Numerická matematika – neřešené příklady

Pavel Ludvík, Zuzana Morávková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
Vysoká škola báňská – Technická Univerzita Ostrava

Nelineární rovnice

Zjistěte počet kořenů zadané rovnice. Všechny kořeny spočítejte Newtonovou metodou s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$ a jeden z kořenů metodou půlení intervalu s přesností $\varepsilon = 10^{-3}$. Výsledky porovnejte.

1. $$5e^x - xe^x - 4 = 0$$

2. $$(x-1)^2 - \cos(x) - 2 = 0$$

3. $$x - 3\sin(x) - 1 = 0$$

4. $$\ln(x) + x^2 - 5x + 5 = 0$$

5. $$x^2 - \ln(x+1) - 0.2 = 0$$

6. $$4\cos^2(x) - x^2 + x = 0$$

7. $$x^2 - x - \sin(x) - 1 = 0$$

8. $$(x-0.1)^4 - \sin^2(x) - 1 = 0$$

9. $$\ln(x) - (x-3)^2 = 0$$

10. $$x^2 - 7\ln(x) - 3 = 0$$

11. $$(x-1)^2 - 2\sin(x) = 0$$

12. $$e^x - 7x^2 + 2 = 0$$

13. $$e^x - x - 4 = 0$$

14. $$\ln(x+2) - x^2 + 2.5 = 0$$

15. $$(x-1)^4 - \ln(x) - 1 = 0$$

16.
$$5\ln(x)^2 + (x-2)^3 = 0$$

17.
$$x^2 - 3x + 2 - \mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

18.
$$x^2 - 2x - \mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

19.
$$3\cos(x) + 1 + \sqrt{x} = 0$$

20.
$$3\sin^2(x) - 1 - \sqrt{x} = 0$$

21.
$$7\ln^2(x) - 1 - \sqrt{x} = 0$$

22.
$$\arccos\left(\frac{x}{2}\right) + 3x^2 - 4 = 0$$

Lineární soustavy - iterační metody

Soustavu lineárních rovnic vyřešte Gauss-Seidelovou iterační metodou s přesností $\varepsilon = 10^{-2}$.

1. $$\begin{aligned} 8x_1 - x_2 + 5x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 21 \\ 10x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -14 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 35 \\ -4x_1 + x_2 + 6x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -9 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 17 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -8 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 14 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} -4x_1 + 10x_2 + 5x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 18 \\ 2x_1 + 8x_2 + 8x_3 &= 27 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 27 \\ 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 &= 26 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 30 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 &= -14 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 &= -15 \\ 10x_1 + x_2 + 9x_3 &= -23 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= -13 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 24 \\ 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -15 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= -5 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= -35 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 12 \\ -2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 5 \\ 7x_1 + 10x_2 - 5x_3 &= 18 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= -5 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= -5 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= -4 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= -8 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -12 \\ 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 &= -41 \\ 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -23 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} -x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 15 \\ 4x_1 - 4x_2 + 10x_3 &= -38 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -7 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= -39 \\ 8x_1 + 12x_2 - 4x_3 &= -30 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} -3x_1 + 9x_2 + 5x_3 &= 34 \\ -3x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 46 \\ 6x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 58 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 - 6x_3 &= -15 \\ -4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 14 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -14 \end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= -9 \\ 10x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -19 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 - x_3 &= -15 \\ -4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 14 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -14 \end{aligned}$$

Interpolace

Pro uzly x_i a funkční hodnoty y_i dané tabulkou sestavte interpolační polynom
a) v základním tvaru,
b) v Lagrangeově tvaru,
c) v Newtonově tvaru.
Graficky zobrazte zadaná data a polynom v základním tvaru.

1.

x_i	4.5	6	7.5	8	8.5
y_i	-37	44	20.1	34.7	-29.1

2.

x_i	-3	-2.5	-1	0	0.5
y_i	36.7	-12.8	-42.7	-30.1	-45.1

3.

x_i	-3	-2.5	-1.5	-1	0.5
y_i	32.3	-45.4	9.7	44.9	-21.2

4.

x_i	-6.5	-6	-5.5	-5	-3.5
y_i	-23.6	49.9	-28.9	-0.2	-21

5.

x_i	-5.5	-4	-2.5	-1.5	-1
y_i	-48.6	-21.2	31.6	48.5	-48.3

6.

x_i	-3.5	-2.5	-1.5	-1	0.5
y_i	25.3	15.9	-28.6	10.2	10.4

7.

x_i	1	1.5	2.5	3	4
y_i	18.5	17.7	37.6	-48.8	-19

8.

x_i	-6.5	-6	-4.5	-3	-2.5
y_i	-48.9	-27.3	1.6	-4.2	20.3

9.

x_i	-4	-3	-2.5	-2	-1
y_i	27	-18.7	13.8	48.6	0.2

10.

x_i	4.5	6	7.5	8	9.5
y_i	-34.4	-37.8	26.2	22.1	15.1

11.

x_i	-4.5	-3.5	-2	-1.5	-0.5
y_i	-46.5	-41.9	35	-16	-3.4

12.

x_i	-0.5	0	1.5	2.5	4
y_i	49.2	-12.7	3.1	-31.9	0.1

13.

x_i	-6	-5	-3.5	-2	-1.5
y_i	6.5	46.9	-47.7	37	-47.4

14.

x_i	-6	-5.5	-4	-3.5	-2
y_i	2.1	39.5	44.2	-16.5	-6.3

15.

x_i	-2	-1.5	-1	0	1.5
y_i	-14.2	-21.5	36.8	12.6	-25.9

16.

x_i	-5.5	-4.5	-4	-2.5	-1.5
y_i	-47.8	-23.8	-38.4	-43.1	35.2

17.

x_i	-3.5	-3	-1.5	-0.5	0
y_i	-48.8	38.9	36.6	-24.6	6.9

18.

x_i	-0.5	0.5	1	2	3.5
y_i	48	29.1	-34.8	33.3	-30.9

19.

x_i	-1	0.5	2	3	4
y_i	10.8	-32.5	-49.8	29	1.3

20.

x_i	-7.5	-7	-6.5	-5.5	-4.5
y_i	44.1	-35.1	-11.6	-18.9	-33.2

21.

x_i	-0.5	0	1.5	2.5	3.5
y_i	-33.1	2.4	14.1	-48.4	33.6

22.

x_i	-4.5	-3	-2	-1.5	0
y_i	-5.5	-48.8	-19.2	37.5	33.5

Počáteční úlohy pro ODR

Řešte Cauchyovu úlohu Eulerovou metodou a metodou Runge–Kutta 4.řádu s předepsaným krokem $h_1 = 0.1$ a $h_2 = 0.01$.

1. $$y' = \frac{y}{x^2+1} \quad y(0) = 2 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

2. $$y' = 3xy^2 + \frac{y}{x} \quad y(1) = -1 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

3. $$y' = \frac{x^2+y}{x} \quad y(1) = 0 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

4. $$y' = \frac{y}{x} - y^2 \quad y(1) = 1 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

5. $$y' = x - xy \quad y(0) = 3 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

6. $$y' = \frac{3x+y-2}{2-x} \quad y(0) = 4 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

7. $$y' = \sqrt{\frac{y}{x}} \quad y(1) = 4 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

8. $$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x) \quad y(1) = \mathrm{e} \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

9. $$y' = \frac{y+2}{x+3} \quad y(0) = 1 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

10. $$y' = \sin^2(y-x) \quad y(0) = 0 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

11. $$y' = \frac{xy+y}{x} \quad y(1) = \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

12. $$y' = \frac{1-x^2}{xy} \quad y(1) = 2 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

13. $$y' = \mathrm{e}^y - 1 + x \quad y(0) = -2 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

14. $$y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \quad y(1) = 2 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

15.
$$y' = x^3 + \frac{2y}{x} \quad y(1) = 0 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

16.
$$y' = \frac{y^2 \ln x - y}{x} \quad y(1) = 1 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

17.
$$y' = x^2 + 1 + \frac{2xy}{x^2+1} \quad y(0) = 0 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

18.
$$y' = (x+y)^2 \quad y(0) = 0 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 0, 1 \rangle$$

19.
$$y' = \frac{y}{2\sqrt{x}} \quad y(3) = 3 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 3, 4 \rangle$$

20.
$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad y(3) = 1 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 3, 4 \rangle$$

21.
$$y' = \frac{y}{x^2+1} \quad y(1) = 4 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle 1, 2 \rangle$$

22.
$$y' = 3xy^2 + \frac{y}{x} \quad y(-2) = 1 \qquad \text{na intervalu } x \in \langle -2, -1 \rangle$$