Numerické metody

KMDG, FS, VŠB-TUO

Interpolace

Polynom $p_n(x)$ interpoluje uzly (x_i, y_i) pro $i = 0, \ldots, n$.

$$p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

Aproximace

Funkce

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

aproximuje uzly (x_i, y_i) pro $i = 1, \ldots, n$ ve smyslu nejmenších čtverců. Kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou řešením soustavy:

$$c_1 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_1(x_i))^2 + c_2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i)\cdot\varphi_2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_1(x_i)$$

$$c_1 \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i)\cdot\varphi_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} (\varphi_2(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \varphi_2(x_i)$$

Derivace

První derivace

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

Druhá derivace

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Nelineární rovnice

Řešení rovnice $f(x) = 0$.
Metoda **půlení intervalu**

$$x^{(k)} = \frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$$

Metoda **regula falsi**

$$x^{(k)} = a^{(k)} - \frac{b^{(k)} - a^{(k)}}{f\left(b^{(k)}\right) - f\left(a^{(k)}\right)} f\left(a^{(k)}\right)$$

je-li $f(a^{(k)})f(x^{(k)}) < 0$ pak $a^{(k+1)} := a^{(k)},\ b^{(k+1)} := x^{(k)}$
je-li $f(x^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$ pak $a^{(k+1)} := x^{(k)},\ b^{(k+1)} := b^{(k)}$
Newtonova metoda

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}$$

Iterační metoda $f(x) = 0 \ \rightarrow\ x - g(x) = 0$

$$x^{(k+1)} = g\left(x^{(k)}\right)$$

Soustavy lineárních rovnic

Řešení soustavy lineárních rovnice $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
Jacobiho metoda iterační metoda

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right),\ i = 1, \ldots, n$$

Gauss-Seidelova iterační metoda

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right),\ i = 1, \ldots, n$$

Integrace

Přibližná hodnota integrálu $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Složená **obdélníková** formule

$$I \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(\tfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

Složená **lichoběžníková** formule

$$I \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

Složená **Simpsonova** formule (n je sudé)

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1\\ i \text{ liché}}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2\\ i \text{ sudé}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

Diferenciální rovnice

Hodnoty (x_i, y_i) jsou aproximací řešení úlohy

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(a) = c \qquad \text{na } \langle a, b\rangle$$

Eulerova metoda

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \tfrac{b-a}{n}$$
$$y_0 = c, \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Rungeova-Kuttova metoda

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \tfrac{b-a}{n}$$
$$y_0 = c$$
$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_2)$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Matlab

KMDG, FS, VŠB-TUO

Operace

		prvek po prvku
sčítání	+	
odčítání	−	
násobení	*	.*
dělení	/	./
mocnina	^	.^
transpozice	'	

Matematické funkce

absolutní hodnota $\|x\|$	`abs( )`
druhá odmocnina $\sqrt{x}$	`sqrt( )`
exponenciální funkce e^x	`exp( )`
přirozený logaritmus $\ln(x)$	`log( )`
dekadický logaritmus $\log(x)$	`log10( )`
sinus $\sin(x)$	`sin( )`
kosinus $\cos(x)$	`cos( )`
tangens $\mathrm{tg}(x)$	`tan( )`
kotangens $\mathrm{cotg}(x)$	`cot()`
arkussinus $\arcsin(x)$	`asin( )`
arkuskosinus $\arccos(x)$	`acos( )`
arkustangens $\mathrm{arctg}(x)$	`atan( )`
arkuskotangens $\mathrm{arctg}(x)$	`acot( )`
hyperbolický sinus	`sinh( )`
hyperbolický kosinus	`cosh( )`
hyperbolický tangens	`tanh( )`
hyperbolický kotangens	`coth( )`

Definice vlastní matematické funkce

f=@(proměnné)*předpis funkce*

Konstanty

Ludolfovo číslo $\pi = 3.14\ldots$	`pi`
nekonečno ∞	`inf`
neurčitý výraz	`NaN`
imaginární jednotka $i = \sqrt{-1}$	`i`

Grafy

`plot(x,y)` `fplot(funkce,[a,b])`

`plot(x,y,'`*specifikace*`')`

Specifikace grafu

	barvy		symboly		typy čar
b	modrá	.	tečky	-	plná
g	zelená	o	kroužky	:	tečkovaná
r	červená	x	křížky ×	-.	čerchovaná
c	světle modrá	+	křížky +	-	tečkovaná
m	fialová	*	hvězdy		
y	žlutá	s	čtverce		
k	černá	d	kosočtverce		
		v	trojúhelníky (dolu)		
		^	trojúhelníky (nahoru)		
		<	trojúhelníky (vlevo)		
		>	trojúhelníky (vpravo)		
		p	pěticípé hvězdy		
		h	šesticípé hvězdy		

Úprava grafu

rozsah os x a y	`axis(`[x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}]`)`
poměr os 1:1	`axis equal`
nadpis obrázku	`title('`*text*`')`
popis x-ové osy	`xlabel('`*text*`')`
popis y-ové osy	`ylabel('`*text*`')`
legenda	`legend('`*text1*`','`*text2*`',...)`
zobrazení mřížky do grafu	`grid on`
více grafů jednoho obrázku	`hold on`

Relační a logické operátory

je rovno =	`==`
není rovno ≠	`~=`
je menší <	`<`
je větší >	`>`
je menší nebo rovno ≤	`<=`
je větší nebo rovno ≥	`>=`

konjunkce ∧	`and(a,b)` nebo `a & b`
disjunkce ∨	`or(a,b)` nebo `a	b`
negace ¬	`not(a)` nebo `~a`

Matice

rozměr matice A	`size(A)`
počet prvků vektoru **v**	`length(v)`
matice $m \times n$ nul	`zeros(m,n)`
matice $m \times n$ jedniček	`ones(m,n)`
jednotková matice $m \times n$	`eyes(m,n)`
součty prvků ve sloupcích	`sum(A)`
součny prvků ve sloupcích	`prod(A)`
maxima ve sloupcích	`max(A)`
minima ve sloupcích	`min(A)`

Programování

záhlaví funkce

function [*výstupy*]=*jméno* (*vstupy*)

rozhodovací blok

```
if podmínka 1
    blok příkazů
end
```

přepínač

```
switch proměnná
case hodnota1
    blok příkazů
case hodnota2
    blok příkazů
...
otherwise
    blok příkazů
end
```

rozhodovací blok

```
if podmínka 1
    blok příkazů
elseif podmínka 2
    blok příkazů
...
else
    blok příkazů
end
```

cyklus s podmínkou

```
while podmínka
    blok příkazů
end
```

cyklus se známým počtem opakování

```
for rozsah hodnot
    blok příkazů
end
```