APLIKACE DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

SBÍRKA PŘÍKLADŮ

Jaroslav VLČEK , Arnošt ŽÍDEK

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
Ostrava 2016

Publikováno v rámci řešení projektu RPP-TO-1/b

Příprava studijních materiálů z matematiky pro nový studijní obor Aplikované vědy a technologie

Název: Aplikace diferenciálních rovnic – sbírka příkladů

Autoři: doc. RNDr. Jaroslav Vlček, CSc., Mgr. Arnošt Žídek, Ph.D.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie,VŠB – Technická univerzita Ostrava

Místo, rok, vydání: Ostrava, 2016, 1. vydání

Vydala: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Sazba LaTeX 2_ε © Jaroslav Vlček 2016

Počet stran: 62

Neprodejné

ISBN 978–80–248–4015-4

On-line

Obsah

1 Diferenciální rovnice prvního řádu **5**
1.1 Radioaktivní rozpad 5
1.2 Tepelná výměna 6
1.3 Jednoduché elektrické obvody 7
1.4 Logistické a populační úlohy 8
1.5 Dynamické úlohy 10
1.6 Další aplikační témata 15

2 Diferenciální rovnice vyšších řádů **17**
2.1 Jednoduché pohybové rovnice 17
2.2 Pohyb v gravitačním poli 19
2.3 Harmonické kmity 21
2.4 Elektrický oscilační obvod 28

3 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic **31**
3.1 Dynamické úlohy 31
3.2 Radioaktivní rozpad 35
3.3 Elektrický transformátor 38
3.4 Ekologické modely 40

4 Výsledky úloh **46**
4.1 Diferenciální rovnice 1. řádu 46
4.2 Diferenciální rovnice vyšších řádů 48
4.3 Soustavy diferenciálních rovnic 53

Úvod

Téma zahrnující problematiku obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) a jejich soustav je nedílnou součástí základního kurzu matematiky pro technické obory. Potřebné teoretické základy spolu s četnými příklady jsou přístupné v široké nabídce tištěných nebo elektronických zdrojů. Pro studenty VŠB-TU Ostrava jsou k dispozici skripta Diferenciální rovnice (Matematika IV) [1], resp. jejich elektronická verze [2] spolu se sbírkou příkladů [3], vytvořené na Katedře matematiky a deskriptivní geometrie. Obdobně je tento tematický okruh zajištěn studijními materiály na Katedře aplikované matematiky FEI [4],[5]. Aktualizace studijních opor na KMDg probíhá průběžně, nicméně zavedení nového studijního oboru Aplikované vědy a technologie, v němž představují diferenciální rovnice samostatný předmět ve třetím semestru bakalářského stupně, povede v nejbližší době k inovaci studijních materiálů. Třebaže aktuální bilance ukázala dostatečnou nabídku standardních úloh k procvičování metod řešení ODR (viz mj. [3]), jako nejaktuálnější se projevila potřeba kvalitní nabídky motivačních a aplikačních úloh k této problematice.

Z uvedených důvodu jsme v inovačním procesu upřednostnili zaplnění této mezery a v průběhu roku 2016 byla v rámci rozvojové projektu Příprava studijních materiálů z matematiky pro nový studijní obor Aplikované vědy a technologie (Tematický okruh: RPP-TO-1/b) vytvořena sbírka úloh APLIKACE DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC. Výběr témat do této sbírky byl veden snahou postihnout typické aplikační oblasti v inženýrských odvětvích a zároveň respektovat přiměřenou náročnost matematického aparátu. Ten zahrnuje metody pro řešení klasických typů ODR 1. řádu (zejména separovatelné, lineární a Bernoulliho rovnice) v Kapitole 1 a dále – v poněkud širším rozsahu daném aplikačním potenciálem – metody pro rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty a jejich soustavy (kapitoly 2 a 3). K většině aplikačních oblastí je poskytnuto potřebné uvedení do odborné problematiky. Úlohy jsou prezentovány jednak ve formě řešených příkladů, jednak jako zadání k samostatnému řešení. Výsledky spolu s případným komentářem pro posledně jmenovanou skupinu zahrnuje Kapitola 4.

S dotazy i připomínkami k tomuto studijnímu textu je možno se kdykoli obrátit na autory nebo na vyučující, případně navštívit *Math Support Centre* Katedry matematiky a deskriptivní geometrie (https://www.vsb.cz/714/cs/support/).

Kapitola 1

Diferenciální rovnice prvního řádu

1.1 Radioaktivní rozpad

Příklad 1.1 Určete funkci, která popisuje závislost množství nerozpadlého radioaktivního uhlíku ^{14}C na čase t.

Rychlost rozpadu libovolného radioaktivního prvku je přímo úměrná dosud nerozpadlému množství. Označíme-li $N(t)$ počet částic, lze jeho úbytek vyjádřit diferenciální rovnicí

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \tag{1.1}$$

kde $\lambda > 0$ je konstanta úměrnosti odpovídající rychlosti rozpadu konkrétního radioaktivního prvku. Rovnici řešíme pouhou separací proměnných

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \tag{1.2}$$

a po integraci obdržíme obecné řešení této separovatelné rovnice ve tvaru

$$N(t) = Ce^{-\lambda t}, \tag{1.3}$$

kde C je integrační konstanta. Pro výpočet partikulárního řešení použijeme Cauchyho počáteční podmínku. Počet částic v čase $t = 0$ označíme N_0 a po dosazení do obecného řešení dostaneme hledanou závislost množství částic na čase ve tvaru

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{1.4}$$

K popisu radioaktivního štěpení se používá veličina poločas rozpadu T, což je doba, za kterou se rozpadne polovina původního množství látky. Dosadíme-li do předchozího vztahu poměr $N/N_0 = 1/2$, obdržíme pro závislost poločasu rozpadu a koeficientu úměrnosti λ logaritmováním vztah $T = \ln 2/\lambda$.

Úloha 1.1 Kolik procent původního množství radioaktivního uhlíku ^{14}C zůstane po 200 letech v zkoumaném biologickém materiálu? Poločas rozpadu radioaktivního izotopu uhlíku ^{14}C je 5730 let. (Řešení: str. 46)

1.2 Tepelná výměna

Příklad 1.2 Nádobu se zahřátou kapalinou o teplotě T_1 necháme v místnosti o pokojové teplotě $T_0 < T_1$. Úkolem je popsat ochlazování kapaliny, tj. závislost teploty kapaliny na čase.

Při fyzikálním popisu tohoto jevu se řídíme Newtonovým zákonem pro ochlazování. Změna teploty tělesa T na čase t je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a teploty okolí, kterou jsme označili T_0. Diferenciální rovnici zapíšeme ve tvaru

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0), \tag{1.5}$$

kde $k > 0$ je koeficient úměrnosti odpovídající tepelné vodivosti prostředí. Záporné znaménko v rovnici odpovídá poklesu teploty při ochlazování kapaliny pro kladný rozdíl teplot $T - T_0$. Po převedení do tvaru

$$T' + kT = kT_0 \tag{1.6}$$

je zřejmé, že se jedná o lineární diferenciální rovnici, kterou řešíme metodou variace konstanty. Nejprve vyřešíme zkrácenou diferenciální rovnici $T' + kT = 0$, která je rovnicí separovatelnou a jejím obecným řešení je funkce

$$T = Ce^{-kt}. \tag{1.7}$$

Provedeme variaci konstanty, přičemž řešení úplné rovnice hledáme ve tvaru

$$T = C(t)e^{-kt}. \tag{1.8}$$

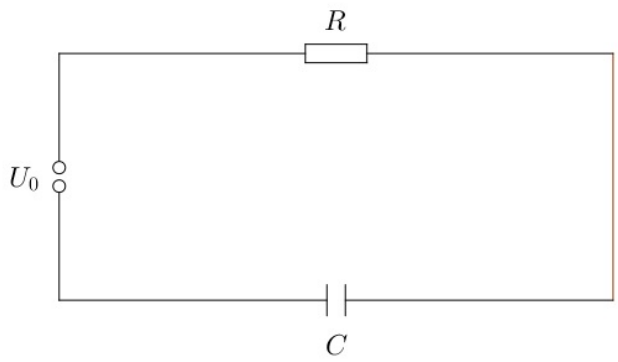
Po dosazení této funkce a její derivace do úplné rovnice vypočteme hledanou funkci $C(t) = T_0e^{kt} + K$, kde K je integrační konstanta. Jejím zpětným dosazením získáme obecné řešení zkoumané diferenciální rovnice

$$T = T_0 + Ke^{-kt}. \tag{1.9}$$

Použitím zadané počáteční podmínky (v čase $t = 0$ je teplota $T = T_1$) snadno vypočteme hodnotu integrační konstanty $K = T_1 - T_0$. Dosazením pak získáme hledanou závislost teploty vody na čase

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-kt}. \tag{1.10}$$

Úloha 1.2 Nádobu s vodou o teplotě $T_1 = 100°C$ necháme v místnosti o pokojové teplotě $T_0 = 25°C$. Popište závislost teploty na čase, víte-li, že po pěti minutách bude teplota vody $T = 70°C$. Závislost znázorněte graficky. Za jak dlouho klesne teplota vody na $T = 30°C$? (Řešení: str. 46)



Obrázek 1.1: Schéma RC obvodu.

1.3 Jednoduché elektrické obvody

Sestavíme elektrický obvod se sériovým zapojením rezistoru (odporu) a kondenzátoru (obr. 1.1). Úkolem je odvodit rovnici pro stanovení časového průběhu elektrického proudu $i(t)$ v obvodu, připojíme-li v čase $t = 0$ zdroj stejnosměrného napětí o velikosti U_0.

Ze druhého Kirchhoffova zákona vyplývá, že při sériovém zapojení je vstupní napětí součtem napětí na obou prvcích, tj.

$$u_R + u_C = u_0. \tag{1.11}$$

Označíme-li $q(t)$ množství elektrického náboje na kondenzátoru, platí pro napětí na jednotlivých prvcích $u_R = Ri(t), u_C = q(t)/C$. Po dosazení dostáváme

$$Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = U_0 \tag{1.12}$$

a dále – s použitím vztahu $i(t) = dq(t)/dt$ – separovatelnou diferenciální rovnici pro elektrický proud v obvodu:

$$R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0\,. \tag{1.13}$$

Příklad 1.3 Najděte řešení uvedené počáteční úlohy pro rovnici (1.13) a vypočtěte průběh napětí $u_C(t)$ na kondenzátoru.

Označíme $\beta = 1/(RC)$ a provedeme v rovnici separaci proměnných:

$$\frac{di(t)}{i(t)} = -\beta dt\,. \tag{1.14}$$

Po integraci, úpravě a dosazení počáteční podmínky (v čase $t = 0$ je $i = I_0$) obdržíme hledané řešení

$$i(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\beta t}. \tag{1.15}$$

Pro výpočet časové závislosti napětí na kondenzátoru $u_C(t)$ využijeme vztahu

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i(t) = \frac{1}{C}I_0\mathrm{e}^{-\beta t}. \tag{1.16}$$

Odtud po integraci a dosazení počáteční podmínky (v čase $t = 0$ je $u_C(0) = 0$) získáváme

$$u_C = U_0(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}), \tag{1.17}$$

kde $U_0 = RI_0$. Po připojení napětí tedy obvodem prochází nejvyšší možný proud, který je omezený pouze rezistorem. Postupem času se však kondenzátor nabíjí, hromadí se v něm náboj a tedy roste jeho napětí, zatímco obvodem prochází stále menší proud.

Úloha 1.3 V obvodu na obr. 1.1 nyní nahradíme kondenzátor cívkou o indukčnosti L. Napětí na cívce lze zapsat ve tvaru $u_L = L.di(t)/dt$. Úkolem je určit napětí na cívce a proud jí procházející v čase t po zapojení obvodu. (Řešení: str. 46)

Poznámka

Matematický model kompletního RCL obvodu vyžaduje řešení diferenciální rovnice 2.řádu, které ukážeme v následující kapitole.

1.4 Logistické a populační úlohy

1.4.1 Exponenciální růst populace

Pokusíme se sestavit vývoj určité populace v čase. Populací myslíme společenstvo lidí, živočichů nebo souhrn ogranismů, např. viry, které se za vhodných podmínek přirozeně množí. Označme $y(t)$ velikost populace v čase. Nejjednodušší model růstu obdržíme za předpokladu, že časový přírůstek populace je přímo úměrný jeho velikosti; výsledkem je pak exponenciální růst populace. Lze jej popsat diferenciální rovnicí

$$\frac{dy}{dt} = Ky, \tag{1.18}$$

kde $K > 0$ je tzv. *míra růstu* populace. Řešením této diferenciální rovnice za počáteční podmínky $y(0) = y_0$ dostaneme závislost

$$y = y_0 e^{Kt}. \tag{1.19}$$

Tento model můžeme předpokládat u organismu, který kolonizuje novou oblast a neomezeně využívá přírodní zdroje. Lze jej také použít v případech, kdy úmrtnost organismů je větší než jejich reprodukce. Míra růstu je pak $K < 0$ a organismy exponenciálně vymírají.

1.4.2 Logistická rovnice

Pro větší populace už tento model není vhodný, jelikož žádná populace nemůže růst neomezeně. Dřív nebo později začne mezi sebou soupeřit o omezené zdroje a dochází ke konkurenci, která způsobí zvětšení úmrtnosti nebo zmenšení porodnosti. Dochází tak ke zpomalení růstu, což můžeme vyjádřit úpravou původní diferenciální rovnice do tvaru

$$\frac{dy}{dt} = Ky(U - y), \tag{1.20}$$

kde člen U lze popsat jako kapacitu prostředí. Čím se velikost populace blíží parametru U, tím se růst zpomaluje. Pro $y = U$ je přírůstek populace roven nule, neboť kapacita prostředí je naplněna. Při řešení rovnice je výhodné ji převést do tvaru

$$y' = ay - by^2, \tag{1.21}$$

kde $a, b > 0$. Člen a odpovídá přírůstku populace, člen b má význam faktoru úmrtnosti.

Příklad 1.4 Najděte řešení rovnice (1.21) s počáteční podmínkou $y(0) = y_0$.

Jedná se o Bernoulliho diferenciální rovnici, kterou převedeme do tvaru

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{a}{y} = -b \tag{1.22}$$

a řešíme substitucí

$$\frac{1}{y} = z \qquad \text{tj.} \qquad z' = -y^{-2}y' = -\frac{y'}{y^2}. \tag{1.23}$$

Obdržíme lineární diferenciální rovnici $z' + az = b$, kterou řešíme metodou variace konstanty a získáme její obecné řešení

$$z = \frac{b}{a} + Ce^{-at}, \tag{1.24}$$

kde C je integrační kostanta. Zpětným dosazením získáme hledanou funkci

$$y = \frac{1}{\frac{b}{a} + \mathrm{C}\mathrm{e}^{-at}} = \frac{a}{b + Ca\mathrm{e}^{-at}}. \tag{1.25}$$

Dosazením počáteční podmínky $y(0) = y_0$ obdržíme pro integrační konstantu vztah

$$C = \frac{1}{y_0} - \frac{b}{a} \tag{1.26}$$

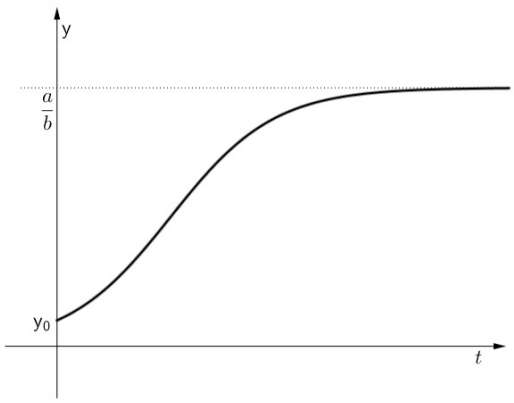
a následně finální podobu řešení:

$$y(t) = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)\mathrm{e}^{-at}}\,. \tag{1.27}$$

Pro malé hodnoty t odpovídá logistický růst přibližně růstu exponenciálnímu. Pro $t \to \infty$ konverguje velikost populace k stabilnímu stavu

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{a}{b} \tag{1.28}$$

Grafickou závislost si lze prohlédnout na obr. 1.2 pro tato vstupní data: $a = 0.05$, $b = 0.0001$, $y_0 = 50$.



Obrázek 1.2: Závislost růstu populace na čase při omezených zdrojích.

Úloha 1.4 Reprodukce s migrací – otevřený lineární systém. Sestavte úlohu popisující vývoj populace obyvatel města, v níž je míra růstu K vyjádřena jako rozdíl mezi koeficientem růstu k_1 (přirozený přírůstek – narození) a koeficientem poklesu k_2 (přirozený úbytek – úmrtí). Do modelu dále zahrňte migrační člen (při- a odstěhování apod.), kterým je periodická funkce

$$f(t) = x_m \sin \omega t, \quad x_m << x_0 \, .$$

Najděte řešení úlohy za těchto podmínek: jednotkou času je 1 den, počáteční stav populace je $x_0 = 6000$ a dále $x_m = 5$, $\omega = 0.1$ 1/den. Proveďte diskuzi řešení pro všechny tři varianty rozdílu $k_1 - k_2$. Vypočtěte a graficky znázorněte výsledek pro $k_1 = 1.18 \times 10^{-3}$ 1/den, $k_2 = 1.15 \times 10^{-3}$ 1/den v průběhu prvních tří let. Stanovte počet obyvatel po uplynutí této doby. (Řešení: str. 46)

1.5 Dynamické úlohy

1.5.1 Newtonovy pohybové zákony

Příklad 1.5 Střela o hmotnosti m, která opustila hlaveň s rychlostí v_0, se pohybuje po přímé vodorovné dráze. Překonává přitom odpor prostředí, který je přímo úměrný druhé mocnině její okamžité rychlosti $v(t)$ (konstanta úměrnosti r). V jaké vzdálenosti klesne její rychlost na polovinu? Zanedbejte působení tíhové síly a řešte pro následující vstupní data: $m = 0.5$ kg, $v_0 = 800$ m/s, $r = 0.0005$ 1/m.

Setrvačná síla podle 2. Newtonova zákona $F = ma = m\,dv/dt$ a odporová síla $F_r = rv^2$ musí mít nulovou výslednici, což vede k počáteční úloze pro rychlost střely:

$$\frac{dv(t)}{dt} + kv^2(t) = 0 \, , \quad k = r/m, \qquad v(0) = v_0 \, . \tag{1.29}$$

Jedná se o separovatelnou diferenciální rovnici, jejíž obecné řešení najdeme v několika jednoduchých krocích:

$$\frac{dv}{v^2} = -kdt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} = kt + C \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{kt + C} \, .$$

Z počáteční podmínky snadno určíme konstantu $C = 1/v_0$, a tedy

$$v(t) = \frac{v_0}{kv_0 t + 1}\,.$$

Položíme-li $v(t) = v_0/2$, zjistíme, že na jednu polovinu klesne rychlost střely v okamžiku $t^* = 1/(kv_0)$. Tato situace nastane ve vzdálenosti

$$s = \int_0^{t^*} v(t)\,dt = \int_0^{t^*} \frac{v_0}{kv_0 t + 1}\,dt = \frac{1}{k}\ln(kv_0 t^* + 1)\,. \tag{1.30}$$

Po dosazení zadaných hodnot vychází $t^* = 1.25$ s, $s = 10^3 \ln 2 \approx 700$ m.

Příklad 1.6 Na padající těleso o hmotnosti m v gravitačním poli Země působí nejen tíhová síla Země $F = mg$, ale proti jeho pohybu také síla odporu prostředí, která je přímo úměrná rychlosti padajícího tělesa. Sestavte pohybovou rovnici tělesa a vypočtěte závislost jeho rychlosti na čase.

Výsledná setrvačná síla je rozdílem tíhové síly a odporu prostředí. Pohybovou rovnici lze proto zapsat ve tvaru

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv, \tag{1.31}$$

kde k označíme koeficent odporu prostředí. Jedná se o lineární diferenciální rovnici, kterou řešíme metodou variace konstanty. Po dosazení počáteční podmínky $v(0) = v_0$ obdržíme partikulární řešení

$$v = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{1.32}$$

Z výsledku je patrné, že pro $t \to \infty$ se působící síly vyrovnají a rychlost tělesa konverguje k hodnotě $v_\infty = mg/k$.

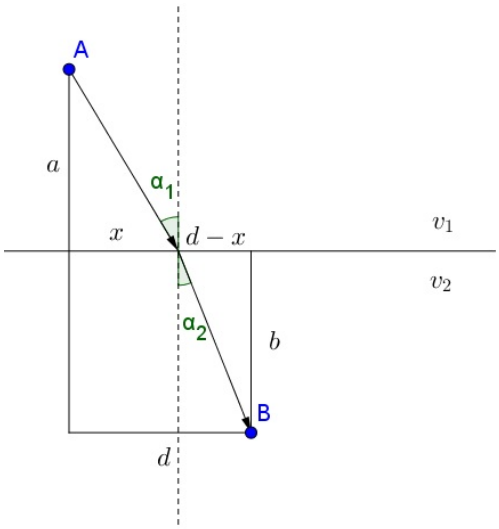
Úloha 1.5 Kapka vody o počáteční hmotnosti m_0 klesá v gravitačním poli z klidového stavu volným pádem. Odpařováním její hmotnost úměrně s časem ubývá s koeficientem μ. Na kapku dále působí odpor prostředí úměrný její okamžité rychlosti (koeficient úměrnosti $k \neq 2\mu$). Vyjádřete rychlost kapky v závislosti na čase. (Řešení: str. 46)

1.5.2 Fermatův princip a Snellův zákon lomu

Fermatův princip je tvrzení, které popisuje základní zákony geometrické optiky. Podle něj se světlo šíří z jednoho bodu do druhého po takové dráze, aby doba k proběhnutí této dráhy byla minimální. V homogenním prostředí je touto trajektorií samozřejmě úsečka. Předpokládejme nyní rozhraní mezi dvěmi rozdílnými homogenními prostředími s různými rychlostmi šíření světla (viz obr. 1.3) a aplikujme Fermatův princip.

Světlo potřebuje k uražení vzdálenosti mezi body A, B čas

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}, \tag{1.33}$$



Obrázek 1.3: Lom světla na rozhraní mezi dvěma opticky různými prostředími.

kde v_1, v_2 jsou jeho rychlosti v jednotlivých prostředích. Hledáme-li minimum této funkce z podmínky $dT/dx = 0$, obdržíme po úpravě rovnici pro hledaný parametr x:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}. \tag{1.34}$$

Zavedením goniometrických funkcí pak získáme známý tvar Snellova zákona lomu ve tvaru

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}. \tag{1.35}$$

1.5.3 Brachystochrona

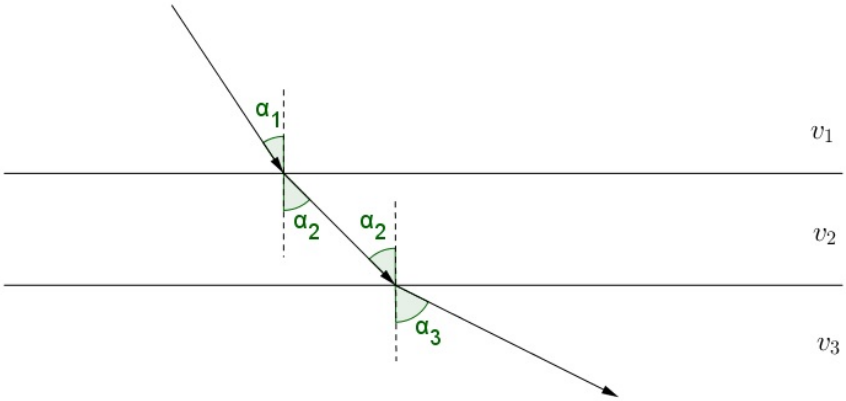
Příklad 1.7 Úkolem je najít tvar křivky, po které se pohybuje hmotný bod v homogenním gravitačním poli z klidového stavu v bodě A do bodu B za nejkratší možnou dobu.

Poznámka

Přestože se nejedná o problém geometrické optiky, nýbrž o problém z teoretické mechaniky, můžeme použít analogii s Fermatovým principem a úlohu modelovat jako zobecnění předchozího problému pro více po sobě jdoucích vrstev (viz obr. 1.4), přičemž předpokládáme, že se tloušťka vrstev neomezeně zmenšuje a jejich počet neomezeně roste.

Zobecníme Snellův zákon lomu (1.35) pro lom paprsku na více rozhraních (viz obr. 1.4),

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = \frac{\sin\alpha_3}{v_3}. \tag{1.36}$$



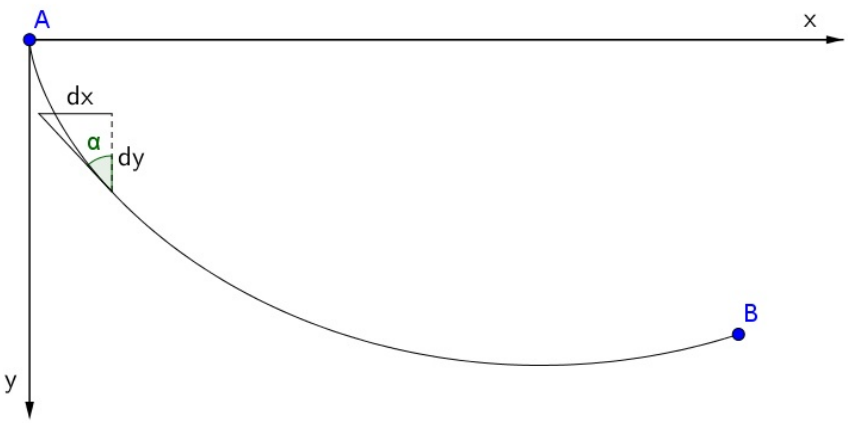
Obrázek 1.4: Postupný lom paprsku na více rovnoběžných rozhraních.

Pro libovolný počet rozhraní tedy platí

$$\frac{\sin \alpha_i}{v_i} = K, \tag{1.37}$$

kde K je konstanta. V naší úvaze se spojitou změnou rychlosti pohybu hmotného bodu lze hodnotu $\sin \alpha$ (viz obr. 1.5) vyjádřit pomocí diferenciálů

$$\sin \alpha = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \tag{1.38}$$



Obrázek 1.5: K výpočtu brachystochrony.

Při výpočtu rychlosti vycházíme ze zákona zachování energie. Rychlost získaná pohybem hmotného bodu souvisí pouze se změnou potenciální energie hmotného bodu na energii kinetickou a nezávisí na trajektorii, po které se hmotný bod pohybuje:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy, \tag{1.39}$$

odkud pro rychlost hmotného bodu obdržíme

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{1.40}$$

Dosazením výrazů (1.38) a (1.40) do (1.37) získáme rovnici

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = K, \tag{1.41}$$

kterou umocníme a převedeme do tvaru

$$\left(1+(y')^2\right) y = C. \tag{1.42}$$

Získali jsme diferenciální rovnici brachystrochrony, v níž konstanta C obsahuje všechny předchozí konstantní členy.

Příklad 1.8 Najděte vhodné vyjádření brachystochrony řešením rovnice (1.42).

V odvozené diferenciální rovnici vyjádříme derivaci a separujeme proměnné:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C}{y} - 1} \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{\frac{y}{C-y}}\, dy = dx\,. \tag{1.43}$$

Nyní provedeme substituci $\sqrt{y/(C-y)} = \tan\vartheta$, odkud

$$y = \frac{C\tan^2\vartheta}{1+\tan^2\vartheta} = C\sin^2\vartheta, \qquad dy = 2C\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta. \tag{1.44}$$

Po dosazení do (1.43) a úpravě obdržíme diferenciální rovnici

$$dx = 2C\sin^2\vartheta\, d\vartheta, \tag{1.45}$$

kterou bez potíží integrujeme a po dosazení počátečních podmínek pro bod A ($x = 0, y = 0$, tj. $\vartheta = 0$) získáme partikulární řešení

$$x = C(\vartheta - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta). \tag{1.46}$$

Pro přehlednost lze označit $C = 2r$ a $\vartheta = \frac{\varphi}{2}$ a celkové řešení problému pak zapíšeme parametricky

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \tag{1.47}$$

$$y = r(1 - \cos\varphi). \tag{1.48}$$

Hledanou křivkou je tedy část cykloidy procházející oběmi body.

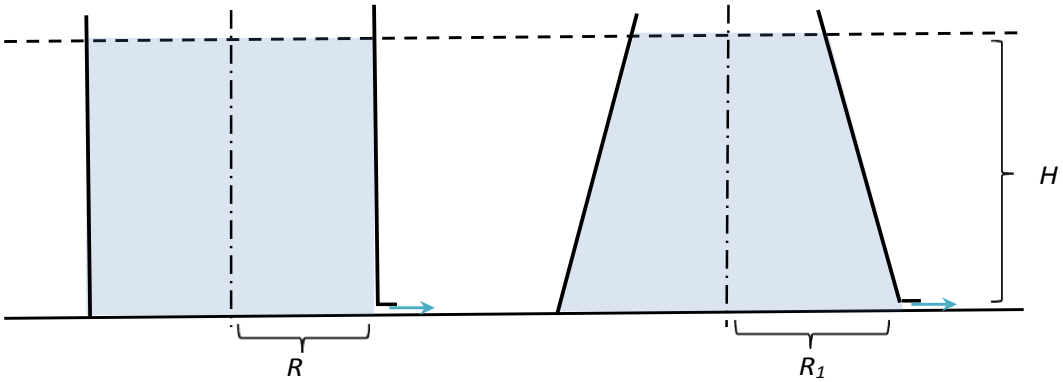
Poznámka

Úlohu lze řešit také využitím variačního počtu nebo použitím Lagrangeovy funkce v teoretické mechanice.

1.6 Další aplikační témata

Úloha 1.6 Vypočtěte hodnotu atmosférického tlaku na vrcholu Sněžky ve výšce 1603 m n.m. V nulové nadmořské výšce je při teplotě 20°C tlak $p_0 = 1013$ hPa a hustota vzduchu $\rho_0 = 1.293\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. Vzduch považujte za ideální plyn, který se při konstantní teplotě chová podle Boyle-Mariottova zákona $pV = konst.$, tj. hustota vzduchu $\rho(p)$ je funkcí tlaku. (Řešení: str. 47)

Úloha 1.7 Obě nádoby na obrázku 1.6 mají rotační tvar a obsahují stejné množství vody s hladinou ve výšce H. Z obou současně je voda vypouštěna malým kruhovým otvorem u dna rychlostí $v = k\sqrt{2gh}$, kde k je bezrozměrná konstanta, g je gravitační zrychlení a $h(t)$ aktuální výška hladiny v okamžiku t. Určete, která z nádob se vyprázdní dříve. Vstupními daty jsou výška H, poloměry R a R_1 a poloměr výtokového otvoru ρ. (Řešení: str. 47)



Obrázek 1.6: K úloze 1.7.

Úloha 1.8 Do chemické reakce vstupují dvě látky A a B, výsledným produktem je látka C. Rychlost reakce (při konstantní teplotě) je v libovolném časovém okamžiku přímo úměrná součinu koncentrací látek vstupujících do reakce. Sestavte model reakce pro určení objemu látky C v libovolném časovém okamžiku, víte-li, že

1. z každých dvou objemových jednotek látky A a jedné objemové jednotky látky B vzniknou tři objemové jednotky produktu C;
2. počáteční objemy reagentů jsou 10 litrů látky A a 20 litrů látky B;
3. za 20 minut od zahájení reakce se vytvoří 6 litrů produktu C (jednotkou času je hodina).

Proveďte výpočet a výslednou závislost znázorněte graficky. Stanovte konečné množství látky C a dále její množství za 2 hodiny od počátku reakce. (Řešení: str. 47)

Úloha 1.9 Vyráběný produkt má N potenciálních spotřebitelů, kterým je ho třeba nabídnout, na počátku je však o něm informováno pouze N_0 zákazníků. Proto je zahájena reklamní kampaň, při níž je ryclost šíření informace (přírůstek počtu informovaných spotřebitelů za jednotku času) přímo úměrná geometrickému průměru počtu informovaných a počtu neinformovaných klientů. Sestavte matematický model pro stanovení efektivnosti reklamy při výše uvedených předpokladech, jako jednotku času uvažujte jeden den. Určete dobu t_p, které je zapotřebí k plné informovanosti zákazníků, víte-li, že na konci prvního týdne je s reklamou seznámeno N_7 zákazníků. Řešte obecně a následně pro tato vstupní data: $N = 5000$, $N_0 = 50$, $N_7 = 737$. (Řešení: str. 47)

Úloha 1.10 V populaci čítající 10^6 osob se šíří infekce. Denně onemocní 8 procent z dosud zdravých osob. V okamžiku, kdy jsou nemocná 3 procenta obyvatelstva, je zahájena očkovací akce, při níž je denně ochráněno před infekcí 600 lidí. Určete, za jak dlouho (jednotkou času je jeden den) hrozba epidemie vymizí, tj. počet ohrožených obyvatel klesne na nulu. (Řešení: str. 47)

Kapitola 2

Diferenciální rovnice vyšších řádů

2.1 Jednoduché pohybové rovnice

Připomeňme nejprve potřebné fyzikální vztahy pro pohyb v odporujícím prostředí, je-li odporová síla úměrná okamžité rychlosti. Rychlost v a zrychlení a jsou derivacemi dráhy $y(t)$ podle času, tj.

$$v(t) = \frac{dy}{dt}\,, \qquad a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}\,.$$

Konstantu úměrnosti zahrnující odpor prostředí a případné tření označíme k, takže síla odporu bude $F_r = k.v(t)$. Základní bilanční vztah je reprezentován rovnováhou mezi silou F působící pohyb na jedné straně a součtem odporové síly F_r a setrvačné síly ma na straně druhé:

$$ma + F_r = F \quad \Longrightarrow \quad m\,\frac{d^2y}{dt^2} + k\,\frac{dy}{dt} = F\,.$$

Po vydělení hmotností m dostáváme základní pohybovou rovnici

$$y'' + \frac{k}{m}\,y' = \frac{F}{m}\,. \tag{2.1}$$

Příklad 2.1 Vozidlo o hmotnosti m se pohybuje po přímce působením konstatní síly F, která má směr pohybu. Vozidlo překonává odpor o síle F_r úměrný okamžité rychlosti $v(t)$. Úkolem je formulovat a řešit pohybovou rovnici pro závislost dráhy $y(t)$ na čase při počátečních podmínkách $y(0) = 0$, $v(0) = 0$.

Máme před sebou nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstatními koeficienty. Její charakteristická rovnice $r^2 + \frac{k}{m}r = 0$ má kořeny $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{k}{m}$, takže obecné řešení homogenní rovnice bude mít tvar

$$y_h(t) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\,.$$

Partikulární řešení $p(t)$ pro úplnou rovnici můžeme hledat metodou neurčitých koeficientů. Protože je však konstatní pravá strana již zastoupena konstantou ve fundamentálním systému (jeden z kořenů charakteristické rovnice je nula), musíme zvolit $p(t) = At$. Po dosazení této funkce a jejích derivací do úplné rovnice snadno vypočteme konstantu $A = F/k$. Pro obecné řešení a jeho derivaci (rychlost pohybu) tedy vychází

$$y(t) = y_h(t) + p(t) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}\,t\,, \qquad y'(t) = v(t) = -\frac{k}{m}\,C_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}\,.$$

Počáteční podmínky v bodě $t = 0$ vedou na soustavu

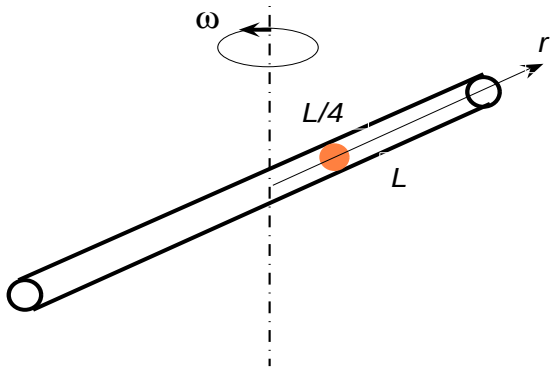
$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2\,, \\ 0 &= -\tfrac{k}{m}\,C_2 + \tfrac{F}{k}\,, \end{aligned} \qquad \text{odkud} \qquad C_1 = -\frac{Fm}{k^2}\,, \quad C_1 = \frac{Fm}{k^2}\,.$$

Dosazením do obecného řešení a úpravou obdržíme hledanou závislost dráhy na čase:

$$y(t) = \frac{F}{k}\left[t + \frac{m}{k}\left(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)\right]\,.$$

Úloha 2.1 Těleso o hmotnosti m se pohybuje po přímce z bodu A do bodu B působením konstatní síly F, která má směr pohybu. Odporová síla prostředí F_r je přímo úměrná okamžité vzdálenosti tělesa od bodu B, přičemž v bodě A je její hodnota $F_A < F$. Odvoďte a řešte pohybovou rovnici tělesa za předpokladu, že rychlost v bodě A je nulová. Navrhněte způsob výpočtu rychlosti tělesa v bodě B. (Řešení: str. 48)

Úloha 2.2 Trubka délky $2L$ rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω kolem svislé osy procházející jejím středem (obr. 2.1). Ve vzdálenosti $L/4$ od osy otáčení se nachází kulička o hmotnosti m, která je v okamžiku $t = 0$ uvolněna a bez tření se pohybuje působením odstředivé síly $F_o = m\omega^2 r$, kde r je aktuální vzdálenost od osy rotace. Odvoďte a řešte rovnici pro stanovení trajektorie pohybu a vypočtěte rychlost, s jakou kulička opustí trubku. (Řešení: str. 48)



Obrázek 2.1: K úloze 2.2.

Úloha 2.3 Určete, na jakou vzdálenost se musí přiblížit k cíli ponorka, aby ho torpédo o hmotnosti m vystřelené rychlostí v_0 zasáhlo s dopadovou rychlostí v_d. Pohon torpéda mu uděluje zrychlení a, ale zároveň musí překonávat odpor prostředí úměrný okamžité rychlosti s koeficientem r (tíhovou sílu zanedbáváme). Řešte nejprve obecně a pak výsledek vyčíslete pro následující data: $m = 80$ kg, $v_0 = 200$ m/s, $v_d = 50$ km/hod., $a = 12$ m/s^2, $r = 16$ kg/s. (Řešení: str. 49)

2.2 Pohyb v gravitačním poli

Podobným způsobem můžeme přistoupit také k odvození a řešení úloh popisujících pohyb v gravitačním poli, jejichž jednodušší varianty se vyskytují v předchozí kapitole (viz Příklad 1.6, Úloha 1.5).

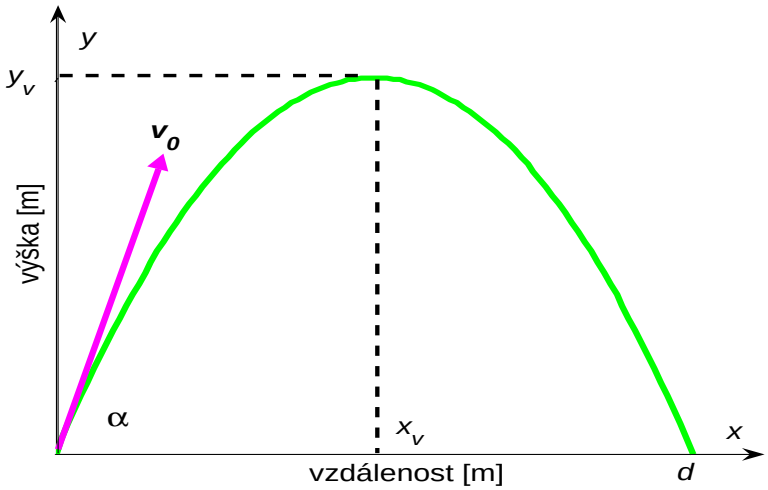
Uvažujeme homogenní tíhové pole charakterizované gravitačním zrychlením $\boldsymbol{g}$ s gravitační konstantou g. Na těleso (částici) o hmotnosti m pohybující se ze zrychlením $\boldsymbol{a}$ působí setrvačná síla $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ a síla odporu prostředí. Tu je možno v případě malé rychlosti $\boldsymbol{v}$, kdy je proudění okolního prostředí laminární, vyjádřit vztahem $\boldsymbol{F}_r = r\boldsymbol{v}$, kde r je součinitel odporu. Výslednice sil musí být nulová, tudíž

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_r = \boldsymbol{o}\,, \qquad \text{neboli} \qquad m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{g} + r\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}\,. \tag{2.2}$$

Předpokládáme, že tíhové zrychlení má směr osy y, a pohyb probíhá v rovině rovnoběžné s tímto směrem, tj. $\boldsymbol{g} = (0, g)$. Budeme řešit dvojrozměrnou základní úlohu spočívající v určení dráhy pohybu při zadaných počátečních podmínkách. Trajektorii budeme hledat ve formě polohového vektoru $\boldsymbol{s}(t) = (x(t), y(t))$, takže rychlost $\boldsymbol{v}$ a zrychlení $\boldsymbol{a}$ jsou dány známými vztahy

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{s}(t)}{dt} = (x'(t), y'(t))\,, \qquad \boldsymbol{a}(t) = \frac{d^2\boldsymbol{s}(t)}{dt^2} = (x''(t), y''(t))\,. \tag{2.3}$$

Při typickém zadání je hmotná částice vržena z bodu $[0, 0]$ pod elevačním úhlem $\alpha \in (0, \pi/2)$ počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$ – viz obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Vrh šikmý vzhůru: výška výstupu h, vzdálenost dopadu d.

Rozepsáním vektorové rovnice (2.2) při zavedeném označení dostáváme soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého řádu pro složky polohového vektoru

$$x''(t) + bx'(t) = 0\,, \tag{2.4}$$
$$y''(t) + by'(t) = -g\,, \tag{2.5}$$

kde $b = r/m$. Jejich počáteční podmínky vyplývají ze zádání ve tvaru

$$x(0) = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad x'(0) = v_0 \cos\alpha\,, \quad y'(0) = v_0 \sin\alpha\,. \tag{2.6}$$

Poznámka

V tomto případě jsou neznámé $x(t)$, $y(t)$ v soustavě svázány pouze vstupními daty, nikoli funkční vazbou, a proto můžeme každou z rovnic řešit nezávisle na druhé. V opačném případě se jedná o tzv. simultánní soustavy, kterým je věnována kapitola 3.

Příklad 2.2 Šikmý vrh v neodporujícím prostředí. Úkolem je formulovat počáteční úlohu, odvodit rovnici trajektorie a stanovit zákkadní atributy pohybu – výšku výstupu a vzdálenost dopadu.

Jelikož je v tomto případě v rovnicích (2.4), (2.5) odporový faktor b roven nule, nabudou zjednodušené podoby

$$x''(t) = 0\,, \tag{2.7}$$
$$y''(t) = -g\,. \tag{2.8}$$

Obecná řešení určíme nezávisle na sobě postupnou integrací,

$$x(t) = C_1 t + C_2\,, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4\,. \tag{2.9}$$

a dále na základě počátečních podmínek snadno vypočteme konstanty. Tím získáme parametrické rovnice trajektorie, po níž se částice pohybuje:

$$x(t) = v_0 t\cos\alpha + C_2\,, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha\,. \tag{2.10}$$

Dosazením $t = x/v_0\cos\alpha$ z prvního vztahu do druhého se snadno se přesvědčíme, že se jedná o parabolu

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2\,. \tag{2.11}$$

Dále můžeme určit základní atributy nalezené trajektorie. Nejvyšším bodem neboli bodem výstupu je vrchol paraboly (viz obr. 2.2), v němž je vertikální složka rychlosti nulová, tedy

$$v_y = x'(t) = -gt + v_0\sin\alpha = 0\,.$$

Odtud stanovíme dobu výstupu $t_v = v_0\sin\alpha/g$, které odpovídají souřadnice vrcholu

$$x_v = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha\,, \qquad y_v = h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha\,, \tag{2.12}$$

kde y_v je výška výstupu. V důsledku symetrie paraboly dopadne částice za dobu $t_d = 2t_v$ do vzdálenosti

$$d = 2x_v = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha\,. \tag{2.13}$$

Úloha 2.4 Šíp je vystřelen rychlostí $v_0 = 45\ \mathrm{ms}^{-1}$. Určete elevační úhel α tak, aby zasáhl cíl ve vodorovné vzdálenosti $d = 25$ m nacházející se ve výšce $H = 3$ m. Odpor prostředí neuvažujte, výsledek demonstrujte graficky. (Řešení: str. 49)

Úloha 2.5 Projektil o hmotnosti $m = 0.3$ kg je vystřelen pod úhlem 35 stupňů rychlostí $v_0 = 120\ \mathrm{ms}^{-1}$. Vypočtěte vodorovnou vzdálenost jeho dopadu v prostředí s koeficientem odporu $r = 0.003\ \mathrm{kg.s}^{-1}$ a porovnejte ji s hodnotou v případě zanedbatelného odporu. Výsledné trajektorie znázorněte graficky. (Řešení: str. 49)

2.3 Harmonické kmity

K typickým problémům, které lze formulovat pomocí lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, patří jednoduché kmitavé děje. Základní rozbor provedeme pro mechanické kmity a dále ukážeme, že stejný matematický aparát lze využít při studiu elektrických oscilačních obvodů, jak ukazuje následující srovnávací tabulka.

rychlost	v	proud	i
okamžitá výchylka	y	náboj	Q
mechanická síla	$F \sin \omega t$	napětí	$u_0 \sin \omega t$
hmotnost	m	indukčnost	L
poddajnost	$1/k$	kapacita	C
odporový součinitel	b	odpor	R

2.3.1 Vlastní kmity.

Základní pojmy a vztahy demonstrujme na popisu vlastních mechanických kmitů v neodporujícím prostředí. Na pružině o tuhosti k je zavěšeno závaží o hmotnosti m, které je v rovnovážné poloze. Vychýlíme-li je ve svislém směru do polohy y_0 a uvolníme, dochází v důsledku pružné deformace k jeho kmitavému pohybu (obr. 2.3).

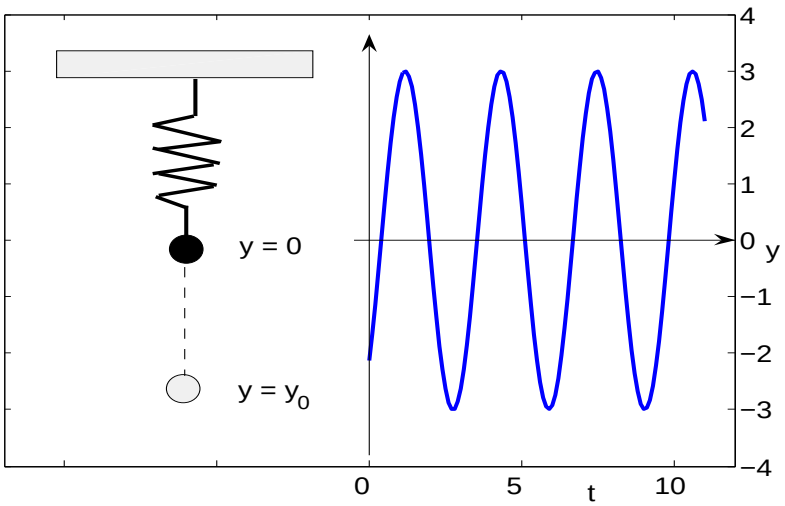
Označíme $y(t)$ výchylku z rovnovážné polohy v čase t. Podle druhého Newtonova zákona platí $ma = -ky$, kde a je okamžité zrychlení, které vyjádříme obvyklým způsobem a obdržíme diferenciální rovnici

$$m\frac{d^2y}{dt} = -ky\,.$$

Položíme-li $\omega_0^2 = k/m$, získáme diferenciální rovnici vlastních kmitů v neodporujícím prostředí ve tvaru

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0\,. \tag{2.14}$$

Počátečními podmínkami jsou počáteční výchylka $y(0) = y_0$ a rychlost $y'(0) = y_1$.



Obrázek 2.3: Netlumené vlastní mechanické kmity.

Charakteristická rovnice $p^2 + \omega_0^2 = 0$ má ryze imaginární kořeny $p_{1,2} = \pm i\omega_0$, a proto její obecné řešení píšeme ve tvaru

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \,, \tag{2.15}$$

kde C_1, C_2 jsou reálné konstanty. Pro bližší vazbu na fyzikální interpretaci zavedeme nové dvě konstanty A, φ na základě vztahů $C_1 = -A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$. S použitím známého vzorce z trigonometrie lze pak výše uvedené obecné řešení psát ve tvaru

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t - \varphi) \,, \tag{2.16}$$

kde $A > 0$ je amplituda, ω_0 úhlová frekvence a $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$ počáteční fáze kmitavého pohybu. Snadno lze ukázat, že řešení je periodické s periodou $T = 2\pi/\omega_0$. Amplitudu a fázi určíme ze zadaných počátečních podmínek – viz následující příklad.

Příklad 2.3 Uvažujme vlastní netlumené kmity s úhlovou frekvencí $\omega_0 = 2$ při podmínkách $y(0) = -3\sqrt{2}/2$, $y' = 3\sqrt{2}$. Úkolem je určit jejich amplitudu a fázi.

Vlastní kmity jsou popsány funkcí

$$y(t) = A \sin(2t - \varphi) \,, \tag{2.17}$$

která je obecným řešením řešením rovnice $y'' + 4y = 0$. Protože je dále $y' = 2A \cos(2t - \varphi)$, obdržíme pro zadané počáteční podmínky soustavu

$$-3\sqrt{2} = -2A \sin \varphi, \tag{2.18}$$

$$3\sqrt{2} = 2A \cos \varphi. \tag{2.19}$$

Vydělíme-li první rovnici druhou, dostáváme $\operatorname{tg} \varphi = 1$, odkud $\varphi = \pi/4$. Umocněním obou rovnic na druhou a sečtením obdržíme vztah pro amplitudu $36 = 4A^2$, tj. $A = 3$. Netlumené vlastní kmity jsou tedy popsány funkcí

$$y(t) = 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) , \tag{2.20}$$

jejíž graf je na obr. 2.3 vpravo.

Úloha 2.6 Jak se změní výsledek předchozí úlohy, vezmeme-li v úvahu působení gravitační síly? Proveďte výpočet a grafické porovnání výstupů. (Řešení: str. 50)

Nyní předpokládejme, že působí síla odporu prostředí, která je přímo úměrná rychlosti pohybu. Vyjádříme-li ji výrazem $-2ry'(t)$, bude mít pohybová rovnice tvar

$$m\frac{d^2y}{dt} = -ky - 2r\frac{dy}{dt} .$$

Při označení koeficientu odporu prostředí $a = r/m > 0$ dostáváme diferenciální rovnici tlumených kmitů

$$y''(t) + 2ay'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 . \tag{2.21}$$

Příslušná charakteristická rovnice rovnice $p^2 + 2ap + \omega_0^2 = 0$ má kořeny

$$p_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_0^2} , \tag{2.22}$$

které mají zásadní vliv na charakter řešení. Je tedy nutno rozlišit tři následující případy.

(1) $a^2 - \omega_0^2 > 0$, tj. $a > \omega_0$
Charakterická rovnice má dva různé reálné záporné kořeny

$$p_1 = -a + \sqrt{a^2 - \omega_0^2} , \qquad p_1 = -a - \sqrt{a^2 - \omega_0^2} ;$$

obecným řešením bude tedy funkce

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} . \tag{2.23}$$

Kmity nejsou v tomto případě periodické, okamžitá výchylka klesá s rostoucím časem k nule. Jedná se o silně tlumený neharmonický pohyb.

(2) $a^2 - \omega_0^2 = 0$, tj. $a = \omega_0$
Má-li charakteristická rovnice jeden dvojnásobný kořen $p_{1,2} = -a$, obdržíme opět aperiodické obecné řešení, avšak ve formě

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-at} , \tag{2.24}$$

která představuje tzv. kriticky tlumený pohyb.

(3) $a^2 - \omega_0^2 < 0$, tj. $a < \omega_0$
Nyní je výsledkem dvojice kompleně sdružených kořenů

$$p_{1,2} = -a \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - a^2}\,,$$

kde položíme $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$. Obecné řešení pak můžeme psát ve tvaru

$$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{-at} \cos \beta t + C_2 \mathrm{e}^{-at} \sin \beta t\,. \tag{2.25}$$

Analogicky jako v případě netlumených kmitů můžeme přejít k vyjádření, v němž vystupuje amplituda a fáze kmitů:

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-at} \sin(\beta t - \varphi)\,. \tag{2.26}$$

Tento výsledek reprezentuje (slabě) tlumený periodický pohyb s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - a^2}}\,, \tag{2.27}$$

jehož amplituda $A\mathrm{e}^{-at}$ klesá s rostoucím čase exponenciálně k nule.

Příklad 2.4 Kmitavý pohyb je popsán rovnicí $y'' + 2ay' + 0.25y = 0$. Proveďte jeho rozbor pro zadané hodnoty koeficientu odporu a. Výsledky znázorněte graficky při počátečních podmínkách $y(0) = 1$, $y'(0) = 1.25$, je-li (A) $a = 1.0625$, (B) $a = 0.5$.

(A) V diferenciální rovnici $y'' + 2.125y' + 0.25y = 0$ je $\omega_0 = 0.5 > a = 1.0625$, a proto se jedná o silně tlumený pohyb. Kořenům charakteristické rovnice $r_1 = -2$, $r_2 = -0.125$ odpovídá jako obecné řešení aperiodická funkce

$$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-0.125t}\,.$$

Konstanty C_1, C_2 snadno najdeme obvyklým způsobem a získáme výslednou funkci

$$y(t) = -\frac{11}{15}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{26}{15}\mathrm{e}^{-0.125t}\,.$$

(B) Nyní je $\omega_0 = 0.5 = a$. Podle (2.24) můžeme přímo napsat obecné řešení kriticky tlumeného pohybu

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-0.5t}\,,$$

pro který vedou počáteční podmínky k hodnotám konstant $C_1 = 1$, $C_2 = 1.75$. Výsledné řešení

$$y(t) = (1 + 1.75t)\mathrm{e}^{-0.5t}$$

je spolu s výsledkem úlohy (A) znázorněno na obr. 2.4 vlevo.

Příklad 2.5 Vyšetřete harmonický pohyb popsaný rovnicí $y'' + 2y' + 101y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 9$.

V rovnici je $a = 1$ menší než úhlová frekvence $\omega_0 = \sqrt{101}$, proto se jedná tlumený periodický pohyb o frekvenci $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - a^2} = 10$, který je popsán funkcí

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-t}\sin(10t - \varphi)\ .$$

Přistoupíme nyní k výpočtu amplitudy a fáze z počátečních podmínek. Protože

$$y'(t) = -A\mathrm{e}^{-t}\sin(10t - \varphi) + 10A\mathrm{e}^{-t}\cos(10t - \varphi)\ ,$$

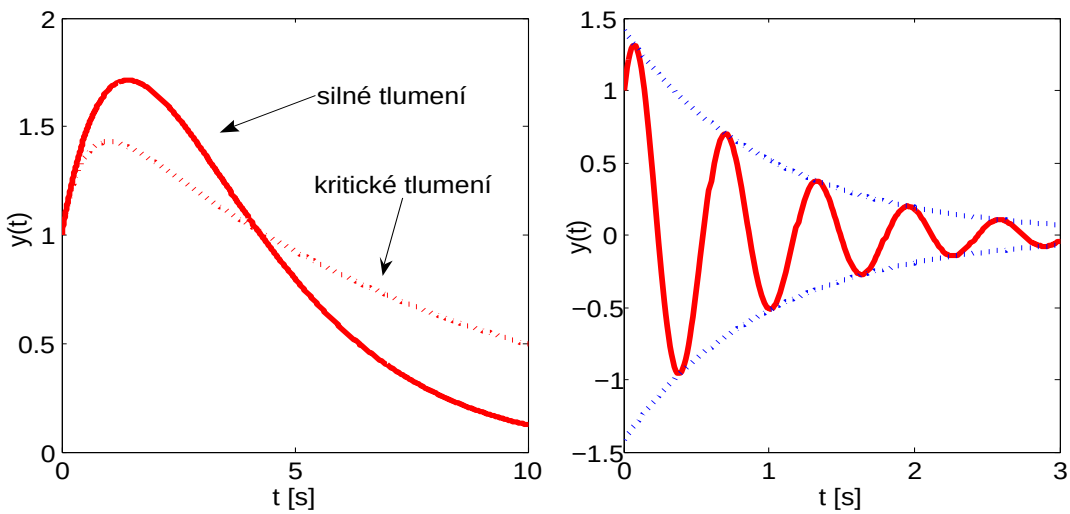
obdržíme pro $t = 0$ soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= -A\sin\varphi\ , \\ 9 &= A\sin\varphi + 10A\cos\varphi\ . \end{aligned}$$

Dosadíme-li z první rovnice do druhé (nebo: sečteme-li je), vychází jednodušší rovnost $1 = A\cos\varphi$, kterou použijeme spolu s první rovnicí analogickým postupem jako v případě (2.18) k určení amplitudy $A = \sqrt{2}$ a fáze $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ těchto tlumených kmitů. Výsledný harmonický pohyb je tedy určen předpisem

$$y(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\sin(10t + \frac{\pi}{4})\ ,$$

část grafu této funkce je na obr. 2.4 vpravo.



Obrázek 2.4: Tlumené vlastní mechanické kmity.

2.3.2 Nucené kmity

Připusťme, že na oscilátor kromě odporu prostředí působí periodicky proměnná síla $F\sin\omega t$ (vztažená na jednotku hmotnosti) s konstantní amplitudou F a úhlovou frekvencí ω. Diferenciální rovnice kmitavého pohybu nabývá pak tvaru

$$y'' + 2ay' + \omega_0^2 y = F \sin \omega t \,. \tag{2.28}$$

Její obecné řešení $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ je součtem řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení úplné rovnice. V následujícím modelu se omezíme na případ $a^2 - \omega_0^2 < 0$, kdy zkrácená rovnice popisuje slabě tlumený kmitavý pohyb. Její řešení je podle (2.26)

$$y_h(t) = A\mathrm{e}^{-at} \sin(\beta t - \varphi) \,, \qquad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - a^2} \,. \tag{2.29}$$

Partikulární řešení rovnice (2.28), jejíž pravou stranou je goniometrická funkce, hledáme ve tvaru

$$y_p = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \,.$$

Tuto funkci a její derivace dosadíme do úplné rovnice, odkud po úpravě dostáváme

$$\left(-C_1\omega^2 - 2aC_2\omega + C_1\omega_0^2\right) \sin \omega t + \left(-C_2\omega^2 - 2aC_1\omega + C_2\omega_0^2\right) \cos \omega t = F \sin \omega t \,.$$

Porovnáním výrazů u goniometrických funkcí téhož typu obdržíme dvojici algebraických rovnic, která má jediné řešení

$$C_1 = \frac{F(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \,, \qquad C_2 = \frac{-2a\omega F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \,.$$

Také zde je žádoucí nahradit konstanty C_1, C_2 dvojicí B, ψ tak, že $C_1 = B \cos \psi$, $C_2 = B \sin \psi$. Partikulární řešení lze poté psát ve tvaru

$$y_p = B \sin(\omega t - \psi) \,, \tag{2.30}$$

kde $B > 0$ je amplituda a ψ fázový posuv vynucených kmitů. Pro tyto konstanty obdržíme relace

$$B \cos \psi = \frac{F(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \,, \qquad B \sin \psi = \frac{2a\omega F}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \,. \tag{2.31}$$

Pro $\omega_0 = \omega$ plyne z levého vztahu $\cos \psi = 0$, tj. $\psi = \pi/2$. Při $\omega_0 \neq \omega$ je ze druhého z nich zřejmé, že $\sin \psi > 0$ a tedy $\psi \in (0, \pi)$. Vydělíme-li pravý vztah levým, vychází

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \,, \quad \Rightarrow \quad \psi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{2a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{pro} \quad \omega_0 > \omega \,, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{2a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{pro} \quad \omega_0 < \omega \,. \end{cases} \tag{2.32}$$

Jestliže rovnice (2.31) umocníme a sečteme, získáme po úpravě vyjádření amplitudy

$$B = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}} \,. \tag{2.33}$$

Závěrem lze konstatovat, že obecné řešení rovnice nucených kmitů v odporujícím prostředí se skládá z řešení pro vlastní kmity (2.29) a partikulárního řešení (2.30) generovaného jako důsledek nucených kmitů:

$$y(t) = \hat{A}\mathrm{e}^{-at}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - a^2}\,t - \hat{\varphi}) + \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}}\sin(\omega t - \psi)\,. \tag{2.34}$$

Je důležité si povšimnout, že první člen vyjadřující vlastní kmity je exponenciálně tlumen. To znamená, že po dostatečně velkém časovém úseku bude systém kmitat s frekvencí nutící síly ω. Amplitudu $\hat{A}$ a fázi $\hat{\varphi}$ následně určíme z počátečních podmínek.

Hledejme v případě nucených kmitů frekvenci, při níž bude amplituda oscilací maximální, neboť dojde k rezonanci vlastních a nucených frekvencí. Jak napovídá druhý člen závislosti (2.34), taková situace nastane, bude-li jmenovatel zlomku co nejmenší. Určíme proto minimum funkce

$$J(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\,.$$

Položíme-li její derivaci $J'(\omega)$ rovnu nule, obdržíme algebraickou rovnici

$$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8a^2\omega = 0$$

mající tři reálné kořeny 0, $\pm\sqrt{\omega_0^2 - 2a^2}$. Fyzikální smysl má pouze kladný kořen

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2a^2}\,, \tag{2.35}$$

o němž se snadno přesvědčíme, že představuje minimum funkce $J(\omega)$. Jde o rezonanční frekvenci, která udává takový kmitočet budící síly, při němž systém dosahuje maximální amplitudy. Jde-li o netlumený kmitavý děj ($a = 0$), roste amplituda neomezeně.

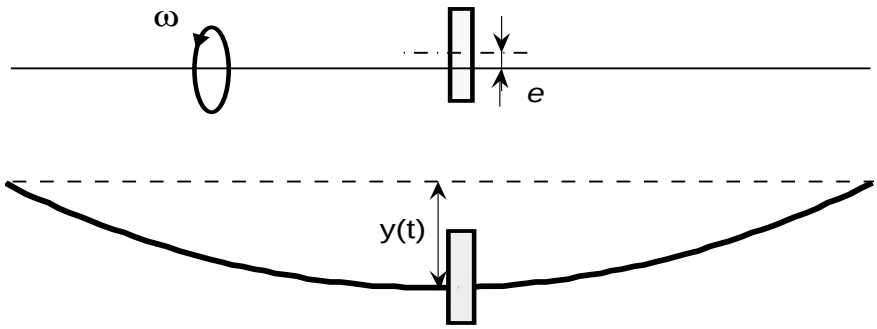
Úloha 2.7 Řešte rovnici netlumených nucených kmitů $y'' + 4y = f(t)$ s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, je-li nutící síla předepsána funkcí
(a) $f(t) = 2\cos t$, **(b)** $f(t) = 2\sin 2t$. (Řešení: str. 50)

Úloha 2.8 Napište diferenciální rovnici pro tlumené nucené kmity s vlastní frekvencí ω_0 a tlumícím faktorem $2a$. Nutící síla vztažená na jednotku hmotnosti má amplitudu F, úhlovou frekvenci ω a nulový fázový posuv. Úlohu řešte pro hodnoty $a = 0.05$, $\omega_0^2 = 1.0025$, $F = 3$ a $\omega = 3$. Výsledný průběh znázorněte graficky pro $t \in \langle 0, 100\rangle$ a nulové počáteční podmínky. (Řešení: str. 51)

Úloha 2.9 Na hřídeli turbíny otáčející se úhlovou rychlostí ω je upevněno ozubené kolo o hmotnosti m. Neprochází-li osa turbíny těžištěm ozubeného kola, dochází k nežádoucím vibracím způsobeným vychýlením osy hřídele. Označme e excentricitu ozubeného kola, tj. vzdálenost jeho těžiště od osy hřídele (obr. 2.5). Vychýlení osy hřídele $y(t)$ má periodický charakter popsaný diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right)y(t) = g\cos\omega t + \omega^2 e\,, \tag{2.36}$$

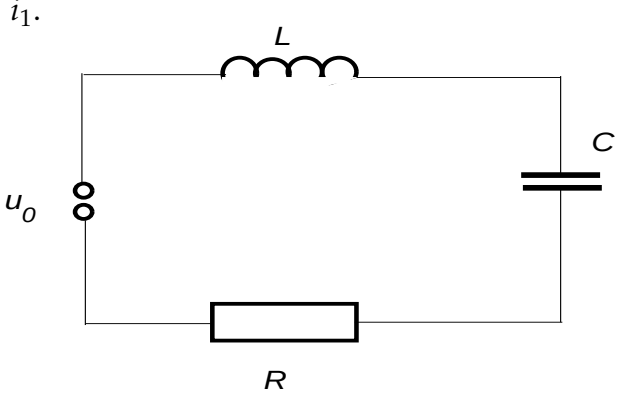
kde α je konstanta závisející na způsobu upevnění hřídele a g je gravitační zrychlení. Najděte obecné řešení této rovnice při podmínce $m\alpha\omega^2 < 1$. (Řešení: str. 52)



Obrázek 2.5: K úloze 2.9.

2.4 Elektrický oscilační obvod

Cílem je vytvořit a řešit matematický model elektrického obvodu s cívkou o indukčnosti L, odporem R a kondenzátorem o kapacitě C – obr. 2.6. V tomto RCL obvodu je třeba určit časový průběh elektrického proudu $i(t)$ při napětí $u_0(t)$ na vstupu a počátečních podmínkách $i(0) = i_0$, $i'(0) = i_1$.



Obrázek 2.6: Schéma RCL obvodu.

Z Kirchhoffových zákonů plyne, že vstupní napětí při sériovém zapojení je součtem napětí na jednotlivých prvcích, což vede k integro-diferenciální rovnici

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = u_0(t)\,.$$

Je-li $u_0(t)$ diferencovatelná funkce, obdržíme derivováním počáteční úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = u_0'(t)\,, \qquad i(0) = i_0,\ i'(0) = i_1\,.$$

Vypočteme-li kořeny charakteristické rovnice

$$p_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}\,,$$

je zřejmé, že konkrétní průběh proudu je závislý (kromě vstupního napětí) na parametrech $R,\ L,\ C$, tj. na tom, zda kořeny $p_1,\ p_2$ jsou reálné (neharmonický průběh) nebo komplexní

(harmonický průběh). Zde se zaměříme na druhý případ a budeme se zabývat oscilacemi v sériových obvodech.

Formálně se jedná a stejný typ úlohy, jaký byl řešen v případě mechanických kmitů. Ještě patrnější shodu vidíme, položíme-li $R/L = 2a$, $1/(LC) = \omega_0^2$. Rovnice

$$i''(t) + 2ai'(t) + \omega_0^2 i(t) = \frac{1}{L} u_0'(t) \tag{2.37}$$

generuje pro $a < \omega_0$ oscilace v elektrickém obvodu v závislosti na dalších vstupních datech. Při řešení tedy můžeme využít tytéž postupy, resp. formule, které jsme odvodili v předchozí podkapitole.

Příklad 2.6 Vyšetříme vlastní oscilace elektrického proudu v RCL obvodu s následujícími parametry: indukčnost $L = 8$ mH (milihenry), kapacita $C = 500\,\mu$F (mikrofarad), odpor $R = 0.8\,\Omega$ (ohm). Počáteční elektrický proud má hodnotu 0.1 A (ampér) a nulovou počáteční derivaci.

Jednotky u vstupních dat převedeme na základní, tj. $L = 0.008$ H a $C = 0.0005$ F. Pak vypočteme tlumící faktor a vlastní frekvenci na základě výše uvedených relací:

$$2a = R/L = 100\,, \qquad \omega_0^2 = 1/(LC) = 25000.$$

Výchozí diferenciální rovnici pro výpočet průběhu elektrického proudu včetně počátečních podmínek tedy zapíšeme ve tvaru

$$i''(t) + 100i'(t) + 25000i(t) = 0\,, \qquad i(0) = i_0 = 0.1, \quad i'(0) = i_1 = 0\,. \tag{2.38}$$

Obecné řešení budeme hledat ve shodě s výrazem pro vlastní mechanické kmity (2.26)

$$i(t) = A\mathrm{e}^{-at}\sin(\beta t - \varphi)\,, \tag{2.39}$$

kde $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$ a kde dále A, φ jsou opět amplituda a fáze, které určíme za pomoci počátečních podmínek. Je užitečné provést výpočet nejprve obecně, aby bylo možno výsledky uplatnit i později. Položíme $t = 0$ ve funkci $i(t)$ a její derivaci

$$i'(t) = -aA\mathrm{e}^{-at}\sin(\beta t - \varphi) + \beta A\mathrm{e}^{-at}\cos(\beta t - \varphi)$$

s tímto výsledkem: $i_0 = -A\sin\varphi$, $i_1 = aA\sin\varphi + \beta A\cos\varphi$. Po jednoduché úpravě pak získáme soustavu

$$i_0 = -A\sin\varphi\,, \tag{2.40}$$

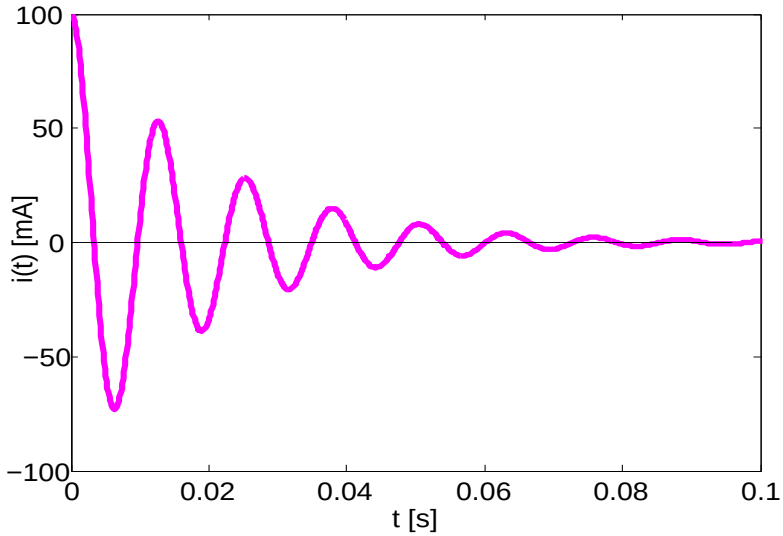
$$ai_0 + i_1 = \beta A\cos\varphi\,, \tag{2.41}$$

odkud známým postupem vyjádříme nejprve amplitudu

$$A = \sqrt{i_0^2 + \left(\frac{ai_0 + i_1}{\beta}\right)^2}\,. \tag{2.42}$$

Při stanovení fázového posuvu φ je nutno vzít v úvahu, že může nabývat hodnot z celého intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$, a proto musí splňovat současně výše uvedené rovnice (2.40), (2.41).

Výpočet se zadanými vstupními daty vede k hodnotám $\beta = 497.5$, $A = 0.1005$, $\varphi = -84.26°$. Časový průběh oscilací je znázorněn na obr. 2.7.



Obrázek 2.7: Vlastní tlumené kmity v RCL obvodu.

Úloha 2.10 Určete průběh oscilací elektrického proudu v RCL obvodu s odporem $R = 0.16\,\Omega$, kapacitou $C = 10$ mF a indukčností $L = 50$ mH. Počáteční hodnoty proudu mají hodnotu $i(0) = 0.2$ A, $i'(0) = -2$ As^{-1}. Proveďte řešení

(a) pro vlastní kmity,

(b) pro nucené kmity, je-li na vstupu je připojeno napětí $u_0 = 0,2 \sin 30t$ voltů.

(Řešení: str. 52)

Úloha 2.11 Pro elektrický obvod s parametry dle příkladu 2.6 určete rezonanční frekvenci, při níž je na vstupu připojeno napětí se sinovým průběhem a amplitudou 10 V. Vypočtěte a graficky demonstrujte průběh proudu v obvodu v časovém intervalu od 0 do 3 sekund. (Řešení: str. 53)

Kapitola 3

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

3.1 Dynamické úlohy

Aplikace tohoto typu patří mezi velmi rozšířené. Řadíme mezi ně zpravidla úlohy z mechaniky, termo- a hydrodynamiky, popřípadě také z elektrodynamiky. Zadání vedoucí na soustavy diferenciálních rovnic zařazená do této sbírky se omezují (i v dalších tématických oddílech) na lineární rovnice s konstantními koeficienty.

3.1.1 Vyrovnávání hladin v nádržích

V principu se jedná o dynamiku hladin ve spojených nádobách (obr. 3.1), při níž klíčovou roli hraje model průtoku mezi nimi. V následující úloze je uvažován nejjednodušší – lineární – případ.

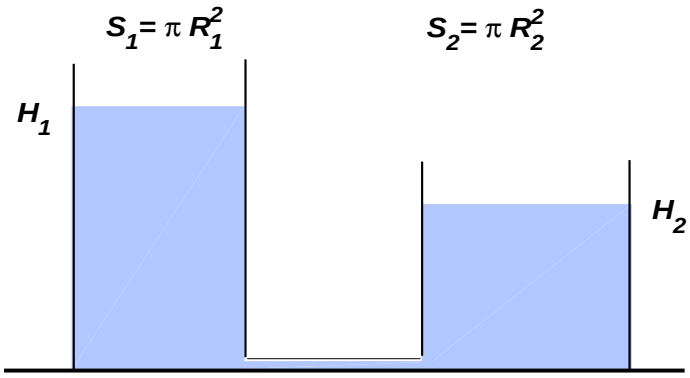
Úloha 3.1 Dvě válcové nádoby stojící na vodorovné podložce jsou spojeny úzkou kapilárou. První z nich má poloměr R_1 a hladina vody v ní dosahuje výšky H_1, ve druhé o poloměru R_2 se hladina nachází ve výšce $H_2 < H_1$ (obr. 3.1). Objemový tok kapilárou je úměrný rozdílu výšek hladin s konstantou úměrnosti α.

1. Odvoďte časový průběh změn výšek hladin.
2. Znázorněte výsledek ve fázové rovině (jako přímou závislost mezi výškami h_1, h_2) a určete, kdy dojde k vyrovnání hladin.
3. Vyjádřete rozdíl mezi hladinami za 15 minut.

Při výpočtu použijte následující hodnoty (rozměry v cm):
$R_1 = 5$, $R_2 = 4$, $H_1 = 30$, $H_2 = 8$, $\alpha = 0.1\,\mathrm{cm^2 s^{-1}}$. (Řešení: str. 53)

3.1.2 Pohyb nabité částice v magnetickém poli

Uvažujme situaci podle obr. 3.2. Částice nese kladný náboj Q a vstupuje konstantní rychlostí v_0 do homogenního magnetického pole charakterizovaného vektorem magnetické indukce $\boldsymbol{B}$. Na částici působí jednak setrvačná newtonovská síla $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ a dále Lorentzova síla $\boldsymbol{F}_L = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$, přičemž $\boldsymbol{v}$ je okamžitá rychlost částice, kterou máme stanovit. Síly musí být v rovnováze, což je vyjádřeno rovnicí



Obrázek 3.1: Spojené nádoby.

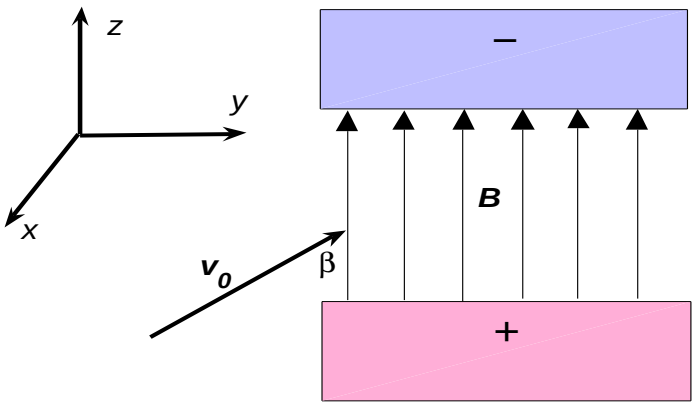
$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \,. \tag{3.1}$$

V zavedeném souřadném systému je $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ a $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$, takže

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = B(v_y, -v_x, 0) \,.$$

Rovnici (4.8) po úpravě obdržíme ve tvaru soustavy tří diferenciálních rovnic prvního řádu pro složky rychlosti

$$\boldsymbol{v}' = \omega(v_y, -v_x, 0)^\top \qquad \text{neboli} \qquad \begin{bmatrix} v'_y \\ v'_x \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ v_x \\ v_z \end{bmatrix} \,. \tag{3.2}$$



Obrázek 3.2: Částice v homogenním magnetickém poli.

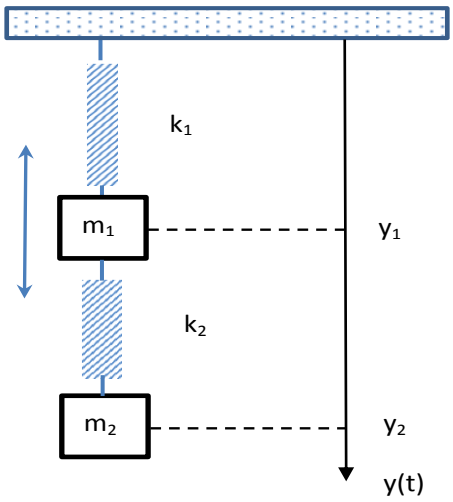
Vzhledem k velmi jednoduché matici soustavy lze při výpočtu postupovat také dosazovací metodou. Po určení složek vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ při zadaných počátečních podmínkách $\boldsymbol{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ můžeme další integrací odvodit trajektorii (polohový vektor) částice:

$$\boldsymbol{s}(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}(\tau)\, d\tau \,.$$

Úloha 3.2 Řešte úlohu (3.2) s cílem určit rychlostní pole $v(t)$ a parametrické rovnice trajektorie za předpokladu, že částice vstupuje do magnetického pole v rovině $x = 0$. Proveďte diskuzi typu trajektorie vzhledem k úhlu β (obr. 3.2), který svírá vektor počáteční rychlosti s vektorem magnetické indukce. Sestrojte graf trajektorie pro následující vstupní data:
$Q = 0.001$ C (coulomb), $B = 0.4$ T (Tesla), $m = 0.0002$ kg, $v_0 = 3\sqrt{2}$ ms^{-1}, $\beta = 45°$ (vzdálenost pólů magnetu neberte v úvahu). (Řešení: str. 55)

3.1.3 Dvě závaží na pružinách

Závaží o hmotnosti m_1 kmitá na pružině s tuhostí k_1 a k němu je upevněna další pružina o tuhosti k_2 se závažím o hmotnosti m_2 (obr. 3.3). Sestavíme matematický model pro stanovení pohybových rovnic obou závaží. Odpor prostředí zanedbáme a nebudeme přihlížet ani ke vlivu tíhového pole.



Obrázek 3.3: Spřažená závaží na pružinách.

Východiskem budou vztahy pro harmonické kmity diskutované v kapitole 2.3. Označíme-li $y_1(t)$ a $y_2(t)$ okamžité polohy těžišť závaží, pak pro druhé z nich zjevně platí

$$m_2 y_2'' + k_2(y_2 - y_1) = 0\,. \tag{3.3}$$

V rovnici pro první závaží pak musí člen reprezentující vazbu na závaží m_2 vystupovat s opačným znaménkem, a proto

$$m_1 y_1'' + k_1 y_1 - k_2(y_2 - y_1) = 0\,. \tag{3.4}$$

Počáteční podmínky zvolíme pro jednoduchost s nulovými počátečními rychlostmi, a tedy

$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_1'(0) = 0, \quad , y_2(0) = y_{20} > y_{10}, \quad y_2'(0) = 0\,. \tag{3.5}$$

Tato soustava dvou diferenciálních rovnic 2. řádu může být vhodnou substitucí transformována na soustavu čtyř rovnic prvního řádu – stačí zavést dvě nové neznámé funkce relacemi

$$y_3 = y_1'\,, \qquad y_4 = y_2'\,.$$

Položíme-li postupně

$$a_1 = \frac{k_1}{m_1}, \qquad a_2 = \frac{k_2}{m_2}, \qquad a_3 = \frac{k_2}{m_1},$$

můžeme novou soustavu a její počáteční podmínky zapsat takto:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3, && (3.6)\\ y_2' &= y_4, && (3.7)\\ y_3' &= -(a_1 + a_3)y_1 + a_3 y_2, && (3.8)\\ y_4' &= a_2 y_1 - a_2 y_2, && (3.9) \end{aligned}$$

$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}, \quad y_3(0) = 0, \quad y_4(0) = 0\,. \tag{3.10}$$

Příklad 3.1 Dokažte, že řešením soustavy (3.6)-(3.9) jsou netlumené složené harmonické kmity.

Je třeba dokázat, že matice soustavy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 - a_3 & -a_3 & 0 & 0 \\ a_2 & -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

má pouze ryze imaginární vlastní čísla. Proto položíme roven nule determinant $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ neboli

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -a_1 - a_3 & -a_3 & -\lambda & 0 \\ a_2 & -a_3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^4 + (a_1 + a_2 + a_3)\lambda^2 + a_1 a_2 = 0\,.$$

Tato bikvadratická rovnice má dílčí řešení

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(-(a_1 + a_2 + a_3) \pm \sqrt{(a_1 + a_2 + a_3)^2 - 4a_1 a_2}\right),$$

které je vždy menší než nula, a proto obdržíme vlastní čísla ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = \pm\beta_1 \mathrm{i}, \qquad \lambda_{3,4} = \pm\beta_2 \mathrm{i}\,.$$

Další výpočet proto vede na lineární kombinaci harmonických funkcí s úhlovými frekvencemi β_1, β_2.

Úloha 3.3 Vhodnou metodou řešte soustavu (3.6)-(3.10) s těmito vstupními daty: $k_1 = 0.8$, $m_1 = 0.1$, $k_2 = 1.5$, $m_2 = 0.05$, $y_{10} = 0.1, y_{20} = 0.05$ (délky v metrech, hmotnosti v kg, tuhost pružin v kg/s).
Výsledný průběh zobrazte v časovém úseku 0 až 90 sekund. (Řešení: str. 55)

3.2 Radioaktivní rozpad

3.2.1 Výchozí vztahy.

Jak bylo ukázáno v kapitole 1.1, je úbytek částic (atomů) radioaktivního izotopu za jednotku času způsobený radioaktivním rozpadem přímo úměrný počtu dosud nerozpadlých atomů. Je-li výchozí počet částic $N(0) = N_0$, má příslušná počáteční úloha řešení

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,, \tag{3.11}$$

kde λ je tzv. rozpadová konsranta. V praktických aplikacích se zpravidla pracuje nikoli s počtem atomů N, nýbrž s aktivitou izotopu $A(t) = \lambda N(t)$, jejíž jednotkou je jeden becquerel (Bq). Předchozí relace se pak snadno modifikují do tvaru

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda A(t)\,, \qquad A(t) = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,, \tag{3.12}$$

kde A_0 je počáteční aktivita izotopu. Rozpadové konstanty bývají nahrazeny tzv. poločasem rozpadu T, který udává dobu, za kterou se počet atomů rozpadem zmenší na jednu polovinu původního množství. Ze vztahu (3.11) snadno odvodíme, že $T = \ln 2/\lambda$.

Uvažme nyní situaci, kdy se izotop charakterizovaný počtem částic $N^{(1)}$ a konstantou $\lambda^{(1)}$ rozpadá na další izotop, jehož počet atomů označíme $N^{(2)}$. Ten se dále rozpadá s rozpadovou konstantou $\lambda^{(2)}$, takže je nutno uvažovat dvojici bilančních rovnic

$$\frac{dN^{(1)}}{dt} = -\lambda^{(1)} N^{(1)}(t)\,, \qquad \frac{dN^{(2)}}{dt} = -\lambda^{(2)} N^{(2)}(t) + \lambda^{(1)} N^{(1)}(t)\,. \tag{3.13}$$

Pokračuje-li tento proces další posloupností rozpadajících se izotopů, hovoříme o rozpadové řadě. V případě, že nedochází k jejímu větvení (produktem rozpadu je vždy jediný další izotop), platí pro k-tý člen

$$\frac{dN^{(k)}}{dt} = -\lambda^{(k)} N^{(k)}(t) + \lambda^{(k-1)} N^{(k-1)}(t)\,. \tag{3.14}$$

Nahradíme-li počty atomů aktivitami izotopů, přejdou rovnice (3.13) do tvaru

$$\frac{dA^{(1)}}{dt} = -\lambda^{(1)} A^{(1)}(t)\,, \qquad \frac{dA^{(2)}}{dt} = -\lambda^{(2)} A^{(2)}(t) + \lambda^{(2)} A^{(1)}(t) \tag{3.15}$$

s analogickými důsledky pro případné další členy rozpadové řady.

3.2.2 Základní úloha

Ukážeme řešení soustavy (3.15), v níž předpokládáme počáteční aktivity izotopů o hodnotách $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$. Uplatníme postup, který se bezprostředně nabízí, a sice postupné řešení jednotlivých diferenciálních rovnic. Pro první z nich je výsledek nasnadě dle (3.12):

$$A^{(1)}(t) = A_0^{(1)} \mathrm{e}^{-\lambda^{(1)} t} . \tag{3.16}$$

Po dosazení do rovnice pro druhý izotop obdržíme lineární diferenciální rovnici

$$\frac{dA^{(2)}}{dt} + \lambda^{(2)} A^{(2)}(t) = \lambda^{(2)} A_0^{(1)} \mathrm{e}^{-\lambda^{(1)} t} , \tag{3.17}$$

s obecným řešením $A_h^{(2)}(t) + v(t)$, kde $A_h^{(2)}(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda^{(2)} t}$ je řešení homogenní úlohy (s nulovou pravou stranou). Dalším krokem je variace konstanty, která umožní určení partikulárního integrálu $v(t)$. Výpočet vede k funkci

$$C(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0^{(1)} \mathrm{e}^{(\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}) t} + K ,$$

takže získáváme obecné řešení rovnice (3.17)

$$A^{(2)}(t) = K\mathrm{e}^{-\lambda^{(2)} t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0^{(1)} \mathrm{e}^{-\lambda^{(1)} t} ,$$

v němž konstantu K snadno určíme z počáteční podmínky:

$$K = A_0^{(2)} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0^{(1)} .$$

Výsledná aktivita druhého izotopu bude tedy dána vztahem

$$A^{(2)}(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0^{(1)} \mathrm{e}^{-\lambda^{(1)} t} + \left(A_0^{(2)} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0^{(1)} \right) \mathrm{e}^{-\lambda^{(2)} t} . \tag{3.18}$$

3.2.3 Jiný postup řešení

V případě většího počtu členů rozpadové řady lze dále opakovat postup aplikovaný na rovnici (3.17), což může být časově dosti náročné. Nabízí se proto možnost použít algebraickou metodu řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic, která je založena na využití vlastních čísel a vlastních vektorů matice soustavy. Jednotlivé kroky postupu budeme demonstrovat na předchozí úloze.

Soustavu (3.15) se zadanými počátečními podmínkami zapíšeme ve tvaru

$$d\boldsymbol{A}/dt = \mathbf{M}\boldsymbol{A} , \qquad \boldsymbol{A}(0) = \boldsymbol{A_0} , \tag{3.19}$$

kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{A_0} = \begin{bmatrix} A_0^{(1)} \\ A_0^{(2)} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{bmatrix} . \tag{3.20}$$

Jak je známo, každé její řešení lze vyjádřit ve tvaru $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{u}\mathrm{e}^{rt}$. Po dosazení do rovnice a úpravě obdržíme homogenní algebraickou soustavu

$$(\mathbf{M} - r\mathbf{I})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \tag{3.21}$$

pro vlastní vektory $\boldsymbol{u}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Soustava má netriviální řešení, je-li

$$\det(\mathbf{M} - r\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda_1 - r & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 - r \end{vmatrix} = 0\,,$$

tj. pro $r_1 = -\lambda_1$, $r_1 = -\lambda_2$. Těmto vlastním číslům odpovídají (sloupcové) vlastní vektory

$$\boldsymbol{u}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2, -\lambda_2)^\top, \quad \boldsymbol{u}_2 = (0, 1)^\top\,,$$

s nimiž obecné řešení zapíšeme jako lineární kombinací vlastních funkcí:

$$\begin{bmatrix} A^{(1)}(t) \\ A^{(2)}(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\,. \tag{3.22}$$

Počáteční podmínky pro $t = 0$ vedou ke dvojici rovnic pro konstanty C_1, C_2, které obdržíme ve tvaru

$$C_1 = \frac{A_0^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_2}\,, \qquad C_2 = A_0^{(2)} + \frac{\lambda_2 A_0^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_2}\,. \tag{3.23}$$

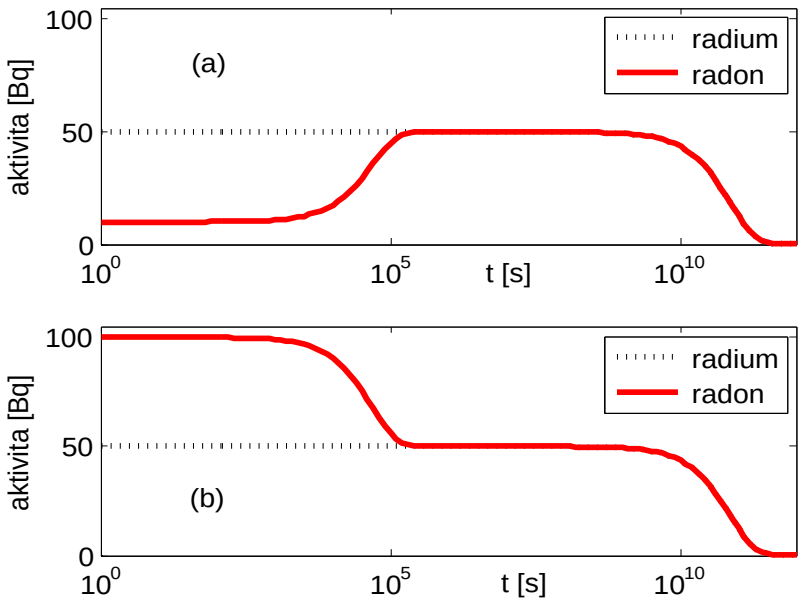
Snadno se přesvědčíme, že se jedná o výsledek shodný s předchozím řešením (3.18).

Příklad 3.2 Součástí rozpadové řady izotopu uranu ^{238}U je úsek, v němž se rozpadá radium ^{226}Ra na radon ^{222}Rn. Úkolem je určit časový průběh aktivit obou izotopů v období 0 až 32000 let, jsou-li dány poločasy rozpadu $T^{(Ra)} = 1600$ let, $T^{(Rn)} = 3.8235$ dne a počáteční aktivita radia $A^{(Ra)} = 50$ Bq. Pro počáteční aktivitu radonu budeme uvažovat dvě varianty: (a) 10 Bq, (b) 100 Bq.

Výpočet spočívá v dosazení zadaných hodnot do dříve odvozených formulí (3.16) a (3.18). Je však nutno sjednotit časovou škálu (na sekundy) a určit rozpadové konstanty z poločasů rozpadu. Výsledkem jsou hodnoty

$$\lambda^{(Ra)} = 1.3737 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}^{-1}\,, \quad \lambda^{(Rn)} = 2.0982 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Vzhledem k exponenciálnímu charakteru hledaného časového průběhu je obvyklé použít pro časovou proměnnou logaritmickou stupnici. Výsledné grafy jsou na obr. 3.4 pro obě počáteční aktivity radonu. V případě (a) aktivita radonu roste až k hodnotě aktivity radia, ve druhém na tuto hodnotu klesá, přičemž závěrečná fáze odpovídá klesající aktivitě radia, které má podstatně delší poločas rozpadu.



Obrázek 3.4: Aktivita radia a radonu.

Úloha 3.4 Produktem rozpadu izotopu radonu ve zmíněné rozpadové řadě uranu je izotop polonia ^{218}Po s poločasem rozpadu $T^{(Po)} = 3.05$ min. a počáteční aktivitou $A^{(Po)} = 25$ Bq, který se dále rozpadá. Na stejné časové škále jako v předchozím příkladu sestavte a řešte úlohu pro určení průběhu aktivity polonia . Aktivitu radonu uvažujte opět ve variantách 10 a 100 Bq. Výsledky interpretujte graficky. (Řešení: str. 56)

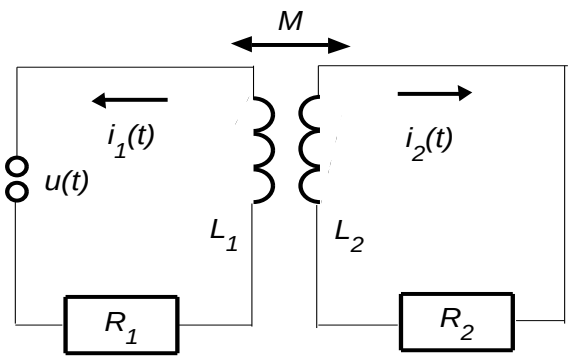
3.3 Elektrický transformátor

Provedeme analýzu proudových poměrů v primárním a sekundárním obvodu transformátoru (obr. 3.5) za těchto předpokladů:

- primární vinutí je připojeno na napětí $u(t)$, počáteční proudy jsou nulové;
- odpor primárního vinutí je R_1, ohmická zátěž sekundárního obvodu je R_2;
- indukčnosti jednotlivých obvodů jsou L_1, L_2, vzájemná indukčnost je M.

Na základě Kirchhoffových zákonů platí pro napětí v jednotlivých obvodech bilanční relace

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} + R_1 i_1(t) &= u(t)\,, \\ M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.24}$$



Obrázek 3.5: Schéma obvodů transformátoru.

Příklad 3.3 Upravte soustavu (3.24) na autonomní tvar a stanovte podmínky pro vstupní parametry, za kterých má řešení fyzikální smysl při harmonickém vstupním napětí $u(t)$.

Jedná se o nehomogenní soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu pro proudy $i_1(t)$, $i_2(t)$ s počátečními podmínkami $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$. Chceme-li ji upravit do autonomního tvaru, v němž je v každé rovnici derivace pouze jedné z funkcí, postupujeme následujícími kroky:
– první rovnici násobíme M a odečteme od druhé rovnice;
– první rovnici násobíme L_2 a odečteme od ní druhou rovnici.
Po úpravě získáme soustavu

$$(L_1L_2 - M^2)\, i_1' = -L_2R_1\, i_1 + MR_2\, i_2 + L_2u(t)\,, \tag{3.25}$$
$$(L_1L_2 - M^2)\, i_2' = MR_1\, i_1 - L_1R_2\, i_2 - Mu(t)\,, \tag{3.26}$$

resp. v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{L_1L_2 - M^2} \begin{bmatrix} -L_2R_1 & MR_2 \\ MR_1 & -L_1R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{L_1L_2 - M^2} \begin{bmatrix} L_1u \\ -Mu \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

Vlastnosti řešení posoudíme na základě vlastních čísel matice soustavy, kterými jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} -L_2R_1 - r & MR_2 \\ MR_1 & -L_1R_2 - r \end{vmatrix} = 0$$

neboli

$$r^2 + (L_1R_2 + L_2R_1)r + R_1R_2(L_1L_2 - M^2) = 0\,.$$

Označíme $D = (L_1R_2 + L_2R_1)^2 - 4R_1R_2(L_1L_2 - M^2)$ diskriminant této kvadratické rovnice, který upravíme na tvar

$$(L_1R_2 - L_2R_1)^2 + 4R_1R_2M^2 > 0\,.$$

Úloha má tudíž reálné kořeny, které musí být menší než nula, aby řešení bylo stabilní, což nastává pro $\sqrt{D} < L_1R_2 + L_2R_1$. Lze snadno odvodit, že tento požadavek je kompatibilní s podmínkou

$$L_1 L_2 - M^2 > 0\,.$$

Úloha 3.5 Vypočtěte a graficky znázorněte průběhy elektrického proudu v obvodech transformátoru při následujících vstupních datech:
$R_1 = 0.2\,\Omega$, $R_2 = 0.3\,\Omega$, $L_1 = 0.02$ H, $L_2 = 0.04$ H, $M = 0.02$ H.
Vstupní střídavé napětí je zadáno ve tvaru $u(t) = u_0 \sin \omega t$ s amplitudou $u_0 = 20$ V a úhlovou frekvencí $\omega = 100\ \mathrm{s}^{-1}$. Počáteční proudy jsou nulové, průběhy určete v čase od 0 do 0.5 s. (Řešení: str. 56)

Úloha 3.6 Převeďte soustavu (3.24) eliminační metodou na diferenciální rovnici druhého řádu pro funkci $i_2(t)$ a stanovte časový průběh proudu a napětí v sekundárním vinutí transformátoru. Graficky znázorněte výsledek pro $t \in \langle 0, 0.1 \rangle$ sekundy s těmito vstupními údaji:
$R_1 = 0.5\,\Omega$, $R_2 = 2.8\,\Omega$, $L_1 = 0.08$ H, $L_2 = 0.0002$ H, $M = 0.003$ H, $u_0 = 220$ V, frekvence $f = \omega/(2\pi) = 50$ Hz. (Řešení: str. 57)

3.4 Ekologické modely

3.4.1 Systém kořist – dravec

Uvažujme dvojsložkový systém, v němž se navzájem ovlivňuje vývoj populace dravců a jejich kořisti. Při modelování časového průběhu změn počtu jedinců v jednotlivých populacích obvykle předpokládáme dostatečně četné skupiny a malé změny jejich velikosti ve zvolených časových úsecích. V takovém případě můžeme místo diskrétního modelu pracovat se spojitými veličinami, jak bylo ukázáno v kapitole 1. Označíme-li $X(t)$ počet jedinců v populaci kořisti v okamžiku t a $Z(t)$ stav populace dravců v témž okamžiku, lze obecný model formulovat jako počáteční úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X, Y, t) + g_1(t)\,, \quad \frac{dY}{dt} = f_2(X, Y, t) + g_2(t)\,, \qquad X(0) = X_0,\ Y(0) = Y_0\,. \tag{3.28}$$

Funkce f_1, f_2 vyjadřují jak procesy uvnitř jednotlivých populací (porodnost, úmrtnost), tak vzájemnou interakci mezi nimi (úbytek kořisti působením predátorů, závislost četnosti dravců na množství potravy). Členy g_1, g_2 reprezentují případné vnější ovlivnění systému například odlovem dravců či přikrmováním kořisti.

Pro sestavení adekvátního modelu je často výhodnější vzít za základ veličiny charakterizující dynamiku populačních změn v čase vyjádřenou časovými derivacemi

$$x(t) = \frac{dX(t)}{dt}\,, \qquad y(t) = \frac{dY(t)}{dt} \tag{3.29}$$

s příslušnými počátečními podmínkami. Mezi nejfrekventovanější modely používané v praxi patří tzv. Lotka-Volterra model, který má pro případ izolovaného systému ($g_1 = g_2 = 0$) tvar

$$\frac{dx(t)}{dt} = k_1 x(t) - k_2 x(t) y(t) \,, \qquad \frac{dy(t)}{dt} = k_2 k_3 x(t) y(t) - k_4 y(t) \,. \tag{3.30}$$

Kladné konstanty k_i, $i = 1, \ldots, 4$ mají následující interpretaci vztaženou k jednotce času:

- k_1 relativní porodnost v populaci kořisti,
- k_2 relativní "kořistění" působením predátorů v populaci kořisti,
- k_3 účinnost přeměny energie biomasy kořisti na biomasu dravců,
- k_4 relativní úmrtnost v populaci kořisti.

3.4.2 Lineární model

Uvedený nelineární model vede v závislosti na parametrech k_i k několika variantám výsledků, jejichž diskuze však překračuje rámec tohoto textu. V některých případech lze využít linearizovaný model "životaschopnosti" jednotlivých populací

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + by(t) \,, \qquad \frac{dy(t)}{dt} = cx(t) + dy(t) \,, \tag{3.31}$$

v němž parametry a, b, c, d mohou nabývat kladných nebo záporných hodnot, případně mohou být rovny nule. Jejich role v modelu jsou následující:

- a, d vyjadřují reprodukční schopnost příslušné populace, která je kladná, převažuje-li porodnost nad úmrtností a naopak,
- b charakterizuje vliv působení dravců na četnost populace kořisti,
- c reprezentuje účinek dostatku, resp. deficitu potravy na populaci dravců.

Příklad 3.4 Proveďte diskuzi možných řešení lineární úlohy na základě vlastností matice soustavy v případě komplexních vlastních čísel.

Jak je známo, lze vlastnosti řešení soustavy (3.31) předem posoudit na základě spektra její matice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} .$$

Komplexním vlastním číslům $\lambda_1 = \alpha + \beta \mathrm{i} = \lambda$, $\lambda_2 = \alpha - \beta \mathrm{i} = \lambda^*$ ($\beta \neq 0$) matice $\mathbf{M}$ odpovídají rovněž komplexně sdružené vlastní vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}^*$. Obecné řešení obsahující pouze reálné funkce (zdůvodněte!) pak píšeme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathrm{Re} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} \right) + C_2 \mathrm{Im} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} \right) . \tag{3.32}$$

Výsledkem je vždy oscilující průběh, avšak je zřejmé, že mohou nastat tři případy vzhledem k signatuře reálné části vlastních čísel:

1. $\alpha > 0$: amplituda oscilací s časem neomezeně roste, řešení je nestabilní;
2. $\alpha = 0$: amplituda je konstantní, řešení je stabilní;
3. $\alpha < 0$: amplituda s časem exponenciálně klesá k nule, řešení je asymptoticky stabilní.

Poznámka

Jelikož veličiny $x(t)$, $y(t)$ představují v principu rychlosti změn počtu jedinců v populacích, zjistíme stavy X_k, Y_k populací v konkrétním časovém okamžiku t_k integrací:

$$X_k = X_0 + \int_0^{t_k} x(t)\,dt\,, \qquad Y_k = Y_0 + \int_0^{t_k} y(t)\,dt\,, \tag{3.33}$$

kde X_0, Y_0 jsou počáteční četnosti populací.

Příklad 3.5 Uvažujeme přírodní rezervaci v redukovaném pojetí jako uzavřený ekologický systém, v němž budeme modelovat časový vývoj populace lišek (dravců) a zajíců (kořisti). Jejich výchozí stavy jsou po řadě 10 a 600 jedinců, přičemž počáteční progrese četností jsou 0.02 u lišek a 0.2 u zajíců za jednotku času, kterou je jeden den. Úkolem je sestavit a řešit linearizovaný model dle výše uvedeného schématu pro období dvou let a posoudit stabilitu tohoto ekologického systému pro následující vstupní data (označení odpovídá předchozímu rozboru): a = 0.05 ; b = -0.02 ; c = 0.17 ; d = -0.05.

Matice soustavy

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.02 \\ 0.17 & -0.05 \end{bmatrix}$$

má ryze imaginární vlastní čísla $\lambda = 0.03\mathrm{i}$, $\lambda^* = -0.03\mathrm{i}$ a příslušné vlastní (sloupcové) vektory $\boldsymbol{u} = (2.5 - 3\mathrm{i})^\top$, $\boldsymbol{u}^* = (2.5 + 3\mathrm{i})^\top$. Obecné řešení úlohy tak můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathrm{Re}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 - 3\mathrm{i} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{0.03\mathrm{i}t} \right) + C_2 \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 - 3\mathrm{i} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{0.03\mathrm{i}t} \right)$$

neboli

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2\cos 0.03t \\ 5\cos 0.03t + 3\sin 0.03t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2\sin 0.03t \\ -3\cos 0.03t + 5\sin 0.03t \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Počáteční podmínky pro růst (pokles) stavů v populacích vedou k jednoduché soustavě

$$\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.02 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix},$$

odkud $C_1 = 0.1$ a $C_2 = 0.16$ a tedy

$$x(t) = 0.2\cos 0.03t + 0.32\sin 0.03t\,, \tag{3.35}$$

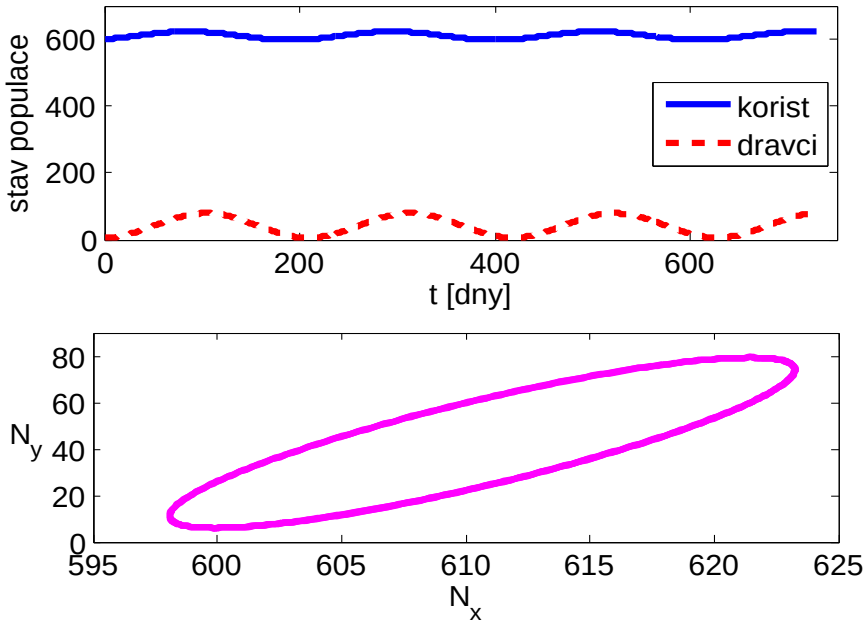
$$y(t) = 0.02\cos 0.03t + 1.1\sin 0.03t\,. \tag{3.36}$$

Podle (3.33) dopočítáme časový vývoj četností populací pro libovolný časový údaj t:

$$X(t) = 600 + \frac{100}{3}\left(0.2\sin 0.03t - 0.32(\cos 0.03t - 1)\right) , \tag{3.37}$$

$$Y(t) = 10 + \frac{100}{3}(0.02\sin 0.03t - 1.1(\cos 0.03t - 1)) . \tag{3.38}$$

Grafické znázornění výsledků v průběhu dvou let je na horním obrázku 3.6, spodní graf ukazuje řešení ve fázové rovině jako přímou závislost mezi četnostmi obou populací. Uzavřenou křivkou je elipsa, která reprezentuje stabilní (periodický) režim, odpovídající ryze imaginárním vlastním číslům matice soustavy.



Obrázek 3.6: Systém kořist-dravec ve výsledcích.

Pro $t = t_k = 730$ dní obdržíme stavy po uplynutí dvou let odpovídající hodnotám v koncových bodech křivek na horním obrázku 3.6: $X = 622$ (zajíci), $Y = 79$ (lišky).

Úloha 3.7 Řešte předchozí úlohu se změněnou reprodukční dispozicí populace dravců $d = -0.04$. (Řešení: str. 57)

Úloha 3.8 V nevelkém rybníce žijí štiky a kapři (k jiným druhům ryb nepřihlížíme). Vývoj jejich populací probíhá s parametry a = 0.06 ; b = -0.2 ; c = 0.3 ; d = -0.1 charakterizujícími lineární model. Počáteční životaschopnost má hodnotu 8 u kaprů a 1 u štik. Určete, jak se budou stavy obou populací vyvíjet po dobu osmi let (jednotkou času je jeden měsíc). Znázorněte vývoj populací ve fázové rovině a klasifikujte stabilitu. (Řešení: str. 58)

Úloha 3.9 V živném roztoku jsou pěstovány dvě kolonie bakterií s označením A, B, jejichž vlastnosti jsou popsány takto:

populace A má životaschopnost charakterizovanou koeficientem $a_1 = 0.2$; působením bakterií B dochází k jejímu úbytku s koeficientem $a_2 = -0.1$, sama však produkuje jed, který naopak hubí jedince v populaci B;

populace B má životaschopnost charakterizovanou koeficientem $b_1 = 0.4$, decimuje populaci A a vymírá působením jedu (koeficient $b_2 = -0.3$).

Životaschopností je rozuměna progrese vývoje, tj. rychlost změn četností populací. Jednotkou času, k níž jsou vztaženy číselné údaje, je jedna hodina.

Tento biosystém je pro uvedená data nestabilní (zdůvodněte!), avšak úpravou živného roztoku můžeme ovlivnit vývoj populace A. Tím se omezí produkce jedu a posílí se populace B, zároveň však vzroste její negativní působení na populaci A. Popsaný proces je číselně vyjádřen takto: klesne-li koeficient a_1 o 0.02δ, $\delta > 0$, pak b_2 vzroste o 0.04δ a současně se a_2 sníží o 0.01δ.

Určete hodnotu δ tak, aby bylo v systému dosaženo stability. Výsledky pro původní a modifikovaný biosystém demonstrujte graficky ve fázové rovině na vhodně zvolené časové škále 0 až 15 hodin. (Řešení: str. 58)

3.4.3 Energetická bilance biosystému

Budeme uvažovat obecnější ekologický systém, v němž vedle masožravých lovců (karnivorů) a jejich kořisti živící se rostlinami (herbivorů) hraje roli i produkce biomasy rostlin, která slouží herbivorům jako potrava. V tomto případě je názornější sledovat energetickou bilanci složek biosystému a jejich vzájemné vazby.

Označme po řadě x_1, x_2, x_3 hustotu energie biomasy rostlin, herbivorů a karnivorů (kJ m^{-2}). Pak můžeme výsledný model popsat soustavou diferenciálních rovnic například takto [6]:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_0(t) - (v_1 + w_1 + f_1)x_1(t)\,, \tag{3.39}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_1 x_1(t) - (v_2 + w_2 + f_2)x_2(t)\,, \tag{3.40}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = f_2 x_2(t) - (v_3 + w_3)x_3(t)\,. \tag{3.41}$$

Význam jednotlivých veličin a koeficientů je následující:

- $f_0 = 4010(1 - 0.635\sin(\omega t - t_r))$, $\omega = 2\pi/365$
  je energetický přísun sluneční energie (kJ m^{-2}den^{-1});
  $t_r = 80$ nastavuje den jarní rovnodennosti jako počáteční;
- f_i reprezentuje rychlost toku biomasy od i-té složky systému;
- v_i udává rychlost ztráty biomasy i-té složky biosystému exspirací;
- w_i představuje rychlost ostatních ztrát biomasy.

Poznámka

Uvedená soustava diferenciálních rovnic je nehomogenní, neboť pvní z nich obsahuje funkci $f_0(t)$ vyjadřující externí zdroj energie.

Úloha 3.10 Úkolem je sledovat po dobu čtyř let energetickou bilanci všech složek popsaného systému. Hodnoty parametrů modelu shrnuje připojená tabulka. Výstupem bude (a) graf časového průběhu energetické bilance biomasy rostlin, (b) analogický graf pro dvojici populací živočichů. (Řešení: str. 58)

i		1	2	3
složka systému		rostliny	herbivoři	karnivoři
počáteční hodnota	$x_i(0)$ [kJ m^{-2}]	250 000	7 000	8 000
rychlost toku biomasy	f_i [1/den]	0.0013	0.0133	
rychlost ztrát exspirací	v_i [1/den]	0.0027	0.0189	0.0074
rychlost ostatních ztrát	w_i [1/den]	0.0070	0.0168	0.0053

Kapitola 4

Výsledky úloh

4.1 Diferenciální rovnice 1. řádu

1.1. Po 200 letech zůstane 97.6% původního množství radioaktivního uhlíku.

1.2. Hledaná závislost teploty na čase je $T = 25 + 75e^{-kt}$, kde $k = 0.2 \ln \frac{5}{3}$. Teplota vody klesne na $30°C$ za 26.5 minuty.

1.3. Napětí na cívce je $u_L = Ldi(t)/dt$. Po dosazení do 2. Kirchhoffova zákona dostáváme lineární diferenciální rovnici

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = U_0, \tag{4.1}$$

kterou řešíme metodou variace konstanty. Po výpočtu obdržíme řešení ve tvaru

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{4.2}$$

Pro napětí na cívce pak vypočteme

$$u_L(t) = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{4.3}$$

1.4. Jde o počáteční úlohu

$$x'(t) = (k_1 - k_2)x(t) + x_m \sin \omega t\,, \qquad x(0) = x_0\,,$$

jejímž řešením je funkce

$$x(t) = \left[x_0 + \frac{\omega x_m}{\omega^2 + (k_1 - k_2)^2}\right] \mathrm{e}^{(k_1 - k_2)t} - \frac{x_m}{\omega^2 + (k_1 - k_2)^2}((k_1 - k_2)\sin \omega t + \omega \cos \omega t)\,.$$

Jelikož je $k_1 - k_2 > 0$, jedná se o nestabilní systém (populace se neomezeně rozrůstá). V případě $k_1 < k_2$ by šlo o asymptoticky stabilní systém s postupným poklesem počtu jedinců. V situaci $k_1 = k_2$ by se četnost periodicky měnila ve stabilním systému.

1.5. Závislost hmotnosti na čase najdeme jako řešení počáteční úlohy

$$\frac{dm}{dt} = -\mu, \quad m(0) = m_0\,, \qquad \text{tj.} \qquad m(t) = m_0 - \mu t\,.$$

Diferenciální rovnice pro výpočet rychlosti vyplývá ze zákona zachování sil:

$$\frac{d(mv)}{dt} + kv - mg = 0\,.$$

Její řešení s počáteční podmínkou $v(0) = 0$ dává výsledek

$$v(t) = \frac{gm_0}{2\mu - k}\left(1 - \frac{\mu}{m_0}t\right)\left[\left(1 - \frac{\mu}{m_0}t\right)^{\frac{k}{\mu}-2} - 1\right]\,.$$

1.6. V nadmořské výšce 1603 m n.m. je atmosférický tlak roven $p = 829\,\mathrm{hPa}$.

1.7. Označíme R_2 poloměr horní podstavy džberu a dále t_V, t_D doby potřebné k vyprázdnění válce, resp. džberu. Rozdíl obou časů do vyprázdnění nádob dává

$$t_D - t_V = \frac{2\sqrt{H}}{15\gamma}\left[2(R_1^2 - R_2^2) + R_1(R_1 - R_2)\right] > 0\,, \qquad \gamma = k\rho^2\sqrt{2g},$$

neboť $R_1 > R_2$. To znamená, že z válcové nádoby voda vyteče dříve.

1.8. Výsledkem je závislost koncentrace produktu c na čase

$$c(t) = 15\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{3t} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{3t} - \frac{1}{4}}\,, \tag{4.4}$$

z níž plyne, že pro $t \to \infty$ se výsledné množství látky C blíží 15 litrům, přičemž za 2 hodiny od počátku reakce je jí 14 litrů.

1.9. Označíme $n(t)$ počet informovaných zákazníků v čase t a zformulujeme diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$\frac{dn(t)}{dt} = k\sqrt{n(N-n)}\,, \qquad n(0) = N_0\,, \tag{4.5}$$

kde k je konstanta úměrnosti, kterou určíme z podmínky, že pro $t = 7$ je $n = N_7$. Výsledkem je závislost

$$n(t) = \frac{N}{2}\left[1 + \sin(kt + C)\right]\,, \tag{4.6}$$

v níž

$$C = \arcsin\frac{2N_0 - N}{N}\,.$$

Dosazením vstupů vypočteme, že potřebná doba je pět týdnů.

1.10. Zavedeme následující označení:

- N ... celková četnost populace,
- n ... počet obyvatel ohrožených infekcí v okamžiku t,
- p ... procentní část nemocných na počátku očkování,
- k ... procentní část zdravých, která onemocní za jeden den,

- q ... počet očkovaných za jeden den.

Bilanční rovnice s počáteční podmínkou:

$$\frac{dn}{dt} = -kn - q\,, \qquad n(t=0) = N - pN = (1-p)N\,.$$

Její řešení:

$$n(t) = \frac{1}{k}\left[((1-p)kN + q)\,\mathrm{e}^{-kt} - q\right]\,.$$

Epidemie skončí, bude-li počet ohrožených obyvatel roven nule:

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{k}\left[1 + (1-p)\frac{k}{q}N\right]\,.$$

Pro zadané hodnoty vychází $t = 60.9$ dne, tj. přibližně dva měsíce.

4.2 Diferenciální rovnice vyšších řádů

2.1. Označme d vzdálenost bodu B od výchozího bodu A. Odporovou sílu vyjádříme vztahem $F_R = F_A(1 - y/d)$ a z rovnováhy sil $ma + F_r = F$ obdržíme po úpravě diferenciální rovnici

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - k^2y(t) = b\,,$$

kde $k^2 = (F_A d)/m$, $b = F/m$. Jako počáteční podmínky v bodě A položíme

$$y(0) = 0,\ y'(0) = v_A = 0\,.$$

Výsledkem je funkce

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{b}{k^2}\left(\mathrm{e}^{kt} + \mathrm{e}^{-kt}\right) - \frac{b}{k^2} = \frac{b}{k^2}(\cosh kt - 1)\,.$$

Rychlost v koncovém bodě B získáme ve dvou krocích:
1) nejprve určíme čas t_d potřebný k překonání vzdálenosti d:

$$d = \frac{b}{k^2}(\cosh kt_d - 1) \qquad \rightarrow \qquad t_d = \frac{1}{k}\mathrm{argcosh}\left(\frac{k^2 d}{b} + 1\right)\,;$$

2) protože $v = y'(t) = \frac{b}{k}\sinh kt$, bude

$$v_B = \frac{b}{k}\sinh kt_d\,.$$

2.2. Výchozím vztahem je rovnost odstředivé a setrvačné síly, tj.

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = m\omega^2 r\,.$$

Diferenciální rovnici $r'' - \omega^2 r = 0$ řešíme při počátečních podmínkách $r(0) = L/4$, $v(0) = r'(0) = 0$. Obdržíme vyjádření trajektorie pohybu a z ní pak čas, za který kuliška dorazí k ústí trubky. Rychlost v tomto okamžiku bude

$$v(L) = \frac{\omega L}{4}\sqrt{15}\,.$$

2.3. Na torpédo pohybující se po trajektorii $y(t)$ působí setrvačná síla $F = my''$, síla pohonu ma a odpor prostředí ry', jejichž výslednice musí být nulová:

$$y'' + ky' = -a\,, \qquad k = r/m\,.$$

Počáteční podmínky mají podle zadání tvar $y(0) = 0$, $y'(0) = v(0) = v_0$. Ze získané závislosti dráhy torpéda na čase vypočteme jeho rychlost a dále čas, v němž střela zasáhne cíl zadanou rychlostí dopadu v_d. Tomuto času odpovídá přiblížení na vzdálenost alespoň na 553 m k cíli.

2.4. Vyřešení úlohy spočívá v určení úhlu α z rovnice (2.11), do níž dosadíme zadané údaje:

$$H = d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}d^2\,.$$

Zavedeme-li pro stručnost označení

$$a = \frac{d}{H}\,, \qquad b = \frac{gd^2}{2v_0^2 H}$$

a použijeme vztah $\cos^{-2}\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$, obržíme kvadratickou goniometrickou rovnici

$$b\,\mathrm{tg}^2\alpha - a\,\mathrm{tg}\,\alpha + b + 1 = 0\,,$$

z níž vypočteme dvě různé hodnoty elevačního úhlu α. Pro zadaná data se jedná o hodnoty $\alpha_1 = 86.50°$, $\alpha_2 = 10.35°$, při kterých šíp dopadne do vzdálenosti 25.19 m, resp. 72.94 m.

2.5. Pohybové rovnice (2.4), (2.5) vyřešíme nejprve obecně. Rovnice trajektorie šikmého vrhu v odporujícím prostředí:

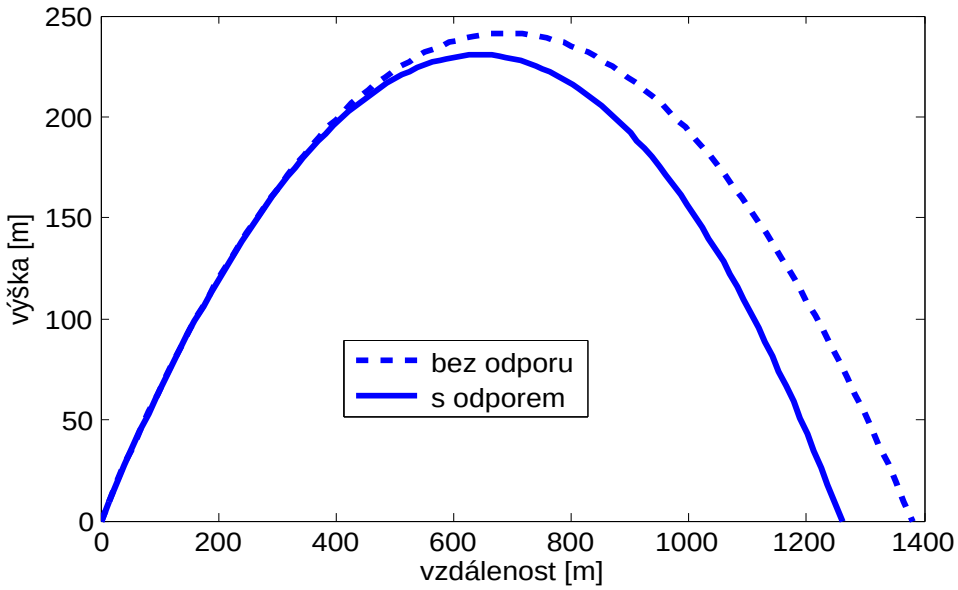
$$x(t) = \frac{v_0}{b}\cos\alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-bt}\right)\,, \qquad y(t) = \frac{1}{b}\left(v_0\sin\alpha + \frac{g}{b}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-bt}\right) - \frac{g}{b}t \tag{4.7}$$

Vzdálenost dopadu $x(t_d)$ stanovíme na základě určení okamžiku dopadu t_d řešením rovnice $y(t) = 0$, pro jejíž numerické řešení je vhodné použít například proceduru `fzero` v Matlabu.

Zanedbáme-li odpor prostředí, je vzdálenost dopadu dána jednoduše vzorcem (2.13)

$$x_d = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha\,.$$

Po dosazení vstupních dat obdržíme (zaokrouhlené) hodnoty vzdálenosti dopadu 1380 m v odporujícím prostředí, resp. 1260 m bez odporu prostředí. Grafy trajektorií demonstruje obr. **??**.



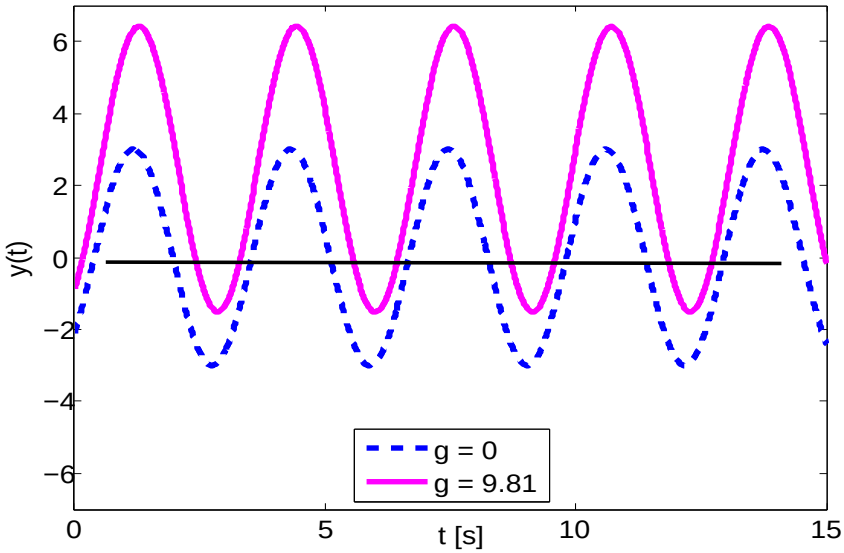
Obrázek 4.1: Porovnání trajektorií šikmého vrhu v odporujícím a neodporujícím prostředí.

2.6. Pohybová rovnice má tvar $y'' + \omega_0^2 y = g$, kde $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ je gravitační zrychlení. Výsledná funkce popisující kmitavý pohyb je součtem výsledku homogenní úlohy z řešeného příkladu a konstantního partikulárního řešení nehomogenní rovnice $y_p(t) = g/\omega_0^2$:

$$y(t) = A\sin(2t - \varphi) + \frac{g}{4}\,.$$

Porovnání grafických výstupů je obr. 4.2. Nové hodnoty amplitudy a fáze kmitavého pohybu v tíhovém poli určíme při nezměněných počátečních podmínkách:

$$\operatorname{tg}\varphi = 1 + \frac{g}{12\sqrt{2}}, \quad A = \frac{3\sqrt{2}}{2\cos\varphi}\,.$$



Obrázek 4.2: Vlastní netlumené kmity v tíhovém poli.

2.7. Snadno určíme frekvenci vlastních kmitů $\omega_0 = 2$ – viz (2.17), která je v obou případech stejná, a proto

$$y_h(t) = A\sin(2t - \varphi)\,.$$

a) Pro $f(t) = 2\cos t$ je $\omega = 1 \neq \omega_0$. Pro tuto speciální pravou stranu diferenciální rovnice tedy volíme partikulární integrál úplné rovnice ve tvaru $y_p = a\cos t + b\sin t$, který po dosazení a výpočtu vede k hodnotám $a = 2/3$, $b = 0$. Výsledným obecným řešením je funkce

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A\sin(2t - \varphi) + \frac{2}{3}\cos t\,. \tag{4.8}$$

Amplitudu a fázi určíme z počátečních podmínek, řešení obdržíme ve tvaru

$$y(t) = \frac{2}{3}\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\cos t = -\frac{2}{3}\cos 2t + \frac{2}{3}\cos t\,. \tag{4.9}$$

b) Pro $f(t) = 2\sin 2t$ je $\omega = 2 = \omega_0$, což znamená rezonanci vlastních a nucených kmitů. Pro zadanou pravou stranu musíme tedy partikulární integrál uvažovat ve tvaru

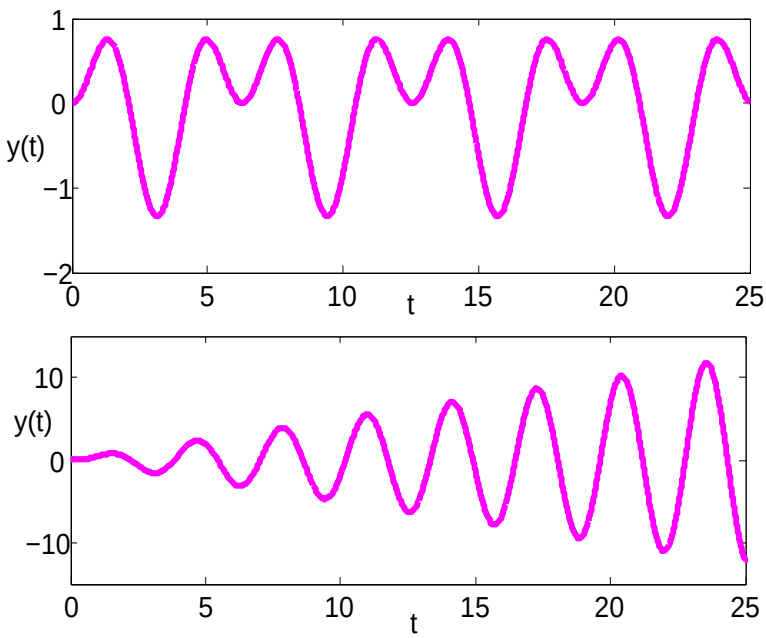
$$y_p = t(a\cos 2t + b\sin 2t)\,. \tag{4.10}$$

Tuto funkci a její druhou derivaci dosadíme do úplné rovnice a obdržíme $a = -1/2$, $b = 0$, a tudíž

$$y(t) = A\sin(2t - \varphi) - \frac{1}{2}t\cos 2t\,. \tag{4.11}$$

Tytéž počáteční podmínky jako v případě a) dávají amplitudu $A = 1/4$ a fázi $\varphi = 0$, takže

$$y(t) = \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}t\cos 2t\,. \tag{4.12}$$



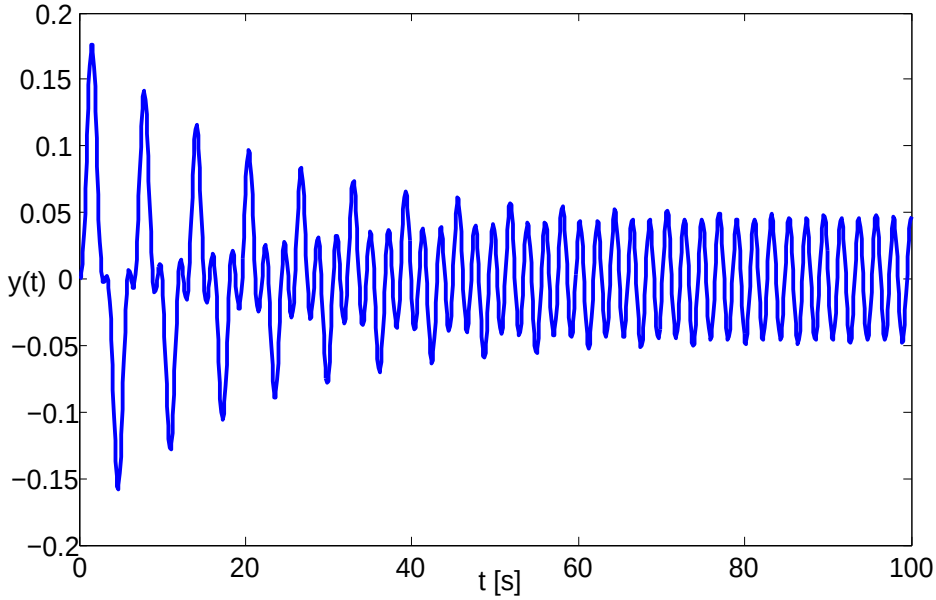
Obrázek 4.3: Netlumené nucené kmity – příklad: a) na horním grafu, b) dolní graf.

2.8. Požadovaný výstup nejsnáze získáme přímým použitím vztahů (2.29)–(2.34). Výchozí diferenciální rovnice

$$y'' + 0,1y' + 1,0025y = 3\sin 3t\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

má řešení

$$y(t) = A\sin(t - \varphi) + B\sin(3t - \psi)\,,$$



Obrázek 4.4: Tlumené nucené kmity.

kde $A = 0.1404$, $\varphi = -0.0125$, $B = 0.0468$ a $\psi = 3.1041$. Výsledný průběh harmonického děje je na obr. 4.4. Celý výpočet lze samozřejmě provést po jednotlivých krocích, jak je ukázáno v článku 2.3.2.

2.9. Označíme $\beta = (1/(m\alpha) - \omega^2)$. Obecné řešní rovnice má tvar

$$y(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t + A \cos \omega t + B \sin \omega t + D \,,$$

v němž partikulární řešení s neurčitými koeficienty A, B, D odpovídá speciální pravé straně a principu superpozice pro lineární rovnice. Výsledné hodnoty těchto koeficientů

$$A = \frac{g}{\beta^2 - \omega^2}, \quad B = 0, \quad D = \frac{e\omega^2}{\beta^2}$$

získáme po dosazení partikulárního řešení do úplné rovnice porovnáním koeficientů u funkcí stejného typu.

2.10.
(a) Vlastní oscilace proudu $i(t)$ jsou řešením rovnice $i''(t) + 2ai'(t) + \omega_0^2 i(t) = 0$, v níž je $a = R/(2L) = 1.6$ a $\omega_0 = \sqrt{1/(LC} = 44.7214$ a dále

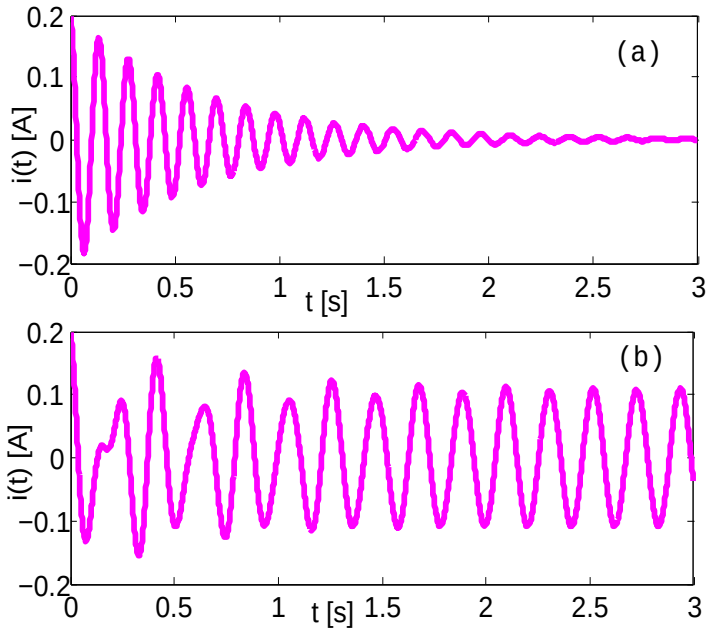
$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - a^2} = 44,6927 \,.$$

Pro určení amplitudy A a fázového posuvu φ v obecném řešení

$$i(t) = A\mathrm{e}^{-at} \sin(\beta t - \varphi)$$

použijeme počáteční podmínky $i(0) = 0,2$ a $i'(0) = -2$, které dosadíme do vztahu (2.42) s tímto výsledkem: $A = 0.2035$ A, $\varphi = 100.6446°$. Výsledný průběh je na obr. 4.5(a).
(b) V tomto případě je třeba řešit rovnici (2.37), která má pro zadané napájecí napětí tvar

$$i''(t) + 2ai'(t) + \omega_0^2 i(t) = \frac{\omega}{L} u_0 \cos \omega t \,. \tag{4.13}$$



Obrázek 4.5: Oscilace proudu v RLC obvodu: (a) vlastní tlumené, (b) nucené.

Její partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$i_p(t) = B\sin(\omega t - \psi) = B(\sin\omega t\cos\psi - \cos\omega t\sin\psi),$$

který dosadíme do rovnice a porovnáním koeficientů u funkcí $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ určíme

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2a\omega}\,, \qquad B = \frac{\omega}{L}u_0\frac{1}{2a\omega\cos\psi + (\omega^2 - \omega_0^2)\sin\psi}\,.$$

Na závěr vypočteme aplikací počátečních podmínek amplitudu $\hat{A}$ a fázi $\hat{\varphi}$ výsledného řešení

$$y(t) = \hat{A}\mathrm{e}^{-at}\sin(\beta t - \hat{\varphi}) + B\sin(\omega t - \psi)\,. \tag{4.14}$$

Časový průběh oscilací je obr. 4.5(b) pro následující numerické hodnoty:

$$\hat{A} = 0.1034, \quad \hat{\varphi} = 117.5269^\circ, \quad B = 0.1087, \quad \psi = -85.0123^\circ\,.$$

2.11. Rezonanční frekvence:

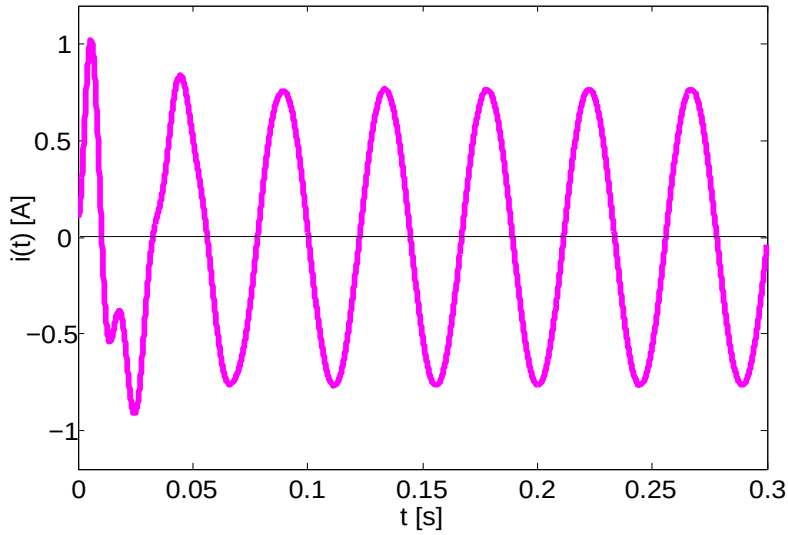
$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2a^2} = 100\sqrt{2}\,.$$

Napětí na vstupu: $u(t) = u_0\sin\omega t$, $u_0 = 10$, $\omega = \omega_r$. Parmetry partikulárního řešení: $B = 0,7672$, $\psi = 86,4815$. Graf je na obr. 4.6.

4.3 Soustavy diferenciálních rovnic

3.1. Vyjádříme bilanci objemových toků v každé z nádob s příčnými průřezy S_1, S_2 a aktuálními výškami hladin h_1, h_2 (viz obr. 3.1):

$$S_1\frac{dh_1}{dt} = -\alpha(h_1 - h_2)\,,$$



Obrázek 4.6: Průběh elektrického proudu při rezonanci.

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} = \alpha(h_1 - h_2)\ ;$$

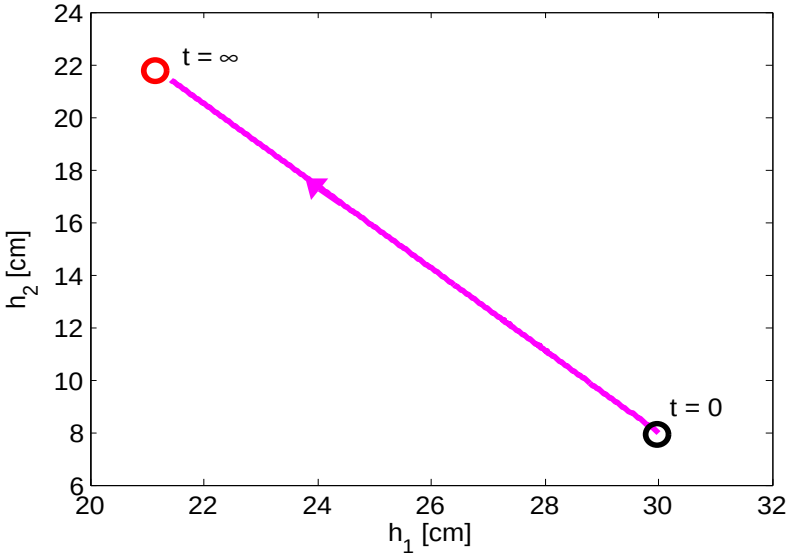
tuto soustavu vyřešíme s počátečními podmínkami $h_1(0) = H_1$, $h_2(0) = H_2$. Výsledkem jsou závislosti výšek hladin na čase:

$$h_1(t) = C_1 + S_2 C_2 \mathrm{e}^{-bt}, \qquad h_2(t) = C_1 - S_1 C_2 \mathrm{e}^{-bt}\,,$$

kde

$$C_1 = \frac{S_1 H_1 + S_2 H_2}{S_1 + S_2}, \quad C_2 = \frac{H_1 - H_2}{S_1 + S_2}, \quad b = \alpha\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\ .$$

Na první pohled je zřejmé, že rovnost $h_1 = h_2$ nastane pro $t \to \infty$. Soustava rovnic je asymptoticky stabilní, jak dokládají její vlastní čísla 0 a $-b$, přičemž fázovou trajektorii tvoří orientovaná polopřímka končící v bodě, kde $h_1 = h_2 = C_1$. Pro zadaná data se konkrétně jedná o hodnotu přibližně 21.4 cm, jak ukazuje obr. 4.7. Rozdíl výšek hladin po uplynutí 15 minut bude činit 1.167 cm.



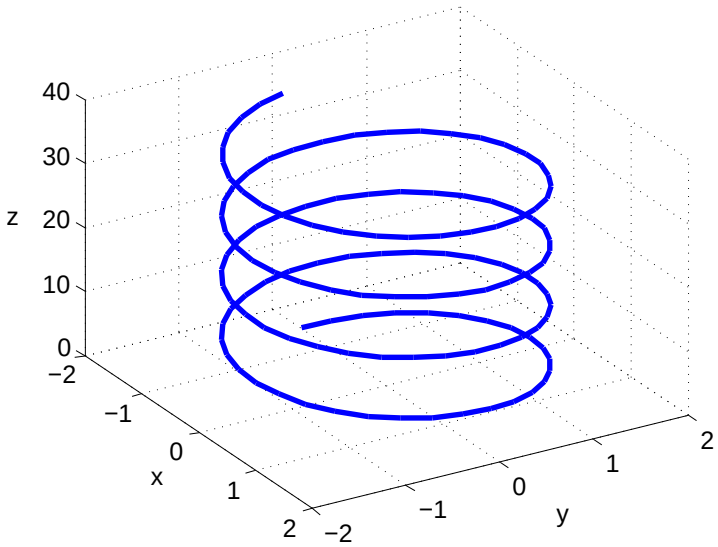
Obrázek 4.7: Fázová trajektorie výšek hladin v nádobách.

3.2. Úhlová frekvence $\omega = QB/m = 2$. Soustavu (3.2) vyřešíme pro složky vektoru rychlosti s počátečními podmínkami $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(0) = (0, v_0 \sin\beta, v_0 \cos\beta) = (0, 3, 3)$. Výsledkem je vektor rychlosti částice

$$\boldsymbol{v}(t) = 3(\sin 2t, \cos 2t, 1) \tag{4.15}$$

a parametrické vyjádření trajektorie, kterou je pravidelná šroubovice (obr. 4.8)

$$\boldsymbol{s}(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}(\tau)\, d\tau = \frac{3}{2}(-\cos 2t, \sin 2t, 2t) \tag{4.16}$$



Obrázek 4.8: Trajektorie částice v magnetickém poli.

V závislosti na úhlu β mohou nastat tři případy:

1. $\beta = 0 \ldots \boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{B}$,
2. $\beta \in (0, \pi/2) \ldots$ pravidelná šroubovice,
3. $\beta = \pi/2 \ldots$ kružnice.

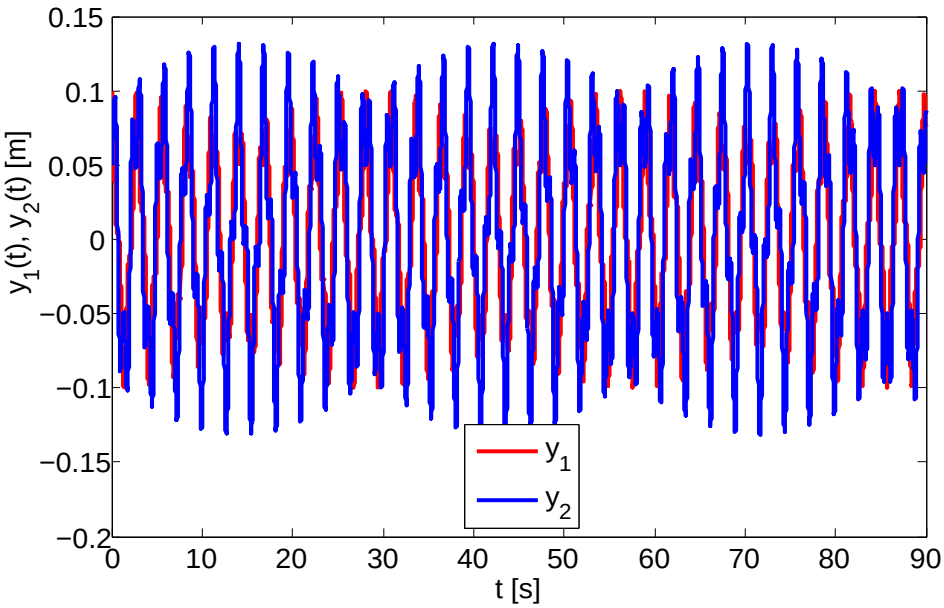
3.3. Podle řešeného příkladu 3.1 má úloha dvě dvojice imaginárních komplexně sdružených vlastních čísel $\beta_1 = -\beta_1^*$, $\beta_2 = -\beta_2^*$, kterým odpovídají komplexně sdružené vlastní vektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_1^*$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_2^*$. Obecné řešení $\boldsymbol{Y}(t) = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4]$ zapíšeme takto (uvažujeme sloupcové vektory):

$$\boldsymbol{Y}(t) = C_1 \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{u}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_1 t}\right) + C_2 \operatorname{Im}\left(\boldsymbol{u}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_1 t}\right) + C_3 \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{u}_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_3 t}\right) + C_4 \operatorname{Im}\left(\boldsymbol{u}_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_3 t}\right) .$$

Tím docílíme toho, že po úpravě budou všechny členy obsahovat pouze goniometrické funkce $\cos\beta t$, $\sin\beta t$. Na základě počátečních podmínek (3.10) dopočítáme konstanty C_k. Hodnoty vlastních čísel pro zadaná data jsou $\beta_1 = 6.9282\mathrm{i}$, $\beta_3 = 2.2361\mathrm{i}$. Grafy výsledných kmitů obou závaží jsou na obr. 4.9.

Jak je z obrázku patrno, obě závaží vykonávají složený kmitavý pohyb s jistou základní frekvencí, přičemž jeho amplituda se vlivem vzájemné vazby rovněž periodicky mění. V okamžiku, kdy amplituda jednoho ze závaží dosáhne maxima, je amplituda druhého minimální a naopoak.

Z praktických důvodů lze doporučit výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů numericky. Vhodný je kupříkladu MatLab, v němž pro zadanou matici **A** příkazem



Obrázek 4.9: Složený harmonický pohyb.

```
[U,R] = eig(A)
```

procedura `eig` vrací diagonální matici vlastních čísel **R** a matici **U**, jejíž sloupce tvoří vlastní vektory.

3.4. Řešíme postupem z článku 3.2 s tímto výsledkem (časový průběh aktivity polonia je na obr. 4.10):

$$\begin{bmatrix} A^{(1)}(t) \\ A^{(2)}(t) \\ A^{(3)}(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ -\lambda_2 \\ \frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_3 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda_3 t}, \tag{4.17}$$

kde

$$C_1 = \frac{A_0^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad C_2 = \frac{A_0^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_3} + \frac{\lambda_2 A_0^{(1)}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \tag{4.18}$$

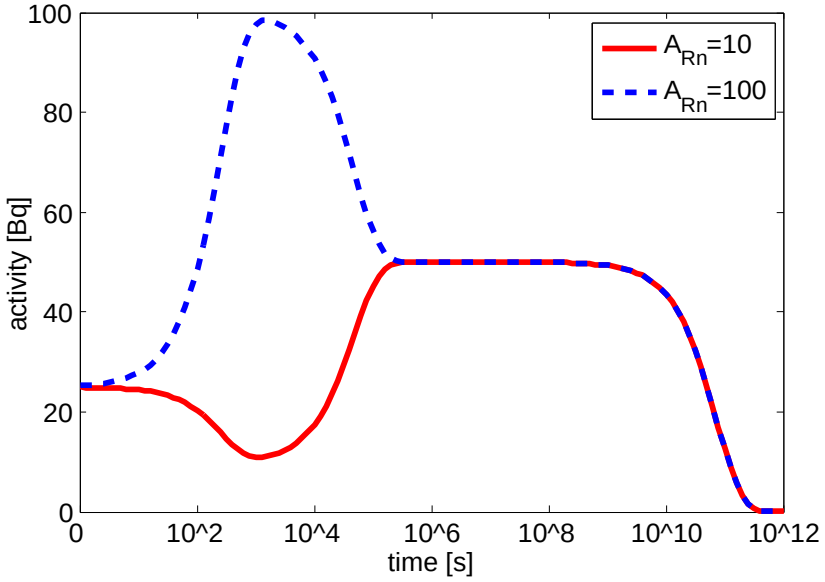
$$C_3 = A_0^{(3)} + \frac{\lambda_3 A_0^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_3} + \frac{\lambda_2\lambda_3 A_0^{(1)}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}. \tag{4.19}$$

3.5. Řešení nehomogenní soustavy (3.3) hledáme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix} = \underbrace{C_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{r_2 t}}_{\boldsymbol{I}_h(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} \cos\omega t + \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} \sin\omega t}_{\boldsymbol{I}_p(t)}. \tag{4.20}$$

1. Pro homogenní soustavu

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} -L_2 R_1 & M R_2 \\ M R_1 & -L_1 R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$



Obrázek 4.10: Aktivita polonia.

vypočteme vlastní čísla r_1, r_2 a k nim příslušné vlastní vektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$.

2. Partikulární řešení nehomogenní soustavy najdeme po dosazení vektoru $\boldsymbol{I}_p(t)$ do původní soustavy:

$$\boldsymbol{I}_p'(t) = \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\begin{bmatrix} -L_2R_1 & MR_2 \\ MR_1 & -L_1R_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{I}_p(t) + \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\begin{bmatrix} L_2u_0\sin\omega t \\ -Mu_0\cos\omega t \end{bmatrix}.$$

Obdržíme dvě rovnice, v nichž porovnáme koeficienty u funkcí $\cos\omega t$, $\sin\omega t$. Řešením získané algebraické soustavy jsou složky vektorů $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$.

3. Aplikací počátečních podmínek vypočteme konstanty C_1, C_2.

Kontrolní numericiké výstupy: $L_1L_2 - M^2 = 4.10^{-4} > 0\,;\quad r_1 = -5$, $r_2 = -30$.
Průběh proudů v obou vinutích transformátoru je na obr. 4.11.

3.6. Rovnice pro proud v sekundárním vinutí

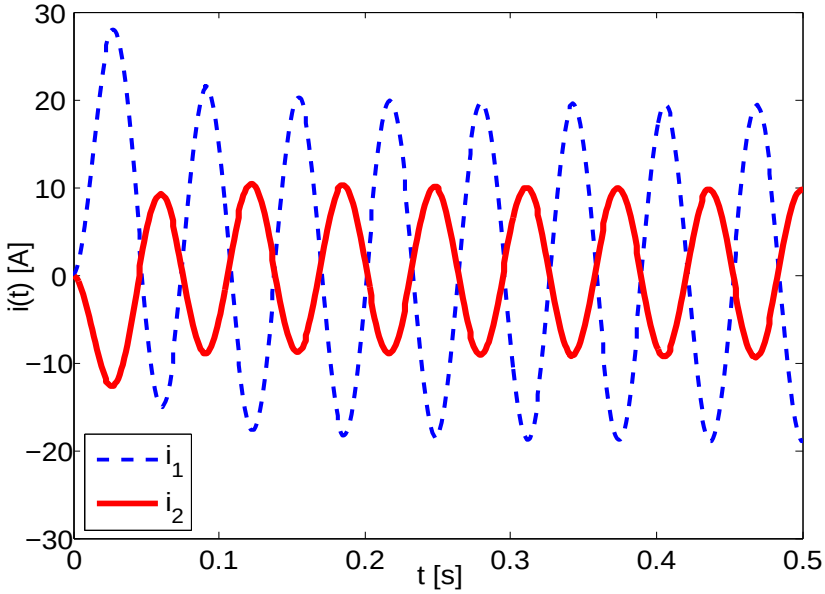
$$ai_2''(t) + bi_2'(t) + R_1R_2\,i_2(t) = -Mu'(t)\,, \tag{4.21}$$

kde $a = L_1L_2 - M^2$, $b = L_1R_2 + L_2R_1$, má řešení

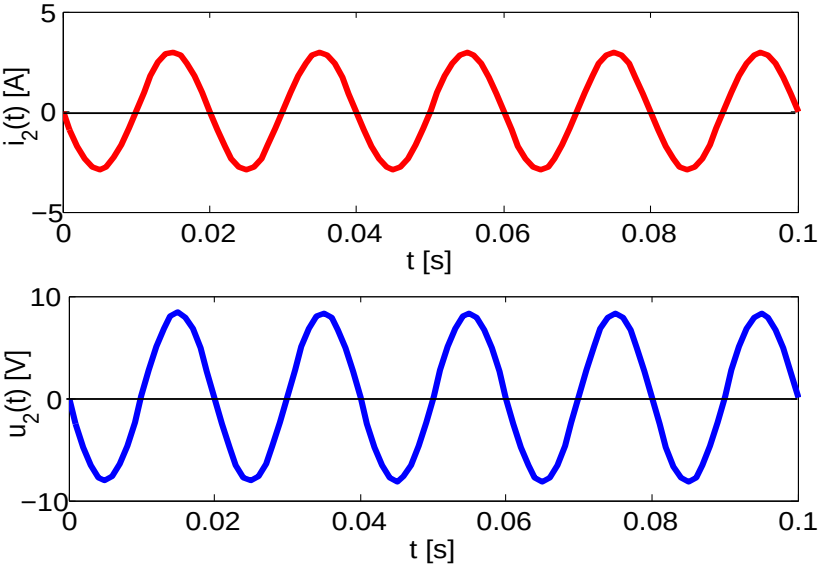
$$i_2(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} - \frac{u_0\omega M}{b^2\omega^2 + (R_1R_2 - a\omega^2)^2}\left[b\omega\cos\omega t + (R_1R_2 - a\omega^2)\sin\omega t\right]. \tag{4.22}$$

Konstanty C_1, C_2 určíme z počátečních podmínek, pro výpočet napětí použijeme Ohmův zákon $u_2(t) = R_2i_2(t)$.
Kontrolní data: $L_1L_2 - M^2 = 7.10^{-6} > 0\,;\quad r_1 = -5$, $r_2 = -32008$ (zaokrouhleně).
Průběh proudu a napětí demonstruje obr. 4.12.

3.7. Systém je nestabilní s komplexními vlastními čísly $r_{1,2} = 0.005 \pm 0.037\mathrm{i}$. Progrese stavů populací je divergentní – obr. 4.13.



Obrázek 4.11: Proudy ve vinutích transformátoru.

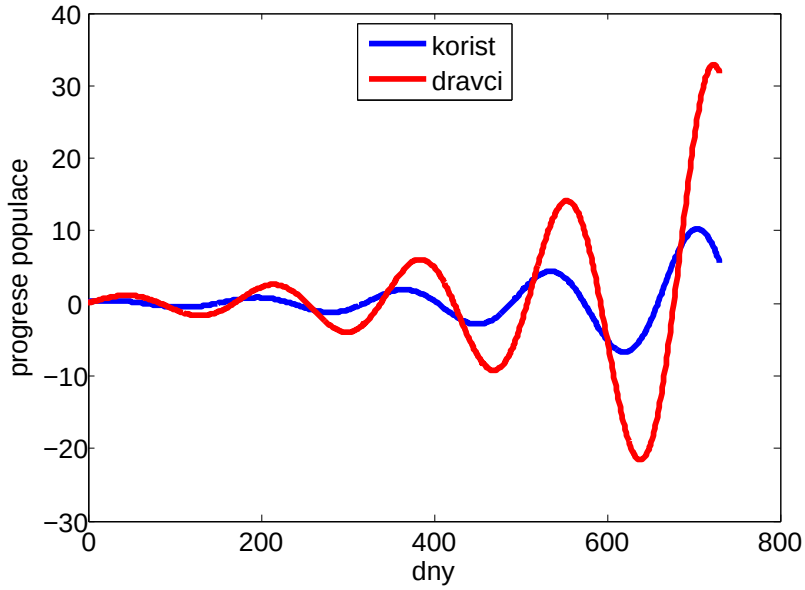


Obrázek 4.12: Proud a napětí v sekundárním vinutí.

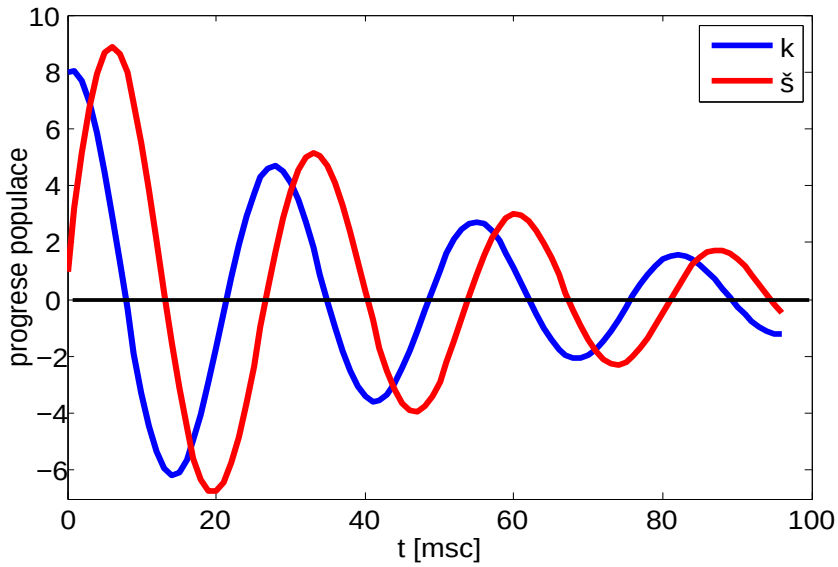
3.8. Vývoj progrese (životaschopnosti) obou populací je asymptoticky stabilní, četnost exponenciálně ubývá s časem (obr. 4.14). To odpovídá záporným reálným částem komplexních vlastních čísel matice soustavy $-0.0200 + 0.2315\mathrm{i}$. Ve fázové rovině je úbytek v populacích vyjádřen logaritmickou spirálou směřující limitně do bodu $[0, 0]$ - obr. 4.15.

3.9. Matice výchozí soustavy má vlastní čísla 0.1 a 0.5, biosystém je tudíž nestabilní a počty jedinců v populacích neomezeně narůstají (modrá linie na obr. 4.16). Pro modifikovaný biosystém je třeba požadovat ryze imaginární vlastní čísla. Uplatníme-li tuto podmínku v charakteristické rovnici, musí vymizet její lineární člen, cože vede k hodnotě $\delta = 30$ a následně k vlastním číslům $\pm 0.447\mathrm{i}$. S nimi se systém stává stabilním a jeho fázovou trajektorií je elipsa – červená křivka v obrázku 4.16.

3.10. Jednotlivé rovnice na sebe navazují podobně jako v případě radioaktivního rozpadu. Můžeme proto postupně řešit diferenciální rovnice pro jednotlivé komponenty bio-



Obrázek 4.13: Progrese populací kořisti a dravců.



Obrázek 4.14: Vývoj životaschopnosti populací kaprů a štik.

systému nebo sestavit počáteční úlohu pro nehomogenní soustavu tří rovnic prvního řádu. V obou případech je třeba nejprve upravit zdrojovou funkci $f_0(t)$. Nejprve rozepíšeme

$$\sin(\omega t - t_r) = \sin \omega t \cos t_r - \cos \omega t \sin t_r,$$

označíme $a_0 = 4010$ a dále položíme

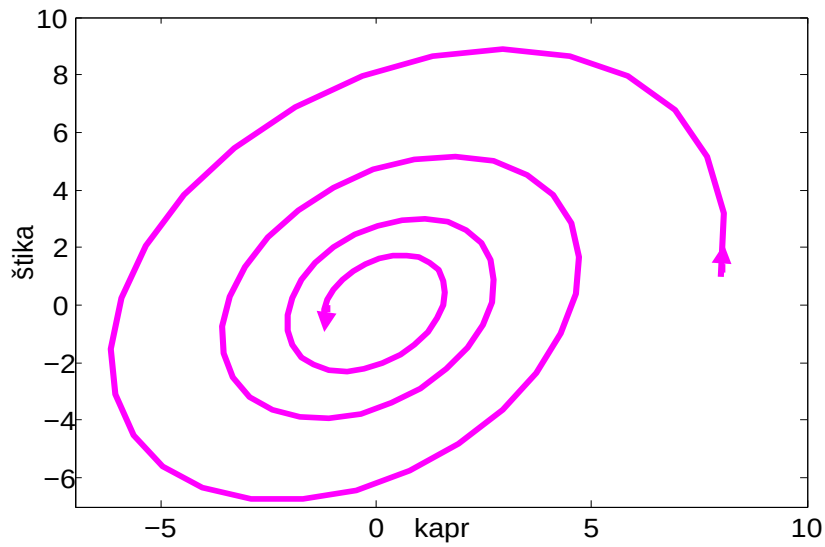
$$0.635 a_0 \sin t_r = b_1, \qquad 0.635 a_0 \cos t_r = b_2 \,.$$

Jako výsledný tvar obdržíme funkci

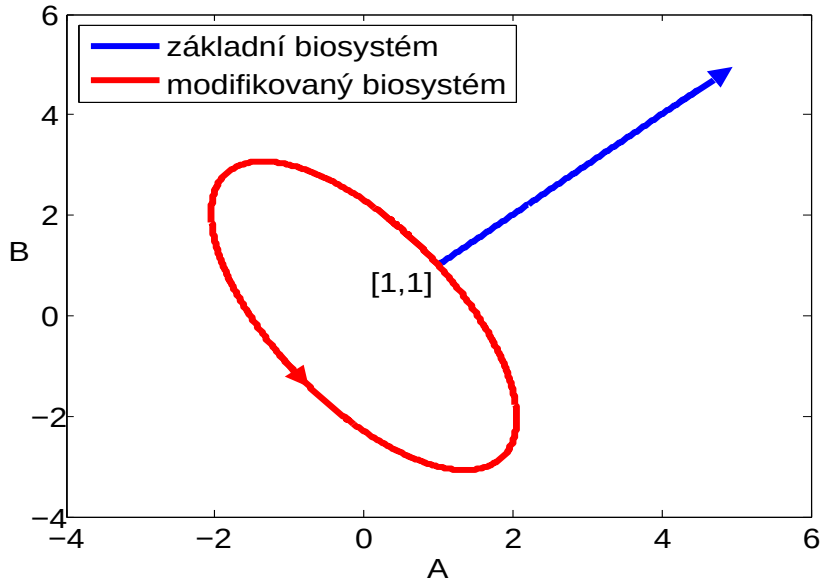
$$f_0(t) = a_0 + b_1 \cos \omega t - b_2 \sin \omega t \,.$$

Budeme-li při řešní postupovat druhým způsobem, východiskem bude maticová forma zadané soustavy:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f_0}(t) \,,$$



Obrázek 4.15: Fázový obraz populační progrese v systému kapři/štiky.



Obrázek 4.16: Fázový obraz řešení úlohy 3.9 pro časové rozmezí 0 až 20 hodin.

kde

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ f_1 & -a_2 & 0 \\ 0 & f_2 & -a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f_0} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix}.$$

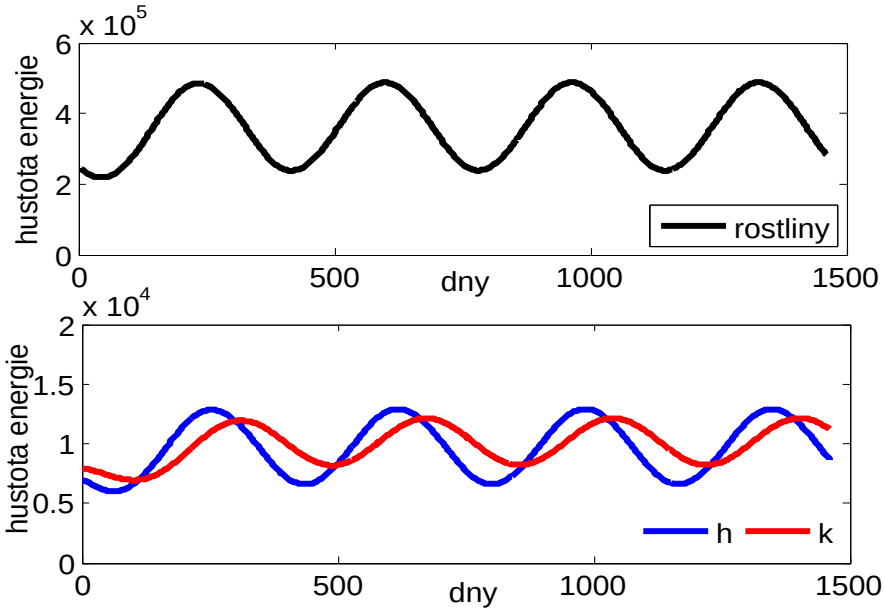
Diagonálu matice soustavy tvoří prvky

$$a_1 = v_1 + w_1 + f_1, \quad a_2 = v_2 + w_2 + f_2, \quad a_3 = v_3 + w_3.$$

Na první pohled je patrno, že matice homogenní soustavy má za vlastní čísla právě diagonální členy, a proto hledané řešení bude mít tvar

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^{3} C_j \boldsymbol{u}_j \mathrm{e}^{-a_j t} + \boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}(t)\,,$$

v němž $\boldsymbol{u}_j$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ a vektory $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{q}$ odpovídají strukturou pravé straně $\boldsymbol{f_0}(t)$. Jejich složky určíme metodou neurčitých koeficientů, konstanty C_j pak z počátečních podmínek. Výsledné časové závislosti pro jednotlivé komponenty biosystému jsou znázorněny na obr. 4.17.



Obrázek 4.17: Energetická bilance v biosystému (h ... herbivoři, k ... karnivoři).

Literatura

[1] VLČEK, J., VRBICKÝ, J.: Diferenciální rovnice (Matematika IV), VŠB-TU Ostrava, 1997 (1. vydání), ISBN 80-7078-438-5

[2] http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/difrov.html

[3] http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/8.pdf

[4] http://mi21.vsb.cz/modul/obycejne-diferencialni-rovnice

[5] http://homel.vsb.cz/~s1a64/ma2/uvod_odr_krajc.pdf

[6] http://books.fs.vsb.cz/sipro/sippri4.htm