}(1 + \sin^2 x)$,

d) $y = \mathrm{e}^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{3}(\sin 2x - 11 \cos 2x)$.

Úloha 3. Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je řešením počáteční úlohy

$$y'' - y = -\frac{16}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^3} \ , \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0 \ .$$

a) $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$,

b) $y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 2x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$,

c) $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$,

d) $y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

Úloha 4. Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je řešením počáteční úlohy

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \ , \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \ .$$

a) $y = (1-x)\cos x - \sin x \,\ln\cos x$,

b) $y = (1-x)\cos x + \sin x \,\ln\cos x$,

c) $y = (1+x)\cos x + \cos x \,\ln\cos x$,

d) $y = (1+x)\cos x - \cos x \,\ln\cos x$.

Úloha 5. Jsou dány rovnice I – IV se speciální pravou stranou a partikulární integrály $v_1(x)$ až $v_4(x)$:

$$
\begin{array}{rrcllcl}
\text{I.} & y'' - y' - 2y & = & x\mathrm{e}^{-x}\ , & v_1(x) & = & (Ax+B)\mathrm{e}^{-x}\ ,\\
\text{II.} & y'' + y' - 2y & = & \mathrm{e}^{-x}\ , & v_2(x) & = & (Ax^2+Bx)\mathrm{e}^{-x}\ ,\\
\text{III.} & y'' + y' - 2y & = & x\mathrm{e}^{-x}\ , & v_3(x) & = & A\mathrm{e}^{-x}\ ,\\
\text{IV.} & y'' - y' - 2y & = & \mathrm{e}^{-x}\ , & v_4(x) & = & Ax\mathrm{e}^{-x}\ .
\end{array}
$$

Které dvojice k sobě náleží při řešení rovnic metodou neurčitých koeficientů?

a) $I - v_1$, $II - v_3$, $III - v_2$, $IV - v_4$,

b) $I - v_2$, $II - v_4$, $III - v_2$, $IV - v_1$,

c) $I - v_2$, $II - v_3$, $III - v_1$, $IV - v_4$,

d) $I - v_4$, $II - v_3$, $III - v_1$, $IV - v_2$.

Úloha 6. Určete, který z uvedených výsledků je obecným řešením diferenciální rovnice $4y'' + 4y' + 17y = 289x^2 + 19$:

a) $y = \mathrm{e}^{2x}(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}) - 17x^2 + 8x + 5$,

b) $y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 17x^2 - 8x - 5$,

c) $y = \mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}) - 17x^2 + 8x + 5$,

d) $y = C_1\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + 17x^2 - 8x - 5$.

Úloha 7. Určete, který z uvedených výsledků je řešením počáteční úlohy

$$y'' - 4y' + 3y = 72\sin 3x\ , \quad y(0) = 5\ , \quad y'(0) = 3\ .$$

a) $\quad y = 5\mathrm{e}^{x} - 3\mathrm{e}^{3x} + 3\cos 3x - 5\sin 3x$,

b) $\quad y = -3\mathrm{e}^{x} + 5\mathrm{e}^{3x} + 3\cos 3x + 5\sin 3x$,

c) $\quad y = 5\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{3x} - 3\cos 3x - 5\sin 3x$,

d) $\quad y = 3\mathrm{e}^{x} + 5\mathrm{e}^{3x} - 3\cos 3x - 5\sin 3x$.

Úloha 8. Funkce $y(t)$ je řešením počáteční úlohy

$$y'' + 6y' + 9y = 18\mathrm{e}^{-3t}, \quad y(0) = -3\ , \quad y'(0) = 12.$$

V bodě $t = \frac{1}{3}$ nabývá hodnoty

a) $\frac{1}{\mathrm{e}}$, b) $\frac{\mathrm{e}}{3}$, c) $-\frac{3}{\mathrm{e}}$, d) $-\frac{1}{\mathrm{e}}$,

Úloha 9. Funkce $y(t)$ je řešením počáteční úlohy

$$16y'' + 9y = 11\cos 2x, \quad y(2\pi) = 0\ , \quad y'(2\pi) = 0.$$

V bodě $x = \frac{2\pi}{3}$ nabývá hodnoty

a) $-0,1$, b) 0, c) $0,01$, d) $-0,01$.

Úloha 10. Funkce $y(t)$ a $z(t)$ spolu splňují soustavu

$$\begin{aligned} y' - z' + 2y &= -t - 2\ , \\ z' - 3y' + z &= 3\ . \end{aligned}$$

a počáteční podmínky $y(0) = -1$, $z(0) = 2$. Vypočteme-li obě funkce a vyjádříme výraz $z(t) - 2y(t)$, obdržíme jeden z následujících výsledků:

a) $t + 3$, b) $-t - 3$, c) t , d) 3 .

Výsledky testu

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Správná odpověď	c)	b)	d)	a)	c)	b)	d)	d)	a)	a)