Diferenciální rovnice prvního řádu

KMDG, FS, VŠB-TUO

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$Q(y)y' = P(x)$, pokud $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, pak $Q(y)\,\mathrm{d}y = P(x)\,\mathrm{d}x$

Řešení ve tvaru: $\displaystyle\int Q(y)\,\mathrm{d}y = \int P(x)\,\mathrm{d}x + C$

Separovatelné rovnice – základní tvar

Rovnice tvaru $y' = f(x)g(y)$.

Postup řešení:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)g(y) \\ \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y &= f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ pokud } g(y) \neq 0 \\ \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + C \end{aligned}$$

Úprava obecného řešení ve tvaru $\ln|g(y)| = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x + \ln|C|$

$|g(y)| = |C|\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} \Rightarrow g(y) = C\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$

Homogenní diferenciální rovnice

Rovnice tvaru $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$.

Postup řešení:

substituce $\dfrac{y}{x} = z(x) \;\Rightarrow\; y = zx \;\Rightarrow\; y' = z'x + z$

po dosazení:

$$\begin{aligned} z'x + z &= f(z) \\ z'x &= f(z) - z \\ z' &= \frac{1}{x}(f(z) - z) \\ \frac{1}{f(z) - z}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} &= \ln|x| + C \end{aligned}$$

do řešení pro $z(x)$ vrátíme substituci $z = \dfrac{y}{x}$

Lineární diferenciální rovnice – homogenní

Rovnice tvaru $y' + a(x)y = 0 \Rightarrow y' = -a(x)y$, jedná se o separovatelnou rovnici

Řešení ve tvaru: $y = C\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$

Lineární diferenciální rovnice – nehomogenní

Rovnice tvaru $y' + a(x)y = b(x)$, $b(x) \neq 0$

Postup řešení – metoda variance konstanty:

určíme homogenní rovnici příslušné nehomogenní rovnice

$y' + a(x)y = 0$

nalezneme řešení homogenní lineární rovnice

$y = C\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$

aplikujeme varianci konstanty

$C = C(x)$

hledáme řešení ve tvaru

$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$

- funkci y a její derivaci y' dosadíme do původní rovnice a upravíme (členy s $C(x)$ se musí vyrušit)

  $$\underbrace{C'(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}a(x)}_{y'} + a(x)\cdot\underbrace{C(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}}_{y} = b(x)$$

- obdržíme rovnici s neznámou $C'(x)$

  $C'(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} = b(x)$

- funkci vyjádříme, zintegrujeme

  $$C'(x) = b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} \quad\Rightarrow\quad C(x) = \int b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$$

- nalezenou funkci $C(x)$ dosadíme do odhadovaného tvaru a dostaneme hledané řešení

  $$y = \left(\int b(x)\mathrm{e}^{\int a(x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$$

Diferenciální rovnice druhého řádu

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Rovnice tvaru $a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x)$, kde $a_2 \neq 0, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

- $b(x) = 0 \Rightarrow$ zkrácená (homogenní) LDR
- $b(x) \neq 0 \Rightarrow$ nezkrácená (úplná, nehomogenní) LDR

Řešení ve tvaru: $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_1,\ y_2$ jsou dvě lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice
y_p je partikulární řešení nehomogenní rovnice

Homogenní LDR 2. řádu s konstatními koeficienty

Rovnice tvaru $a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$

Charakteristická rovnice $a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0$

$$r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \mathrm{e}^{r_1x},\ y_2 = \mathrm{e}^{r_2x}$$

$$r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \mathrm{e}^{rx},\ y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$$

$$r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

$y_1,\ y_2$ tvoří fundamentální systém řešení

Obecné řešení: $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Nehomogenní LDR 2. řádu – metoda variace konstant

Rovnice tvaru $a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x),\ b(x) \neq 0$

Postup řešení:

určíme homogenní rovnici příslušné nehomogenní rovnice

$a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$

nalezneme řešení homogenní lineární rovnice

$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

aplikujeme varianci konstant

$c_1 = C_1(x),\ c_2 = C_2(x)$

hledáme řešení ve tvaru

$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

Metoda variace konstant – určení funkcí

Funkce $C_1(x),\ C_2(x)$ a jejich derivace $C_1'(x),\ C_2'(x)$ splňují soustavu

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$$

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = \frac{b(x)}{a_2}$$

Řešení soustavy: $C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x,\ C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x,$

kde $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},\ W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{b(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix},\ W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{b(x)}{a_2} \end{vmatrix}.$

nalezené funkce $C_1(x),\ C_2(x)$ dosadíme do odhadovaného tvaru

Obecné řešení: $y(x) = \left(\int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x + C_1\right)y_1(x) + \left(\int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x + C_2\right)y_2(x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Nehomogenní LDR 2. řádu – metoda neurčitých koefcientů

Rovnice tvaru $a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x)$

Speciální tvar pravé strany: $b(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}(p_m(x)\cos\omega x + q_n(x)\sin\omega x)$,
kde $p_m(x), q_n(x)$ jsou polynomy stupňů m, n a $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$

Partikulární řešení: $y_p(x) = x^k\mathrm{e}^{\lambda x}(P_M(x)\cos\omega x + Q_M(x)\sin\omega x)$,
kde $M = \max\{m, n\}$ a $\lambda \pm \mathrm{i}\omega$ je k-násobným kořenem její charakteristické rovnice

Koeficienty polynomů $P_M(x)$ a $Q_M(x)$ určíme srovnávací metodou po dosazení odhadu řešení y_p a jeho derivací $y_p',\ y_p''$ do původní rovnice.

$b(x)$	kořen charakteristické rovnice	$y_p(x)$
$p_m(x)$	$r = 0, k$-násobný	$x^kP_m(x)$
	$r \neq 0$	$P_m(x)$
$\mathrm{e}^{\lambda x}$	$r = \lambda, k$-násobný	$Ax^k\mathrm{e}^{\lambda x}$
	$r \neq \lambda$	$A\mathrm{e}^{\lambda x}$
$\sin\omega x$	$r = \pm\mathrm{i}\omega$	$x(A\sin\omega x + B\cos\omega x)$
$\cos\omega x$	$r \neq \pm\mathrm{i}\omega$	$A\sin\omega x + B\cos\omega x$
$\mathrm{e}^{\lambda x}p_m(x)\sin\omega x$	$r = \lambda \pm \mathrm{i}\omega$	$x\mathrm{e}^{\lambda x}(Q_m(x)\sin\omega x + P_m(x)\cos\omega x)$
$\mathrm{e}^{\lambda x}p_m(x)\cos\omega x$	$r \neq \lambda \pm \mathrm{i}\omega$	$\mathrm{e}^{\lambda x}(Q_m(x)\sin\omega x + P_m(x)\cos\omega x)$

Obecné řešení: $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$