Lineární algebra

KMDG, FS, VŠB-TUO

Matice

matice $A_{m\times n}$ jednotková matice $E_{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matice $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ $\quad a^\mathsf{T}_{ij} = a_{ji}$

Součet matic $\boldsymbol{C}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n} + \boldsymbol{B}_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobek matice $\boldsymbol{A}$ číslem k $\quad \boldsymbol{B}_{m\times n} = k\,\boldsymbol{A}_{m\times n} \Leftrightarrow b_{ij} = k\,a_{ij}$

Součin matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ $\quad \boldsymbol{C}_{m\times p} = \boldsymbol{A}_{m\times n} \cdot \boldsymbol{B}_{n\times p} \Leftrightarrow$

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \cdots a_{in}\cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}, \quad \forall i,j$$

obecně $\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \qquad (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \qquad (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^\mathsf{T} = \boldsymbol{B}^\mathsf{T}\cdot\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$$

Determinanty

pro $n = 1$ $|\boldsymbol{A}| = a_{11}$

pro $n = 2$ křížové pravidlo $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$

pro $n = 3$ Sarrusovo pravidlo

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - (a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} + a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21})$$

Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku $|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\,|\boldsymbol{A}_{ij}|$

$\boldsymbol{A}_{ij}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce

Vlastnosti determinantu $\quad |\boldsymbol{A}^\mathsf{T}| = |\boldsymbol{A}| \qquad |\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$

Inverzní matice

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

výpočet pomocí determinantu

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}^\mathsf{T} \qquad \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|\boldsymbol{A}_{ij}|$$

výpočet eliminační metodou

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}) \sim \cdots \sim (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1})$$

Maticové rovnice

řešení rovnice typu $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}$$

řešení rovnice typu $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$$

Soustavy lineárních rovnic

Soustava m lineárních rovnic pro n neznámých $x_1, x_2, \ldots x_n \qquad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Gaussova eliminační metoda

1. Vytvoříme rozšířenou matici $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ soustavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
2. Pomocí ekvivalentních úprav převedeme matici $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ na stupňovitý tvar.
3. Zjistíme počet řešení soustavy.
4. Sestavíme soustavu rovnic odpovídající matici ve stupňovitém tvaru.
5. Při řešení této soustavy postupujeme od poslední rovnice k první.

soustava lineárních rovnic s regulární maticí $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ má jediné řešení

Cramerovo pravidlo

$$x_k = \frac{|\boldsymbol{A}_k|}{|\boldsymbol{A}|}$$

$\boldsymbol{A}_k$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ nahrazením k-tého sloupce vektorem $\boldsymbol{b}$

řešení pomocí inverzní matice

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Analytická geometrie v prostoru

KMDG, FS, VŠB-TUO

Součiny vektorů

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3$$

Vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Kolmost $\quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{w}\perp\boldsymbol{u} \,\wedge\, \boldsymbol{w}\perp\boldsymbol{v}$$

Velikost vektoru $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

Obsahy a objemy

Obsah rovnoběžníku o stranách $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$

$$S = |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$$

Obsah trojúhelníku o stranách $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$$

Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$

$$V = |\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})|$$

Objem čtyřstěnu určeného vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$

$$V = \frac{1}{6}\,|\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})|$$

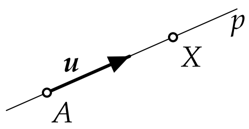
Přímka

Přímka určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a vektorem $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$p : X = A + t\boldsymbol{u}, \quad t\in\mathbb{R}$$

parametrické rovnice přímky

$$p : \begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2, \quad t\in\mathbb{R} \\ z &= a_3 + tu_3 \end{aligned}$$



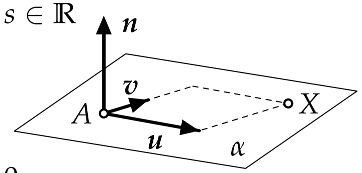
Rovina

Rovina určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\alpha : X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}, \quad t, s\in\mathbb{R}$$

parametrické rovnice roviny

$$\alpha : \begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2, \quad t, s\in\mathbb{R} \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3 \end{aligned}$$



obecná rovnice roviny

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

$\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ je normálový vektor kolmý k rovině α

Střed úsečky a těžiště trojúhelníka

Střed úsečky $AB \quad S = \dfrac{A+B}{2}$

Těžiště trojúhelníka $ABC \quad T = \dfrac{A+B+C}{3}$

Vzdálenosti

Vzdálenost dvou bodů $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Vzdálenost bodu M **od přímky** určené bodem A a vektorem $\boldsymbol{u}$

$$d = \frac{|\boldsymbol{u}\times AM|}{|\boldsymbol{u}|}$$

Vzdálenost bodu M **od roviny** $ax + by + cz + d = 0$

$$d = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Odchylky

Odchylka dvou vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|} \qquad \varphi\in\langle 0, \pi\rangle$$

Odchylka dvou přímek určených vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}$$

Odchylka přímky určené vektorem $\boldsymbol{u}$
od roviny určené normálovým vektorem $\boldsymbol{n}$

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$$

Odchylka dvou rovin určených normálovými vektory $\boldsymbol{n}_\alpha$, $\boldsymbol{n}_\beta$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{n}_\beta|}{|\boldsymbol{n}_\alpha|\cdot|\boldsymbol{n}_\beta|}$$