Integrální počet: neurčitý integrál

KMDG, FS, VŠB-TUO

Tabulkové integrály

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$	$F(x)$ je primitivní k $f(x)$
$\int 0\,\mathrm{d}x = C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a \neq 1,\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$
$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$x \in (k\pi, \pi + k\pi)\,,\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\,,\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$x \in (-1, 1)$

Pravidla pro integrování

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + G(x) + C$$

$$\int k f(x)\,\mathrm{d}x = k \int f(x)\,\mathrm{d}x = k\,F(x) + C,\ k \in \mathbb{R}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Užitečné vzorce

$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$x \in (-a, a)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a + x^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{a + x^2}\rvert + C$	$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\int \sqrt{x^2 + a}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} - \frac{a}{2}\ln\left\lvert -x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C$	$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\int f(ax + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$	
$\int f'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^2(x)}{2} + C$	
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{x - \alpha}\,\mathrm{d}x = A\ln\lvert x - \alpha\rvert + C$$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{(1 - k)(x - \alpha)^{k-1}} + C$$

$$\int \frac{B(2x + p)}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = B\ln\lvert x^2 + px + q\rvert + C$$

$$\int \frac{D}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = D\int \frac{\mathrm{d}x}{(x + p/2)^2 + a^2} = \frac{D}{a}\arctan\frac{x + p/2}{a} + C,\ \text{kde } a = \sqrt{q - \tfrac{p^2}{4}}$$

Metoda per partes

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = u(x) & v' = v'(x) \\ u' = u'(x) & v = v(x) \end{vmatrix} = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

typické integrály pro využití per partes

$$\int P(x)a^{bx}\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\sin bx\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\cos bx\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow P(x) = u(x)$$

$$\int P(x)\ln^m x\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\arctan x\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\arcsin x\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow P(x) = v'(x)$$

obrat při per partes

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = h(x) + \alpha\int f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1 - \alpha}h(x) + C$$

Integrální počet: substituce, určitý integrál

KMDG, FS, VŠB-TUO

Substituční metoda

substituce 1. způsob

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} g(x) = t \\ g'(x)\,dx = dt \end{matrix} \right| = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

substituce 2. způsob

$$\int f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f(g(t))g'(t)\,dt = G(t) + C = G(g^{-1}(x)) + C$$

doporučené substituce

1. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$: R lichá v kosinu $\Rightarrow \sin x = t$

R lichá v sinu $\Rightarrow \cos x = t$

R sudá v sinu i kosinu $\Rightarrow \tan x = t$

R obecná $\Rightarrow \tan\frac{x}{2} = t$, pak $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

2. $\int R(x, \sqrt{p^2x^2 + q^2})\,dx \Rightarrow px = q\tan t$

$\int R(x, \sqrt{p^2x^2 - q^2})\,dx \Rightarrow px = \frac{q}{\cos t}$

$\int R(x, \sqrt{q^2 - p^2x^2})\,dx \Rightarrow px = q\sin t$

3. $\int R(x, x^{\frac{1}{k_1}}, \cdots, x^{\frac{1}{k_n}})\,dx \Rightarrow x = t^k$, kde k je nejmenší společný násobek k_i

$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right)\,dx \Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = t^k$

Určitý integrál

výpočet

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a),\ \text{kde } F'(x) = f(x)$$

vlastnosti

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ — pouze pro: $f(x)$ je sudá na $\langle -a, a\rangle$

$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ — pouze pro: $f(x)$ je lichá na $\langle -a, a\rangle$

Per partes a substituce pro určitý integrál

metoda per partes

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} u = u(x) & v' = v'(x) \\ u' = u'(x) & v = v(x) \end{matrix} \right| = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

metoda substituční

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \\ a = g(\alpha),\ b = g(\beta) \end{matrix} \right| = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

Aplikace určitého integrálu

obsah rovinného obrazce

$S = \int_a^b f(x)\,dx$ — $f(x)$ je nezáporná na $\langle a, b\rangle$

$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx$ — $f(x)$ není nezáporná na $\langle a, b\rangle$

$S = \int_a^b g(x) - f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$ — $0 \le f(x) \le g(x)$ pro $\forall x \in \langle a, b\rangle$

$S = \left|\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt\right|$ — $x = \varphi(t),\ y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta\rangle$

délka rovinné křivky

$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ — $f(x)$ a $f'(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$

$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\psi'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}\,dt$ — $x = \varphi(t),\ y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta\rangle$

objem rotačního tělesa

$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ — $f(x)$ je nezáporná na $\langle a, b\rangle$, rotace kolem osy x

$V = \pi\left|\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt\right|$ — $x = \varphi(t),\ y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta\rangle$

povrch pláště rotačního tělesa

$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ — $f(x)$ a $f'(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$, rotace kolem osy x

$P = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\psi'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}\,dt$ — $x = \varphi(t),\ y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, $\varphi,\ \psi$ mají spojité derivace na $\langle \alpha, \beta\rangle$